9. Простые расслоения.

9.1. **Еще о классах Чженя.** Глобальное сечение s расслоения E на многообразии X называется регулярным, если $\operatorname{codim}\{s=0\}=r(E)$.

Теорема 9.1. *Если $s \in \Gamma(X,E)$ — регулярное сечение, то $[\{s=0\}] = \mathrm{c}_r(E)$.*

Доказательство: Воспользуемся теоремой 8.11. Пусть $p : Y \to X$ и $E_i \subset p^*E$ — соответствующие многообразие и фильтрация. Пусть далее $L_i = E_i/E_{i-1}$. Определим последовательность подмногообразий $Y_i \subset Y$ и сечений $s_i \in \Gamma(Y_i, (E_i)_{|Y_i})$ следующим образом. Положим $Y_r = Y$, $s_r = p^*s$. Далее, допустим пара (Y_i, s_i) построена. Пусть $s'_i \in \Gamma(Y_i, (L_i)_{|Y_i})$ — образ сечения s_i. Положим $Y_{i-1} = \{s'_i = 0\} \subset Y_i$. Тогда ограничение $s_{i|Y_{i-1}} \in \Gamma(Y_{i-1}, (E_i)_{|Y_{i-1}})$ при отображении в $\Gamma(Y_i, (L_i)_{|Y_{i-1}})$ переходит в ноль, следовательно оно приходит из некоторого сечения $s_{i-1} \in \Gamma(Y_{i-1}, (E_{i-1})_{|Y_{i-1}})$.

Легко проверить, что $Y_0 = \{p^*s = 0\}$, следовательно $[Y_0] = p^*[\{s=0\}]$. С другой стороны, очевидно что $[Y_{i-1}] = [Y_i]\cdot \mathrm{c}_1(L_i)$, следовательно $[Y_0] = \prod_{i=1}^r \mathrm{c}_1(L_i)$. Однако по формуле Уитни имеем $\mathrm{c}_r(p^*E) = \prod_{i=1}^r \mathrm{c}_1(L_i)$, следовательно $p^*\,\mathrm{c}_r(E) = p^*[\{s=0\}]$ и остается применить тот факт, что p^* является вложением на когомологиях. □

9.2. **Характер Чженя.** Пусть $\mathrm{x}_i(E)$ — корни Чженя расслоения E. Определим характер Чженя расслоения E следующей формулой

$$\operatorname{ch}(E) = \sum_{i=1}^{r} \exp(\mathrm{x}_i(E)),$$

где $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$. Заметим, что корни Чженя лежат во второй градуировочной компоненте кольца когомологий, поэтому выражение $\exp(\mathrm{x}_i(E))$ корректно определено. Более того, ясно, что

$$\operatorname{ch}(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{x}_i(E)^k}{k!}.$$

Суммы k-х степеней корней Чженя будучи симметрическими многочленами от $\mathrm{x}_i(E)$ полиномиально выражаются через элементарные симметрические многочлены и, следовательно лежат в $\mathrm{H}^{2k}(X,\mathbb{Z})$. Значит $\operatorname{ch}(E) \in \mathrm{H}^{\bullet}(X,\mathbb{Q})$. Обозначим через $\operatorname{ch}_i(E)$ компоненту $\operatorname{ch}(E)$ в $\mathrm{H}^{2i}(E)$.

Следующие свойства характера Чженя $\operatorname{ch}(E)$ делают его особенно удобным при вычислениях.

Теорема 9.2. *Характер Чженя одновременно аддитивен и мультипликативен, то есть для всякой точной последовательности векторных расслоений $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ имеем $\operatorname{ch}(E_2) = \operatorname{ch}(E_1) + \operatorname{ch}(E_3)$, а для всякой пары расслоений E и E' имеем $\operatorname{ch}(E \otimes E') = \operatorname{ch}(E)\cdot\operatorname{ch}(E')$.*

Доказательство: Легко следует из принципа расщепления и свойств экспоненты. □

Упражнение 9.3. Докажите, что

$$\begin{array}{rclcrcl} \operatorname{ch}_0(E) &=& r(E), & \quad & \operatorname{ch}_2(E) &=& (\mathrm{c}_1(E)^2 - 2\,\mathrm{c}_2(E))/2, \\ \operatorname{ch}_1(E) &=& \mathrm{c}_1(E), & & \mathrm{c}_2(E) &=& (\operatorname{ch}_1(E) - 2\operatorname{ch}_2(E))/2. \end{array}$$

Аддитивность характера Чженя позволяет определить его не только для векторных расслоений, но я для любых когерентных пучков. А именно, если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, то положим $\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \mathrm{ch}(E_i)$, где

$$0 \to E_m \to E_{m-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

локально свободная резольвента пучка $\mathcal{F}$.

