Лекция 28. Теорема Фробениуса

В этой заключительной части курса мы возвращаемся к локальной теории. Задача, которую мы будем изучать, является прямым обобщением задачи об интегрировании поля прямых, которую мы изучали в дополнении к лекции 23.

Условимся, что в этой лекции слово «многообразие» означает «многообразие без края».

Определение 28.1. *Полем k-мерных плоскостей,* или *k-мерным распределением* на гладком многообразии X называется семейство k-мерных векторных подпространств $V_x \subset \mathcal{T}_x$ для всякого $x \in X$, гладко зависящих от точки x.

Определение 28.2. Говорят, что k-мерное распределение $\{V_x\}$ на многообразии X является *интегрируемым,* если для всякой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in x$ и замкнутое k-мерное подмногообразие $Y \subset U$, обладающее тем свойством, что для всякой точки $y \in U$ выполнено равенство $\mathcal{T}_yY = V_y \subset \mathcal{T}_yX$.

k-мерные подмногообразия, о которых идет речь в этом определении, называются *интегральными многообразиями* распределения $\{V_x\}$.

Если $k = 1$, то, как мы знаем из предложения 23.15, всякое одномерное распределение (оно же поле прямых) интегрируемо. При $k > 1$ это уже неверно:

Пример 28.3. Рассмотрим форму $\omega = dz - x dy$ в $\mathbb{R}^3$. На каждом касательном пространстве она определяет ненулевой линейный функционал, так что ядра этих функционалов определяют поле 2-плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Покажем, что это поле неинтегрируемо.

Доказательство. Предположим, от противного, что оно интегрируемо. На каждой плоскости в $\mathbb{R}^3$ наше поле плоскостей высекает поле прямых; стало быть, пересечения интегральных подмногообразий с этими плоскостями являются интегральными кривыми этих полей. Посмотрим, в частности, что за кривые будут высекаться на плоскостях $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ и $y = 1$; обозначим эти плоскости через X_0, X_1, Y_0 и Y_1 соответственно. Ограничение формы ω на плоскость X_0 имеет вид dz, так что пересечения интегральных поверхностей с этой плоскостью суть прямые, параллельные оси Oy. На плоскости X_1 с координатами y, z, форма имеет вид $dz - dy$, так что пересечения интегральных поверхностей с этой плоскостью суть прямые, составляющие угол $45°$ с осью Oy. Рассматривая аналогичным образом ограничения на плоскости Y_0 и Y_1, получаем, что на каждой из них высекается семейство прямых, параллельных оси Ox. Рассмотрим теперь интегральную поверхность S, проходящую через начало координат, и попробуем выяснить, в какой точке она пересечет прямую L, проходящую через точку $(1, 1, 0)$ параллельно оси Oz.

Из сказанного выше вытекает, что пересечение S с гиперплоскостью X_0 является отрезком оси Oy, а пересечение $S \cap Y_1$ удовлетворяет уравнению $z = x$, так что точка пересечения S и L имеет координаты $(1, 1, 1)$. Если же «зайти с другой стороны», рассмотрев пересечения $S \cap Y_0$ и $S \cap X_1$ соответственно, то получим, что эти пересечения являются отрезками осей Ox и Oy соответственно, и точка пересечени S и L имеет координаты $(1, 1, 0)$ — противоречие! $\square$

Теорема Фробениуса, которой посвящена эта лекция, дает необходимое и достаточное условие интегрируемости k-мерного распределения. Следующее простое предложение подсказывает, как это условие могло бы выглядеть.

Предложение 28.4. *Пусть Y — замкнутое подмногообразие многообразия X. Тогда коммутатор двух векторных полей, касающихся многообразия X, также касается многообразия X.*

Доказательство. Нетрудно понять (проведите аккуратное доказательство самостоятельно), что векторное поле v касается подмногообразия Y тогда и только тогда, когда для всякой функции $f \in \mathcal{O}(X)$, тождественно обращающейся в нуль на Y, функция $v(f)$ (производная по векторному полю) также тождественно обращается в нуль на Y. Из этого замечания предложение следует с очевидностью. $\square$

Теорема 28.5 (теорема Фробениуса). *k-мерное распределение интегрируемо тогда и только тогда, кгда для любых двух векторных полей v и w, касающихся распределения, их коммутатор также касается распределения. (Говорят, что векторное поле v касается распределения $\{V_x\}$, если для всякого $x \in X$ имеем $v_x \in V_x$.)*

Прежде, чем доказывать теорему, переформулируем ее условие в более удобном виде.

