Анализ-2000. 3 семестр, листок 1

Всюду в этом листке слово «гладкий» означает «гладкий класса C^∞».

Введите естественную структуру многообразия на приводимых ниже множествах X. Найдите размерности этих многообразий.

1. $X = SO(n) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — множество ортогональных матриц размера $n \times n$ с действительными элементами и определителем 1. (На самом деле, как известно, $SO(n)$ — группа.)

2. $X = G(n,k)$ — множество k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$. (Это многообразие называется *грассманианом.*)

3. Пусть M — многообразие. $X = TM = \{(x,v) \mid x \in M, v \in T_xM\}$. (Многообразие TX называется *касательным расслоением* многообразия X; введя на TX структуру многообразия, убедитесь, что естественная проекция $p\colon TX \to X$ — гладкое отображение.)

4. $X \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — множество матриц размера $n \times n$ ранга k.

5. Пусть $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $p \in \mathbb{C}^n$, $f(p) = 0$, но не все частные производные $\partial f/\partial x_j$ обращаются в 0 в p. Положим $X = \{x \mid f(x) = 0\} \cap U$, где U — достаточно малая окрестность p.

6. Опишите касательные пространства к $SL(n)$ и $SO(n)$ в точке, соответствующей единичной матрице.

В трех следующих задачах нужно вычислить $D_v(f,U)$ для заданного многообразия, касательного вектора v и ростка заданной функции f в точке $p \in M$.

7. $M = \mathbb{R}P^2$. Пусть $(x_1 : x_2 : x_3)$ — однородные координаты в $\mathbb{R}P^2$. Функция f задается соотношением

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1x_2x_3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}.$$

Точка $p = (0,0,1)$, вектор $v \in T_pM$ задается кривой $\gamma\colon t \mapsto (t : t^2 : (1-t)^3)$.

8. $M = SO(3)$, $f(X) = \mathrm{Tr}\, X$, $p = I$. Вектор $v \in T_pM$ задается следующей кривой γ. Точка из $SO(3)$ определяется однозначно ортогональным репером, пусть $\gamma(t)$ определяется репером, полученным из стандартного координатного репера поворотом на угол t относительно прямой $x = y = z$.

9. $M = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 + x + 1\} \cap V$, V — достаточно малая окрестность $p = (-1,i)$. $f = |x|^2 + |y|^2$, касательный вектор задается кривой γ, где $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $y(t) = i(1+t)$, $x(t)$ — вещественный корень уравнения $x^3 + x + 1 + (1+t)^2 = 0$.

10. Пусть $G(V,k)$ — грассманиан k-мерных подпространств в векторном пространстве V (см. задачу 2), $\alpha \in G(V,k), W_\alpha \in V$ — k-мерное подпространство, соотвествующее точке α. Докажите, что $T_\alpha G(n,k)$ естественно изоморфно $\mathrm{Hom}(W_\alpha, V/W_\alpha)$ (построенный вами изоморфизм не должен зависеть от произвольных выборов, например, от выборов базисов в V или V_α).

11. Рассмотрим гладкое подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ ($\dim M = k$) и точку $p \in M$. Докажите, что T_pM естественно изоморфно множеству $\tilde{T}_p$, определяемому как

$$\tilde{T}_p = \{v \mid \rho(p+tv, M) = o(t)\},$$

где $\rho(x,M) = \inf_{y\in M} |x-y|$.

В трех следующих задачах требуется описать производную отображения многообразий $f\colon X \to Y$ в данной точке $p \in X$.

12. $X = Y = SO(n)$, $f\colon g \to g^{-1}$, p — единичная матрица.

13. Пусть $V_2 \supset V_1$ — векторное пространство и его подпространство, $X = G(V_1,k)$, $Y = G(V_2,k)$, $f\colon X \to Y$ — отображение, ставящее подпространству пространства V_1 его же, рассматривоемое как подпространство в V_2, p — точка, соответствующая подпространству $W \subset V_1$.

14. $X = Y = G(V,k)$, f переводит W в AW, где $A \in GL(V)$.