А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 4

Задача 1. Вычислите гомологии Diff-комплекса Спенсера для алгебр из задач 8 и 9 в Листке 1.

Определение 1. Алгебра A называется *гладкой*, если

1) A есть $\mathbb{Q}$-алгебра.
2) Λ^1 является проективным модулем конечного типа.

Задача 2. Докажите, что если A — гладкая алгебра, то алгебра дифференциальных операторов $\operatorname{Diff}(A)$ мультипликативно порождена дифференцированиями и операторами нулевого порядка.

Задача 3. Покажите, что для гладких алгебр имеют место следующие изоморфизмы A-модулей:

1) $\mathrm{D}_k(P) = \mathrm{D}_k(A) \otimes_A P$.
2) $\mathrm{D}_k(A) = \underbrace{\mathrm{D}_1(A) \wedge \ldots \wedge \mathrm{D}_1(A)}_{k\text{ раз}}$.
3) $\operatorname{Diff}(P) = \operatorname{Diff}(A) \otimes_A P$.

Задача 4. Покажите, что для гладких алгебр имеют место следующие утверждения:

1) Алгебра символов $\operatorname{Smbl} A$ изоморфна симметрической алгебре $\bigoplus_k S^k(\mathrm{D}_1(A))$ модуля $\mathrm{D}_1(A)$, где S^k обозначает k-ю симметрическую степень.
2) Имеет место изоморфизм $\operatorname{Smbl}(A)$-модулей $\operatorname{Smbl} P = \operatorname{Smbl} A \otimes_A P$.

Определение 2. Пусть P — A-модуль. Его модулем *косимволов* порядка k называется ядро проекции $\mathscr{J}^k(P) \to \mathscr{J}^{k-1}(P)$:

$$0 \to \operatorname{Cosmbl}_k P \to \mathscr{J}^k(P) \to \mathscr{J}^{k-1}(P) \to 0.$$

Задача 5. Докажите, что если A — гладкая алгебра, то

1) $\operatorname{Cosmbl}_k P = \operatorname{Cosmbl}_k A \otimes_A P$.
2) $\operatorname{Cosmbl}_k A = S^k(\Lambda^1)$.

Задача 6. Докажите, что Diff-операторы Спенсера согласованы с естественными вложениями $\alpha_k\colon \operatorname{Diff}_k^+ P \to \operatorname{Diff}_{k+1}^+ P$, т. е. коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_i \operatorname{Diff}_k^+ P \arrow[r, "S"] & \mathrm{D}_{i-1} \operatorname{Diff}_{k+1}^+ P \\
\mathrm{D}_i \operatorname{Diff}_{k-1}^+ P \arrow[r, "S"] \arrow[u, "\mathrm{D}_i(\alpha_{k-1})"] & \mathrm{D}_{i-1} \operatorname{Diff}_k^+ P \arrow[u, "\mathrm{D}_{i-1}(\alpha_k)"']
\end{tikzcd}$$

Задача 7. Из задачи 6 следует, что существует комплекс

$$\ldots \to \frac{\mathrm{D}_i \operatorname{Diff}_k^+ P}{\mathrm{D}_i \operatorname{Diff}_{k-1}^+ P} \xrightarrow{\delta_P} \frac{\mathrm{D}_{i-1} \operatorname{Diff}_{k+1}^+ P}{\mathrm{D}_{i-1} \operatorname{Diff}_k^+ P} \to \ldots \tag{1}$$

Пусть A — гладкая алгебра. Покажите, что в этом случае комплекс (1) изоморфен комплексу

$$\ldots \to \mathrm{D}_i \operatorname{Smbl}_k P \xrightarrow{\delta_P} \mathrm{D}_{i-1} \operatorname{Smbl}_{k+1} P \to \ldots, \tag{2}$$

причем дифференциал δ_P действует по правилу

$$\delta_P(X_1 \wedge \ldots \wedge X_i \otimes \sigma \otimes p) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{j-1} \wedge X_{j+1} \wedge \ldots \wedge X_i \otimes X_j \cdot \sigma \otimes p,$$

где $X_1, \ldots, X_i \in \mathrm{D}_1(A)$, $\sigma \in \mathrm{Smbl}_k A$, $p \in P$ (см. задачи 3 и 4).

Определение 3. Комплекс (2) называется *δ-комплексом Спенсера*, а его гомологии — *δ-гомологиями Спенсера* модуля P и обозначаются $H^{\delta}_{i,k}(P)$.