Предложение 28.6. *Пусть на многообразии X заданы k векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ таким образом, что касательные векторы $(v_1)_x, \ldots, (v_k)_x$ линейно независимы для каждой точки $x \in X$; пусть $V_x \subset \mathcal{T}_x X$ — векторное пространство с базисом $(v_1)_x, \ldots, (v_k)_x$. Тогда для того, чтобы распределение $\{V_x\}$ удовлетворяло условиям теоремы Фробениуса, достаточно, чтобы для всяких $i, j \in [1; k]$ коммутатор $[v_i, v_j]$ был представим в виде $f_1 v_1 + \cdots + f_k v_k$, где f_m — гладкие функции на X.*

Доказательство предложения 28.6. Векторное поле касается нашего распределения тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $g_1 v_1 + \ldots g_k v_k$. Тот факт, что коммутатор полей такого вида также касается распределения, немедленно вытекает из условия и следующего непосредственно проверяемого тождества:

$$[fv, gw] = fg \cdot [v, w] + fv(g) \cdot w - gw(f) \cdot v,$$

в котором f и g — гладкие функции, а v и w — векторные поля. $\square$

Предупреждение 28.7. Далеко не всякое k-мерное распределение можно задать с помощью k определенных на всем многообразии линейно независимых векторных полей!

Доказательство теоремы Фробениуса. Часть «только тогда» немедленно следует из предложения 28.4. Займемся доказательством части «тогда».

Локально всякое k-мерное распределение можно задать следующим образом: многообразие покрыто открытыми подмножествами, и на каждом из этих подмножеств заданы k векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ таким образом, что касательные векторы $(v_1)_x, \ldots, (v_k)_x$ порождают подпространство $V_x \subset \mathcal{T}_x X$ для всякого x, принадлежащего этому открытому подмножеству. Поскольку интегральные подмногообразия, существование которых нам надо доказать, являются подмногообразиями открытых подмножеств в X, можно перейти от многообразия X к одной из этих окрестностей и считать, что распределение задано с помощью k линейно независимых в каждой точке векторных полей $v_1, \ldots, v_k$.

Будем вести доказательство индукцией по k. При $k = 1$, как мы уже отмечали, доказывать нечего ввиду предложения 23.15; предположим, что для $k-1$-мерных распределений теорема Фробениуса доказана.

Применим теорему о выпрямлении векторного поля (предложение 23.12); согласно этой теореме, можно считать (уменьшив, если нужно открытое подмножество), что многообразие есть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и что $v_1 = \partial/\partial x_1$. Для $j = 2, \ldots, k$ положим $v_j = \sum_{m=1}^{n} f_{jm}(\partial/\partial x_m)$. Если заменить, при $j > 1$, v_j на $v_j - f_{j1}(\partial/\partial x_1)$, то полученные векторные поля, вместе с $v_1 = \partial/\partial x_1$, будут порождать то же самое распределение. Поэтому можно считать, что $v_1 = \partial/\partial x_1$ и $v_j = \sum_{m>1} f_{jm}(\partial/\partial x_m)$.

