7. Теорема о замене базы.

Пусть $f : X \to Y$. Функтор прямого образа f_* (высшего прямого образа $R^i f_*$) можно воспринимать как взятие послойных глобальных сечений (когомологий). Однако, вообще говоря, неверно, что $(R^i f_*\mathcal{E})_y = \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{E}_{|X_y})$, где $(-)_y$ обозначает геометрический слой пучка в точке $y \in Y$, а $X_y = f^{-1}(y) \subset X$ — слой морфизма f. Однако, при соблюдении некоторых условий это равенство соблюдается. Необходимые условия формултруются в теореме полунепрерывности и теореме о замене базы.

7.1. **Теорема полунепрерывности.**

Определение. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм, а $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$. Пучок $\mathcal{F}$ называется плоским над Y, если $\forall x \in X$ существуют окрестности $x \in U \subset X$ и $f(x) \in U' \subset f(U) \subset Y$, такие что $\mathcal{F}(U)$ является плоским $\mathcal{O}_Y(U')$-модулем.

Определение. Морфизм $f : X \to Y$ называется плоским, если $\mathcal{O}_X$ — плоский пучок над Y.

Упражнение 7.1. **(1)** Докажите, что морфизм f плоский тогда и только тогда когда функтор f^* точен. **(2)** Докажите, что если f — плоский морфизм, то всякий локально свободный пучок на X является плоским над Y. **(3)** Покажите, что открытое вложение является плоским морфизмом, а замкнутое вложение не является. **(4)** Покажите, что проекция $Y \times Z \to Y$ является плоским морфизмом. **(5)** Проверьте, что композиция плоских морфизмов — плоский морфизм.

Определение плоского пучка и морфизма несколько ненаглядно и негеометрично. Однако существует наглядное и геометрическое достаточное условие плоскости, которого будет выполняться во всех необходимых нам примерах.

Теорема 7.2. *Допустим $f : X \to Y$ — морфизм гладких многообразий, причем для любой точки $x \in X$ дифференциал $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ — сюрьективен. Тогда морфизм f плоский.*

Пусть $f : X \to Y$ и $u : Y' \to Y$ — произвольные морфизмы. Многообразие

$$X \times_Y Y' = \{(x, y') \in X \times Y' \mid f(x) = u(y')\}$$

называется расслоенным произведением многообразий X и Y' над Y.

Теорема 7.3 (Плоская замена базы). *Пусть $f : X \to Y$ — произвольный морфизм, а $u : Y' \to Y$ — плоский морфизм. Пусть $X' = X \times_Y Y'$ и обозначим индуцированные проекции $X' \to Y'$ и $X' \to X$ через g и v. Тогда для любого пучка $\mathcal{F}$ на X имеем функториальный изоморфизм*

$$(R^i g_*) v^* \mathcal{F} \cong u^* (R^i f_*) \mathcal{F}.$$

Доказательство: Выберем аффинные подмножества $U' \subset Y'$ и $u(U') \subset U \subset Y$, так чтобы $\mathcal{O}_{Y'}(U')$ был плоским $\mathcal{O}_Y(U)$-модулем. Пусть $V = f^{-1}(U)$ и $V' = g^{-1}(U') = v^{-1}(V) = V \times_U U'$. Тогда по 6.9 (5)

$$\Gamma(U', (R^i g_*) v^* \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(V', v^* \mathcal{F}),$$
$$\Gamma(U', u^* (R^i f_*) \mathcal{F}) = \Gamma(U, R^i f_* \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') = \mathrm{H}^i(V, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U').$$

Таким образом, нам надо доказать, что

$$\mathrm{H}^i(V', v^* \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(V, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U').$$

Воспользуемся для этого комплексом Чеха. Выберем открытое аффинное покрытие $V = \bigcup V_j$. Тогда $V'_j = v^{-1}(V_j) = V_j \times_U U'$ — аффинное покрытие V'. Заметим, что

$$(v^*(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}}))(V') = (\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_{X'}(V') = (\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U'),$$