Упражнение 9.4. **(1)** Проверьте, что определение $\mathrm{ch}(\mathcal{F})$ не зависит от выбора локально свободной резольвенты. **(2)** Пусть $i : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ — линейное вложение. Вычислите $\mathrm{ch}(i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(k))$. **(3)** Покажите, что $\mathrm{c}_1(E) = 0$, $\mathrm{c}_2(E) = m$, где E — расслоение, построенное в разделе 4.5.

9.3. **Простые расслоения.** Обозначим $\mathrm{Hom}(E, E)$ через $\mathrm{End}(E)$. Ясно, что $\mathrm{End}(E)$ — кольцо. Тождественный гомоморфизм $\mathrm{id}_E : E \to E$ очевидно является единицей в кольце эндоморфизмов, тем самым $\mathrm{End}(E) \supset \mathbb{C}$ для любого расслоения E.

Определение. Расслоение E называется простым, если оно не имеет нетривиальных эндоморфизмов, то есть если $\mathrm{End}(E) = \mathbb{C}$.

Легко видеть, что

$$\mathrm{End}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{End}(E_1) \oplus \mathrm{End}(E_2) \oplus \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \oplus \mathrm{Hom}(E_2, E_1),$$

следовательно $\dim \mathrm{End}(E_1 \oplus E_2) \geq 2$, тем самым всякое простое расслоение неразложимо. Это дает удобный когомологический критерий неразложимости.

Теорема 9.5. *Расслоение $T_{\mathbb{P}(V)}$ — простое.*

Доказательство: Ясно, что $\mathrm{End}(T) = \mathrm{Hom}(T, T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), \Omega \otimes T)$. Умножая последовательность Эйлера на Ω получаем

$$0 \to \Omega \to V \otimes \Omega(1) \to \Omega \otimes T \to 0.$$

Однако по Упр. 7.8 имеем $H^\bullet(\mathbb{P}(V), \Omega(1)) = 0$, поэтому $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), \Omega \otimes T) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}(V), \Omega)$. С другой стороны, дуализируя последовательность Эйлера получаем

$$0 \to \Omega \to V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0,$$

и так как $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(-1)) = 0$, то $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(V), \Omega) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. Тем самым мы доказали, что $\mathrm{End}(T) = \mathbb{C}$. □

Упражнение 9.6. **(1)** Докажите, что линейное расслоение на связном проективном многообразии просто. **(2)** Докажите, что расслоение E просто тогда и только тогда, когда E^* просто. **(3)** Пусть L — линейное расслоение. Проверьте, что E просто тогда и только тогда, когда $E \otimes L$ просто.

Из Упражнения следует что все подкрутки расслоений T и Ω на проективном пространстве просты. Следующая лемма дает критерий того, что расслоение не является простым.

Лемма 9.7. *Пусть E — раслоение, причем $r(E) \geq 2$. Если $\Gamma(X, E) \neq 0$, $\Gamma(X, E^*) \neq 0$, то E не является простым.*

Доказательство: Ясно, что

$$\Gamma(X,E)=\mathrm{Hom}(\mathcal{O},E), \qquad \Gamma(X,E^*)=\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}).$$

Пусть s, s' — нетривиальные сечения расслоений E и E^*. Тогда композиция $E \xrightarrow{s'} \mathcal{O} \xrightarrow{s} E$ является эндоморфизмом расслоения E, который в слое над общей точкой многообразия X имеет ранг 1, и следовательно не пропорционален тождественному эндоморфизму. □

Из этой леммы легко показать, что расслоение E из раздела 4.5 не является простым. Действительно, пользуясь точной последовательностью (4.9), определяющей расслоение E, получаем $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2,E)\neq 0$. С другой стороны, согласно Упр. 9.4 (3) имеем $\mathrm{c}_1(E)=0$, следовательно $\det E=\mathcal{O}$, значит $E^*\cong E\otimes(\det E)^*\cong E$, то есть $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2,E^*)\neq 0$. Таким образом, условия леммы выполнены, значит E не просто.

Тем самым, расслоение E является примером не простого, но неразложимого расслоения.

Упражнение 9.8. Докажите, что для любых $0\le p\le n$ и $k\in\mathbb{Z}$ расслоение $\Lambda^pT(k)$ просто.

Согласно Упражнению есть довольно много примеров простых расслоений большого ранга. Построение же простых расслоений малого ранга — наоборот, весьма сложная задача. Мы приведем два примера простых расслоений ранга $n-1$ на $\mathbb{P}^n$. Первый пример — расслоение нулевой корреляции — попроще, однако работает только для нечетномерного проективного пространства. Второй пример — так называемый пример Танго — существует уже на любом проективном пространстве.