По нашему предположению, для всяких $i, l \in [1; k]$ коммутатор $[v_i, v_l]$ представляется в виде $f_1 v_1 + \cdots + f_k v_k$, где f_j — гладкие функции на U. Если $i, l > 1$, то в выражении для $[v_i, v_l]$ частные производные по x_1 не присутствуют, так что в этом случае $[v_i, v_l] = f_2 v_2 + \cdots + f_k v_k$. Теперь для всякого $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим множество $U_c = \{(c, x_2, \ldots, x_n) \in U\}$; мы будем также рассматривать U_c как открытое подмножество в $\mathbb{R}^{n-1}$. Так как в записи полей $v_2, \ldots, v_k$ производная по x_1 не участвует, их можно рассматривать как векторные поля на U_c; ввиду сказанного выше и предложения 28.6 они определяют на U_c $k-1$-мерное распределение, удовлетворяющее условиям теоремы Фробениуса. Стало быть, по предположению индукции через каждую точку каждого из U_c проходит $k-1$-мерное интегральное подмногообразие, касающееся нашего k-мерного распределения. Мы покажем, что объединение этих $k-1$-мерных подмногообразий при всевозможных c даст k-мерное интегральное подмногообразие, касающееся распределения $\{V_x\}$.

Чтобы это сделать, сформулируем

Утверждение 28.8. *$k-1$-мерные распределения на множествах U_c, определенные векторными полями $v_2, \ldots, v_k$, переходят друг в друга при параллельном переносе вдоль оси Ox_1.*

Из этого утверждения будет следовать все, что нужно: в самом деле, если $W \subset U_c$ — интегральное подмногообразие $k-1$-мерного распределения, и если I — интервал на вещественной оси, то $I \times W$ будет, очевидно, искомым интегральным подмногообразием k-мерного распределения. Осталось доказать утверждение. Начнем с леммы.

Лемма 28.9. *Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство, $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, и пусть $t \mapsto ((e_1)_t, \dots, (e_k)_t)$ — такое гладкое отображение из I в V^k, что для всех $t \in I$ векторы $(e_1)_t, \dots, (e_k)_t$ линейно независимы. Предположим, что для всякого $t \in I$ и всякого $m \in [1;k]$ вектор $\frac{d(e_m)_t}{dt}$ является линейной комбинацией векторов $(e_1)_t, \dots, (e_k)_t$. Тогда векторное подпространство в V, порожденное $(e_1)_t, \dots, (e_k)_t$, не зависит от t.*

Доказательство леммы. Достаточно доказать, что все поливекторы $(e_1)_t \wedge \dots \wedge (e_k)_t \in \bigwedge^k V$ пропорциональны друг другу. Для этого продифференцируем его по t. По формуле Лейбница имеем

$$\frac{d}{dt}\big((e_1)_t \wedge \dots \wedge (e_k)_t\big) =$$
$$= \frac{d(e_1)_t}{dt} \wedge (e_2)_t \wedge \dots \wedge (e_k)_t + (e_1)_t \wedge \frac{d(e_1)_t}{dt} \wedge \dots \wedge (e_k)_t + \dots + (e_1)_t \wedge (e_2)_t \wedge \dots \wedge \frac{d(e_k)_t}{dt};$$

Из условия ясно, что каждое из слагаемых в правой части пропорционально $(e_1)_1 \wedge \dots \wedge (e_k)_t$. Стало быть, имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}\big((e_1)_t \wedge \dots \wedge (e_k)_t\big) = \varphi(t) \cdot (e_1)_t \wedge \dots \wedge (e_k)_t, \tag{28.1}$$

где φ — некоторая гладкая функция от t. Если рассмотреть условие (28.1) как дифференциальное уравнение в пространстве $\bigwedge^k V$, то ясно, что всякое его решение имеет вид

$$(e_1)_t \wedge \dots \wedge (e_k)_t = e^{\Phi(t)} \cdot (e_1)_{t_0} \wedge \dots \wedge (e_k)_{t_0},$$

где Φ — какая-то первообразная функции φ. Лемма доказана. □

Теперь мы можем завершить доказательство утверждения 28.8 (и теоремы Фробениуса). Напомним, что распределение на U порождено векторным полем $\partial/\partial x_1$ и полями $v_j = \sum_{m=2}^n f_{jm}(\partial/\partial x_m$ при $j \in [2;m]$. Соответственно, $k-1$-мерное распределение на U_t порождается, в точке $(t, x_2, \dots, x_n)$, векторами $\sum_{m=2}^n f_{jm}(t, x_2, \dots, x_n)(\partial/\partial x_m)$. Воспользуемся последним из оставшихся неиспользованными условий: что коммутаторы $v_1 = \partial/\partial x_1$ и v_j при $2 \leqslant j \leqslant k$ являются линейными комбинациями $v_1, \dots, v_k$. Поскольку, как легко видеть,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, f_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right] = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