причем легко видеть, что

$$\mathcal{F}(V_{i_0} \cap \dots \cap V_{i_p}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') == v^*\mathcal{F}(V'_{i_0} \cap \dots \cap V'_{i_p}),$$

значит

$$(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') = (\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{v^*\mathcal{F}})(V')$$

Остается сказать, что $\mathcal{O}_{Y'}(U')$ является плоским $\mathcal{O}_Y(U)$-модулем, поэтому когомологии левой части равенства совпадают с когомологиями комплекса $(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V)$, умноженными на $\mathcal{O}_{Y'}(U')$, то есть с $\mathrm{H}^i(V,\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U')$, в то вермя как когомологии правой части равенства совпадают с $\mathrm{H}^i(V', v^*\mathcal{F})$ что и требовалось доказать. $\square$

Определение. Функция $\phi : Y \to \mathbb{Z}$ называется полунепрерывной сверху, если $\forall s \in \mathbb{Z}$ множество $\{y \in Y \mid \phi(y) \geq s\}$ замкнуто (по Зарисскому).

Теорема 7.4 (Теорема полунепрерывности)**.** *Пусть f — проективный морфизм, а $\mathcal{F}$ — пучок плоский над Y. Тогда функция*

$$\mathrm{h}^i_{\mathcal{F}}(y) = \dim \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y})$$

полунепрерывна сверху.

Из теоремы полунепрерывности легко вывести вторую часть теоремы 5.8.

Доказательство теоремы 5.8 (2): Нам надо доказать замкнутость множества $M_a = \{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E(L) > a\}$. Для каждого $1 \leq k \leq r$ обозначим через $a_{[1,k]}$ набор $(a_1, \dots, a_k)$ и через $a_{[1,k]} - 1$ набор $(a_1, \dots, a_k - 1)$. Рассмотрим также множества

$$\begin{aligned} M_k(a_{[1,k]}) &= \{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E_{[1,k]}(L) > a_{[1,k]}\}, \\ M'_k(a_{[1,k]}) &= \{L \in \mathbb{G}_n \mid \mathrm{h}^0(L, E_{|L}(-a_k - 1)) > \textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(a_i - a_k)\}. \end{aligned}$$

Из теоремы полунепрерывности легко следует, что $M'_k(a_{[1,k]})$ — замкнуто для любого k. Кроме того, ясно что $M_1(a_1) = M'_1(a_1)$, следовательно $M_1(a_1)$ тоже замкнуто. Заметим, наконец, что

$$\begin{aligned} &M_k(a_{[1,k]}) = \{L \in \mathbb{G}_n \mid (a^E_{[1,k]}(L)) > a_{[1,k]}\} = \\ &= \left\{L \;\middle|\; a^E_{[1,k-1]}(L) > a_{[1,k-1]}\right\} \cup \left\{L \;\middle|\; a^E_{[1,k-1]}(L) = a_{[1,k-1]} \text{ и } a^E_k(L) > a_k\right\} = \\ &= M_{k-1}(a_{[1,k-1]}) \cup \Big(\big(M_{k-1}(a_{[1,k-1]} - 1) \setminus M_{k-1}(a_{[1,k-1]})\big) \cap M'_k(a_{[1,k]})\Big) = \\ &\qquad = M_{k-1}(a_{[1,k-1]}) \cup (M_{k-1}(a_{[1,k-1]} - 1) \cap M'_k(a_{[1,k]})). \end{aligned}$$

откуда легко выводится замкнутость всех $M_k(a_{[1,k]})$ индукцией по k. Остается заметить, что $M_a = M_r(a_{[1,r]})$. $\square$

Теорема 7.5 (Теорема о замене базы)**.** *Пусть f — проективный морфизм, а $\mathcal{F}$ — пучок плоский над Y, Y — гладкое многообразие, а функция $\mathrm{h}^i_{\mathcal{F}}(y)$ постоянна на Y. Тогда пучок $R^if_*\mathcal{F}$ локально свободен и имеем изоморфизм*

$$(R^if_*\mathcal{F})_y \cong \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y}).$$

