Анализ-2000. 3 семестр, листок 2

Этот листок призван научить Вас работать с векторными полями.

1. Пусть X — *связное* гладкое многообразие. Покажите, что для любых двух точек $p, q \in X$ найдется такой диффеоморфизм $\varphi\colon X \to X$, что $\varphi(p) = q$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что всякое связное многообразие X будет *линейно связно,* т. е. для всяких точек $p, q \in X$ найдется такое непрерывное отображение $f\colon [0;1] \to X$, что $f(0) = p$, $f(1) = q$. Этот факт доказывается несложно: можете провести доказательство самостоятельно, но сначала сделайте задачу.

Чтобы сформулировать следующую задачу, нужно ввести некоторые обозначения. Пусть $f\colon X \to Y$ — диффеоморфизм многообразий и v — векторное поле на X. Тогда через f_*v обозначается векторное поле на Y, определенное следующим образом: $(f_*v)_{f(x)} = (Df(x))(v)$. (Кстати, если разрешить отображению f склеивать различные точки, то определить f_*v не получится — подумайте, почему.)

Далее, если G — группа и $g \in G$, то через $T_g\colon G \to G$ обозначается отображение («левый сдвиг»), действующее по правилу $h \mapsto gh$. Если группа G является многообразием, причем групповые операции — гладкие отображения (как известно, такие объекты называются *группами Ли*), то векторное поле v на G называется *(лево)инвариантным,* если $(T_g)_*v = v$ для всех $g \in G$.

Опишите все левоинвариантные векторные поля на следующих группах:

2. $G = \mathbb{R}$ (групповая операция — сложение).

3. $G = \mathbb{R}_+$ (группа положительных чисел, операция — умножение).

4. $G = Gl_n(\mathbb{R})$.

5. $G = SO_n(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathbb{P}^n$ — вещественное n-мерное проективное пространство. Введем обозначения: $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ — множество вещественных $m \times m$-матриц, $\mathrm{Vect}(X)$ — множество векторных полей на многообразии X

6. Постройте нетривиальный гомоморфизм векторных пространств $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{P}^n)$, обладающий тем свойством, что он переводит коммутатор матриц в коммутатор векторных полей (говоря по-ученому, это должен быть гомоморфизм алгебр Ли).

Указание. Функция на $\mathbb{P}^n$ — это то же самое, что функция на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus o$, инвариантная относительно преобразований вида

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (cx_0, \ldots, cx_n).$$

7. Опишите ядро построенного Вами гомоморфизма.

8. Пусть $\mathbb{R}^2$ вложено в $\mathbb{P}^2$ как аффинная плоскость, заданная условием $x_0 \neq 0$, где x_0, x_1, x_2 — однородные координаты. Нарисуйте ограничение на эту аффинную плоскость векторного поля, соответствующего матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Тот же вопрос про матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Нарисуйте фазовые кривые этих векторных полей (точнее, их ограничений на $\mathbb{R}^2$). А может быть, Вам удастся задать эти кривые формулами?