из этого условия вытекает, что для всякого целого j из интервала $[2;k]$ производная по t вектора $(v_j)_{(t,x_2,\dots,x_n)}$ является линейной комбинацией векторов $(v_2)_{(t,x_2,\dots,x_n)}, \dots, (v_k)_{(t,x_2,\dots,x_n)}$. Теперь все следует из леммы 28.9. □

Распределение можно задавать не только с помощью множества касающихся его векторных полей, но и другими способами; соответственно, и теорема Фробениуса будет при этом формулироваться иначе. В заключение этой лекции приведем две такие переформулировки.

Во-первых, можно задать распределение не с помощью векторных полей, а двойственным образом — с помощью дифференциальных форм. Именно, пусть на n-мерном многообразии X заданы $n-k$ дифференциальных форм $\omega_1, \ldots, \omega_{n-k} \in \Omega^1(X)$ таким образом, что линейные функционалы $(\omega_1)_x, \ldots, (\omega_{n-k})_x$ линейно независимы для всякого $x \in X$. Тогда соответствие $x \mapsto \operatorname{Ker}(\omega_1)_x \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(\omega_{n-k})_x$ задает k-мерное распределение на многообразии X (всякое k-мерное распределение допускает такое задание локально, но не обязательно глобально! Ср. предупреждение 28.7).

Предложение 28.10. *Пусть на n-мерном многообразии X заданы m дифференциальных форм $\omega_1, \ldots, \omega_m$, линейно независимых в каждой точке. Тогда $n-m$-мерное распределение $\{V_x\}$, задаваемое этими формами, будет интегрируемо тогда и только тогда, когда для всякого $i \in [1; m]$ и всякого $x \in X$ имеем $d\omega_i|_{V_x} = 0$.*

Доказательство. Мы воспользуемся следующим фактом, доказательство которого будет разбираться на семинарах.

Предложение 28.11 (формула Картана). *Пусть ω — дифференциальная форма степени 1. Тогда для любых двух векторных полей v, w имеем*

$$(d\omega)(v, w) = v(\omega(w)) - w(\omega(v)) - \omega([v, w])$$

Здесь через $v(f)$ обозначена производная от функции f по векторному полю v, а через $\omega(v)$ — функция, являющаяся результатом «свертки» дифференциальной формы ω с векторным полем v (иными словами, значение функции $\omega(v)$ в точек x равно $\omega_x(v_x)$); аналогичный смысл имеет обозначение $(d\omega)(v, w)$.

Пусть теперь v и w — векторные поля, касающиеся распределения $\{V_x\}$. По определению это означает, что $\omega_i(v) = \omega_i(w) = 0$ для всех $i \in [1; m]$. Тогда из формулы Картана немедленно следует, что $\omega_i([v, w]) = -(d\omega_i)(v, w)$, откуда предложение вытекает с очевидностью. □

Особенно просто выглядит предложение 28.10 в случае, когда распределение представляет собой «поле гиперплоскостей»:

Следствие 28.12. *Пусть ω — дифференциальная форма степени 1, нигде не обращающаяся в нуль. Тогда распределение $\{V_x\}$, где $V_x = \operatorname{Ker} \omega_x$, интегрируемо в том и только в том случае, если $d\omega \wedge \omega = 0$.*

Доказательство. Это немедленно следует из предложения 28.10 и следующего чисто алгебраического факта, доказательство которого можно спокойно предоставить читателю:

> Пусть ω и λ — линейный функционал и кососимметрическая 2-форма на конечномерном векторном пространстве. Тогда ограничение λ на $\operatorname{Ker} \omega$ равно нулю в том и только том случае, когда $\lambda \wedge \omega = 0$.