Задача 8. Докажите, что если алгебра A гладкая, то δ-комплексы ацикличны. Получите отсюда ацикличность Diff-комплексов.

Подсказка. Для получения первого результата докажите его сначала в случае, когда Λ^1 — свободный модуль, а затем воспользуйтесь тем, что всякий проективный модуль является прямым слагаемым в свободном. Второй результат вытекает по индукции из первого, если воспользоваться точной последовательностью тройки.

Задача 9. Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant l$. Тогда его Diff-продолжения определяют семейство A-гомоморфизмов $\varphi^k_\Delta\colon \mathrm{Diff}^+_k P \to \mathrm{Diff}^+_{k+l} Q$ (см. Листок 1). Докажите, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{D}_i \,\mathrm{Diff}^+_k P & \xrightarrow{S_P} & \mathrm{D}_{i-1} \,\mathrm{Diff}^+_{k+1} P \\
{\scriptstyle \mathrm{D}_i(\varphi^k_\Delta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}_{i-1}(\varphi^{k+1}_\Delta)} \\
\mathrm{D}_i \,\mathrm{Diff}^+_{k+l} Q & \xrightarrow{S_Q} & \mathrm{D}_{i-1} \,\mathrm{Diff}^+_{k+l+1} Q
\end{array}$$

коммутативны, S_P, S_Q — Diff-операторы Спенсера.

Покажите также, что если A — гладкая алгебра, то коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}_k P & \xrightarrow{\delta_P} & \mathrm{D}_{i-1} \,\mathrm{Smbl}_{k+1} P \\
{\scriptstyle \mathrm{D}_i(\sigma_k(\Delta))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}_{i-1}(\sigma_{k+1}(\Delta))} \\
\mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}_{k+l} Q & \xrightarrow{\delta_Q} & \mathrm{D}_{i-1} \,\mathrm{Smbl}_{k+l+1} Q
\end{array} \qquad (3)$$

где отображения $\sigma_k(\Delta)\colon \mathrm{Smbl}_k(P) \to \mathrm{Smbl}_{k+l}(Q)$ определяются формулой $\sigma_k(\Delta)(s) = \mathrm{Sm}_{k+l}(\Delta \circ \nabla)$ для любого $s = \mathrm{Sm}\,\nabla \in \mathrm{Smbl}_k P$.

Таким образом, с каждым линейным дифференциальным оператором можно связать ядерный и коядерный Diff- и δ-комплексы Спенсера.

Задача 10. Докажите, что если алгебра A гладкая, то гомологии соответствующих ядерных и коядерных комплексов совпадают с точностью до сдвига градуировки.

Определение 4. Гомологии коядерного комплекса, соответствующего диаграмме (3), называются *δ-гомологиями Спенсера оператора* Δ и в члене $\mathrm{coker}\,\mathrm{D}_i(\sigma_k(\Delta))$ обозначаются через $H^{\delta}_{i,k}(\Delta)$.

Задача 11. Введем в A-модулях $\mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}\, P$ структуру $\mathrm{Smbl}(A)$-модулей:

$$(s\nabla)(a_1, \ldots, a_i) = s\nabla(a_1, \ldots, a_i), \qquad s \in \mathrm{Smbl}\, A, \quad \nabla \in \mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}\, P, \quad a_1, \ldots, a_i \in A.$$

Докажите, что

1) отображения $\mathrm{D}_i(\sigma(\Delta))\colon \mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}\, P \to \mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}\, Q$ являются гомоморфизмами $\mathrm{Smbl}(A)$-модулей;
2) для любого $s \in \mathrm{Smbl}\, A$ и $\nabla \in \mathrm{D}_i \,\mathrm{Smbl}\, P$ имеет место равенство

$$\delta_P(s\nabla) = s\delta_P(\nabla).$$

Из сказанного, в частности, следует, что δ-гомологии Спенсера оператора Δ наследуют структуру $\mathrm{Smbl}(A)$-модуля.

З а д а ч а 12 (δ-лемма Пуанкаре). Пользуясь полученными результатами, докажите следующий фундаментальный факт:

Если A — гладкая нётерова алгебра над полем нулевой характеристики и Q — модуль конечного типа, для любого оператора $\Delta\colon P \to Q$ найдется такое число k_0, что $H^{\delta}_{i,k}(\Delta) = 0$ для всех $i \geqslant 0$ и $k \geqslant k_0$.