9.4. **Расслоение нулевой корреляции.** Пусть n — нечетно, а V — $(n+1)$-мерной векторное пространство. Так как V четномерно, то на V существуют невырожденные кососимметрические формы. Выберем одну такую форму $A\in\Lambda^2V^*$. Форма A индуцирует гомоморфизм расслоений $V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{A}V^*\otimes\mathcal{O}$. Из того, что для любого вектора $v\in V$ выполнено $A(v,v)=0$ следует, что композиция

$$\mathcal{O}(-1)\to V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{A}V^*\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}(1)$$

равна нулю. Следовательно A индуцирует морфизм

$$T(-1)=(V\otimes\mathcal{O})/\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}(1).$$

Далее, так как $A: V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{A}V^*\otimes\mathcal{O}$ — изоморфизм, а проекция $V^*\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}(1)$ сюрьективна, то индуцированный морфизм $T(-1)\to\mathcal{O}(1)$ также сюрьективен. Обозначим через N его ядро. По построению N является расслоением ранга $n-1$ на $\mathbb{P}^n$. Расслоение N называется расслоением нулевой корреляции.

Теорема 9.9. *Расслоение нулевой корреляции N является простым расслоением на $\mathbb{P}^n$ с классом Чженя $\mathrm{c}(N)=1+\mathrm{h}^2+\mathrm{h}^4+\dots+\mathrm{h}^{n-1}$.*

Доказательство: Применяя к точной последовательности

$$0\to N\to T(-1)\to\mathcal{O}(1)\to 0 \tag{9.10}$$

функтор $\mathrm{Hom}(N,-)$ получаем точную последовательность

$$0\to\mathrm{Hom}(N,N)\to\mathrm{Hom}(N,T(-1))\to\dots,$$

следовательно $\mathrm{Hom}(N,N) \subset \mathrm{Hom}(N,T(-1))$. Применяя теперь к последовательности (9.10) функтор $\mathrm{Hom}(\,-\,,T(-1))$ получаем

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(1),T(-1)) \to \mathrm{Hom}(T(-1),T(-1)) \to \\ \to \mathrm{Hom}(N,T(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1),T(-1)) \to \dots$$

Применяя к последовательности Эйлера функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(2),\,-\,)$ получаем, что при $n > 1$ $\mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}(1),T(-1)) = \mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}^n,T(-2)) = \mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}(2),T) = 0$, следовательно $\mathrm{Hom}(N,T(-1)) = \mathrm{Hom}(T(-1),T(-1)) = \mathrm{End}(T(-1))$. Однако расслоение $T(-1)$ простое, следовательно $\mathrm{Hom}(N,N) \subset \mathrm{Hom}(N,T(-1)) = \mathbb{C}$, значит N — тоже простое.

Остается вычислить класс Чженя. Для этого сначала из точной последовательности Эйлера, подкрученной на $\mathcal{O}(-1)$ получаем

$$\mathrm{c}(T(-1)) = \mathrm{c}(V \otimes \mathcal{O})/\,\mathrm{c}(\mathcal{O}(-1)) = 1/(1-\mathrm{h}).$$

Затем из точной последовательности (9.10) получаем

$$\mathrm{c}(N) = \mathrm{c}(T(-1))/\,\mathrm{c}(\mathcal{O}(1)) = 1/((1-\mathrm{h})(1+\mathrm{h})) = 1 + \mathrm{h}^2 + \mathrm{h}^4 + \dots + \mathrm{h}^{n-1}\,.$$

□

9.5. **Пример Танго.** Прежде чем приступить непосредственно к конструкции расслоения Танго, докажем две полезные леммы.

Лемма 9.11. *Если E расслоение ранга r на многообразии X размерности n, порожденное глобальными сечениями, то E содержит тривиальное подрасслоение ранга $r-n$.*

Доказательство: Пусть $K = \mathrm{H}^0(X,E)$, $\dim K = m$. Рассмотрим многообразие

$$Y = \{(s,x) \in \mathbb{P}(K) \times X \mid s(x) = 0\} \subset \mathbb{P}(K) \times X.$$

Ясно, что $Y = \mathbb{P}_X(E')$, где $E' = \mathrm{Ker}(K \otimes \mathcal{O}_X \to E)$. Значит

$$\dim Y = \dim X + r(E') - 1 = n + (m-r) - 1.$$

Пусть $p : Y \to \mathbb{P}(K)$ — проекция на $\mathbb{P}(K)$. Тогда

$$\operatorname{codim} p(Y) \ge (m-1) - \dim Y = (m-1) - (n+m-r-1) = r-n.$$

Выберем $(r-n)$-мерное подпространство $W \subset K$, так что $\mathbb{P}(W) \cap p(Y) = \emptyset$. Но тогда композиция $W \otimes \mathcal{O} \to K \otimes \mathcal{O} \to E$ будет вложением расслоений, что и требовалось. □

Лемма 9.12. *Если E расслоение ранга r на проективном n-мерном многообразии X, порожденное глобальными сечениями, и $\mathrm{c}_r(E) = 0$, то E содержит тривиальное подрасслоение ранга 1.*

Доказательство: Согласно лемме 9.11 достаточно рассмотреть случай $r \le n$. Докажем, что расслоение E не может иметь регулярного сечения. Действительно, если бы E имело регулярное сечение s, то по теореме 9.1 мы имели бы $[\{s=0\}] = \mathrm{c}_r(E) = 0$, а класс когомологий непустого подмногообразия в проективном многообразии всегда отличен от нуля.

