# Первый класс Черна

В задачах этого листка $E \to B$ — комплексное линейное расслоение. Решения всех задач, кроме последней, в той или иной степени имеются в тексте лекции 5. Пусть $\nabla$ — связность на $E$, а $F \in \Gamma(\Lambda^2 T^*B \otimes \mathrm{End}(E))$ — кривизна этой связности.

**Задача 1.** Расслоение $\mathrm{End}(E))$ одномерно и тривиально.

Таким образом, кривизну $F$ можно воспринимать просто как 2-форму на базе $B$ расслоения.

**Задача 2.** Кривизна $F$ является замкнутой 2-формой: $dF = 0$.

**Задача 3.** Если $F'$ — кривизна какой-либо иной связности $\nabla'$ на том же расслоении $E$, то форма $F - F'$ точная.

Тем самым, все формы связностей на линейном расслоении определяют один и тот же класс $c_1(E) \in H^2_{DR}(B)$ в двумерных когомологиях де Рама базы. Он называется классом Эйлера (или первым классом Черна) расслоения $E$.

Пусть $U_i$ — набор окрестностей, покрывающих базу $B$ и таких, что над каждой из них расслоение $E$ тривиально; пусть $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ — соответствующие функции перехода. Рассмотрим разбиение единицы $\varrho_i$, подчиненное покрытию $U_i$, и определим на каждой окрестности $U_i$ 1-форму $\theta_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j \varrho_j \frac{dg_{ji}}{g_{ji}}$.

**Задача 4.** а) Докажите, что этот набор 1-форм задает связность на расслоении $E$;

б) Выпишите форму кривизны этой связности.

Пусть теперь база расслоения $B$ двумерна и ориентирована. Пусть $s : B \to E$ — сечение расслоения, $s(a) = 0$, и в некоторой окрестности $U$ точки $a$ сечение $s$ других нулей не имеет (изолированный нуль). Без ограничения общности можно предположить, что над $U$ расслоение тривиально; пусть $\varphi_x : E_x \to \mathbb{C}$, $x \in U$ — соответствующая тривиализация. Рассмотрим простую замкнутую кривую $\gamma \subset U$, охватывающую точку $a$ один раз в положительном направлении. Тогда $s(x) \neq 0$ при $x \in \gamma$ и, тем самым, определено отображение $\varphi_{s(x)}/|\varphi_{s(x)}| : \gamma = S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}$. Его степень называется порядком нуля $a$.

**Задача 5.** а) Проверьте, что порядок нуля определен корректно, т.е. не зависит от выбора кривой $\gamma$ и тривиализации $\varphi$.

б) Пусть $E \to B$ — одномерное тривиальное расслоение над $\mathbb{C}$, а сечение $s$ — многочлен. Тогда порядок нуля $s$ — это порядок нуля $s$ как голоморфной функции.

**Задача 6.** а) Докажите, что над дополнением к множеству нулей сечения линейное расслоение тривиально.

б) Тривиализуем расслоение в окрестности нулей (так, чтобы для разных нулей окрестности не пересекались). Как по функциям перехода узнать порядок нуля?

**Задача 7.** Пусть $E \to B$ — комплексное линейное расслоение над ориентированной компактной базой, и пусть $s : B \to E$ — его сечение, все нули которого изолированы. Пусть $F$ — кривизна какой-либо связности на расслоении $E$. Тогда $\int_B F$ (т.е. значение класса Эйлера на фундаментальном классе многообразия $B$) равен сумме индексов всех нулей сечения $s$, умноженной на $2\pi i$.

**Задача 8.** Если $E$ — касательное расслоение к $B$, то $\int_B F = \chi(B)$.

**Задача 9.** Пусть $E \to S^2$ — линейное комплексное расслоение. Тогда значение класса Эйлера на фундаментальном классе базы равно $2\pi i$, умноженному на стандартный целочисленный инвариант таких расслоений (см. задачу 4 листка "Немного о расслоениях").

**Задача 10.** Найдите первый класс Черна

а) тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P^1$;

б) его тензорной степени (постройте сечение и посчитайте сумму индексов его нулей);

в) нормального расслоения к $\mathbb{C}P^1$ в $\mathbb{C}P^2$;

г) нормального расслоения к гладкой кривой в $\mathbb{C}P^2$.