□

Наша вторая переформулировка теоремы Фробениуса есть не что иное, как запись ее утверждения в координатах. Именно, пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, на котором задано k-мерное распределение $\{V_p\}$. Уменьшив, если нужно, множество U, можно считать, что все k-мерные подпространства V_x изоморфно проектируются на подпространство, порожденное первыми k координатными векторами. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде произведения $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ и будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^n$ через $(t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_m)$. Тогда k-мерное пространство V_p, где $p = (t, x)$, можно рассмотреть как график линейного отображения из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$ с матрицей f_{ij}, где f_{ij} — функции от $t_1, \ldots, t_k$ и $x_1, \ldots, x_m$. Соответственно, интегральное подмногообразие в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, отвечающее этому распределению, будет (если оно существует, разумеется) графиком функции из (открытого подмножества в) $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$. Если записать эту функцию в виде

$$(t_1, \ldots, t_k) \mapsto (x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_k)),$$

то условие того, что ее график касается распределения, запишется в виде

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = f_{ij}(t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_m). \tag{28.2}$$

Условия (28.2) напоминают неавтономное дифференциальное уравнение (23.3), с той разницей, что «время» стало k-мерным. Прежде чем выписать, исходя из теоремы Фробениуса, условия разрешимости системы (28.2), попробуем понять, как они могли бы выглядеть.

Ясно, что если $(x_1, \ldots, x_m)$ — решение системы (28.2), то как мнимум должно выполняться условие симметрии частных производных: $\frac{\partial}{\partial t_j}(\partial x_i/\partial t_l) = \frac{\partial}{\partial t_l}(\partial x_i/\partial t_j)$. Беря выражения для $(\partial x_i/\partial t_l)$ и $(\partial x_i/\partial t_j)$ из правой части системы (23.3) и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получаем следующее условие:

$$\frac{\partial f_{il}}{\partial t_j} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_\nu} f_{\nu j} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t_l} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_{il}}{\partial x_\nu} f_{\nu l} \tag{28.3}$$

(для всех $i \in [1; m]$ и для всех $j, l \in [1; k]$).

Оказывается, что эти необходимые условия являются и достаточными:

Предложение 28.13 (теорема Фробениуса в координатах). *Пусть на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ задана система уравнений (28.2) (с гладкими правыми частями). Тогда следующие два условия равносильны:*

(1) Для всякой пары $(t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_m) \in U$ существует определенное в окрестности точки $(t_1, \ldots, t_k)$ решение системы (28.2) с началными условиями $x_i(t_1, \ldots, t_k) = x_i$.

(2) Всюду на U выполнены соотношения (28.3).

Доказательство. Нетрудно видеть, что распределение, интегральные многообразия которого являются графиками решений системы (28.2), порождается векторными полями

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial t_1} + f_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_{m1}\frac{\partial}{\partial x_m};\\ v_2 &= \frac{\partial}{\partial t_2} + f_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_{m2}\frac{\partial}{\partial x_m};\\ &\qquad\qquad \dots\\ v_k &= \frac{\partial}{\partial t_k} + f_{1k}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_{mk}\frac{\partial}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Ввиду теоремы Фробениуса условие (1) равносильно тому, что для любых $p, q \in [1;k]$ коммутатор векторных полей v_p и v_q является линейной комбинацией полей $v_1, \dots, v_k$ (с коэффициентами-функциями). Легко видеть, что всякий коммутатор $[v_p, v_q]$ не содержит слагаемым с производными по t_j; с другой стороны, из вида полей v_i ясно, что всякая их линейная комбинация, отличная от тождетсвенного нуля, такие слагаемые содержать обязана. Стало быть, условие интегрируемости принимате в нашем случае совсем простой вид:

$$[v_j, v_l] = 0 \qquad \text{для любых } j, l \in [1;k].$$

Если вычислить «в лоб» эти коммутаторы, то окажется, что условие их равенства нулю идентично условиям (28.3). Не будем лишать читателя удовольствия проделать выкладки самостоятельно. □