Воспользуемся обозначениями, введенными в доказательстве леммы 9.11. Рассмотрим отображение $p : Y \to \mathbb{P}(K)$. Допустим p — сюрьективно. Тогда для общего $s \in \mathbb{P}(K)$ имеем

$$\dim\{x \mid s(x) = 0\} = \dim p^{-1}(s) = \dim Y - \dim \mathbb{P}(K) = \\ = (n + m - r - 1) - (m - 1) = n - r,$$

то есть $\{x \mid s(x) = 0\} \subset X$ — непустое подмногообразие коразмерности r. Это означает, что s — регулярное сечение, что противоречит доказанному выше. Таким образом p не сюрьективно. Возьмем теперь произвольное $s \in \mathbb{P}(K) \setminus p(Y)$. Ясно, что такое s задаст вложение расслоений $\mathcal{O} \to E$, что и требовалось. □

Перейдем теперь к построению примера Танго. Рассмотрим внешний квадрат последовательности Эйлера, подкрученной на $\mathcal{O}(-1)$. Это точная последовательность расслоений

$$0 \to T(-2) \to \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O} \to \Lambda^2 T(-2) \to 0. \tag{9.13}$$

Из послеовательности Эйлера, подкрученной на $\mathcal{O}(-2)$ следует, что $\mathrm{c}(T(-2)) = (1 - \mathrm{h})^{n+1}/(1 - 2\,\mathrm{h})$, а из последовательности (9.13) следует

$$\mathrm{c}(\Lambda^2 T(-2)) = 1/\,\mathrm{c}(T(-2)) = (1 - 2\,\mathrm{h})/(1 - \mathrm{h})^{n+1}.$$

Раскладывая знаменатель в степенной ряд легко вычислить

$$\mathrm{c}_n(\Lambda^2 T(-2)) = \binom{2n}{n} - 2\binom{2n-1}{n-1} = 0.$$

Пусть $r = n(n-1)/2 = r(\Lambda^2 T(-2))$. Последовательное применение к расслоению $\Lambda^2 T(-2)$ лемм 9.11 и 9.12, доказывет, что $\Lambda^2 T(-2)$ содержит тривиальное подрасслоение ранга $r - n + 1$. Выбирая такое подрасслоение мы получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}^{\oplus(r-n+1)} \to \Lambda^2 T(-2) \to F \to 0. \tag{9.14}$$

Здесь F — расслоение ранга $n - 1$ с $\mathrm{c}(F) = (1 - 2\,\mathrm{h})/(1 - \mathrm{h})^{n+1}$. Расслоение F называется расслоением Танго.

Теорема 9.15. *Расслоение Танго F является простым расслоением на $\mathbb{P}^n$ с классом Чженя $\mathrm{c}(F) = (1 - 2\,\mathrm{h})/(1 - \mathrm{h})^{n+1}$.*

Доказательство: Класс Чженя мы уже вычислили, поэтому надо доказать только простоту. Применяя $\mathrm{Hom}(-, F)$ к (9.14) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(F, F) \to \mathrm{Hom}(F, \Lambda^2 T(-2)) \to \dots,$$

следовательно $\mathrm{End}(F) \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F)$. Применяя $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), -)$ к (9.14) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), \mathcal{O}^{\oplus(r-n+1)}) \to \mathrm{End}(\Lambda^2 T(-2)) \to \\ \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F) \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda^2 T(-2), \mathcal{O}^{\oplus(r-n+1)}) \to \dots$$

Заметим, что по Упр. 7.8 имеем $\mathrm{Ext}^i(\Lambda^2 T(-2), \mathcal{O}) = \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \Lambda^2 \Omega(2)) = 0$, поэтому $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F) = \mathrm{End}(\Lambda^2 T(-2))$. Остается добавить, что по Упр. 9.8 расслоение $\Lambda^2 T(-2)$ — простое, поэтому

$$\mathrm{End}(F) \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F) = \mathrm{End}(\Lambda^2 T(-2)) = \mathbb{C},$$

то есть $\mathrm{End}(F) = \mathbb{C}$. □