7.2. **Раздутие точки.** Пусть Y — гладкое многообразие с точкой $y \in Y$. Раздутием многообразия Y в точке y называется гладкое многообразие $\widetilde{Y}_y$ с отображением $\sigma : \widetilde{Y}_y \to Y$, таким что

$$\sigma^{-1}(Y - y) = Y - y, \qquad \sigma^{-1}(y) = \mathbb{P}(T_y Y).$$

Докажем существование раздутий. Заметим, во-первых, что достаточно уметь строить раздутие в сколь угодно малой окрестности точки y. Действительно, если $\widetilde{U}_y$ — раздутие окрестности U, то отображение σ позволяет склеить $\widetilde{Y}_y = \widetilde{U}_y \bigsqcup_{U-y}(Y - y)$. Выберем теперь такую окрестность U точки y, что U изоморфно открытому подмножеству аффинного пространства $V = \mathbb{A}^n$ (это не всегда возможно в топологии Зарисского, но заведомо возможно в аналитической топологии; соответственно приводимая ниже конструкция раздутия дает вообще говоря не алгебраическое, а лишь комплексно-аналитическое многообразие, однако можно доказать, что это многообразие все-таки является алгебраическим). Построим теперь раздутие $\widetilde{U}_y$ явным образом. Ясно, что мы можем выбрать вложение $U \subset V$, так что $y = \{0\} \in V$. Рассмотрим замкнутое подмножество

$$X = \{(u, L) \in U \times \mathbb{P}(V) \mid u \in L \subset V\} \subset U \times \mathbb{P}(V).$$

Пусть $\sigma(u, L) = u$ и $p(x, L) = L$. Рассматривая проекцию $p : X \to \mathbb{P}(V)$ легко доказать гладкость X. Далее, ясно, что $\sigma^{-1}(U - \{0\}) = U - \{0\}$, $\sigma^{-1}(\{0\}) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(T_y U)$, что и требовалось.

Далее, не сложно доказать, что построенное многообразие $\widetilde{Y}_y$ не зависит от выбора окрестности Y и что любое многообразие, являющееся раздутием Y в y изоморфно построенному выше.

Упражнение 7.6. Проверьте, что раздутие $\sigma : \widetilde{Y}_y \to Y$ является проективным, но не плоским морфизмом.

Теорема 7.7. *Пусть $\sigma : \widetilde{Y}_y \to Y$ — раздутие точки. Тогда*

$$R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_y} = \begin{cases} \mathcal{O}_Y, & \textit{при } i = 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Выберем окрестность $y \in U$ как и при построении раздутия. По теореме о плоской замене базы имеем

$$(R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_y})_{|(Y-y)} = R^i \sigma_*(\mathcal{O}_{\sigma^{-1}(Y-y)}), \quad (R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_y})_{|U} = R^i \sigma_*(\mathcal{O}_{\widetilde{U}_y}),$$

причем так как σ дает изоморфизм $\sigma^{-1}(Y - y) \to Y - y$, то

$$R^i \sigma_*(\mathcal{O}_{\sigma^{-1}(Y-y)}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{Y-y}, & \text{при } i = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

поэтому достаточно проверить утверждение для U. Для этого воспользуемся явной конструкцией раздутия $\widetilde{U}_y$. Напомним, что если $U \subset V = \mathbb{A}^n$ и $y = \{0\} \in V$, то $\widetilde{U}_y = X$, где

$$X = \{(u, L) \in U \times \mathbb{P}(V) \mid u \in L \subset V\} \subset U \times \mathbb{P}(V).$$

Обозначим через i вложение $X \to U \times \mathbb{P}(V)$ и через q проекцию $U \times \mathbb{P}(V) \to U$. Ясно, что $\sigma = q \cdot i$, причем так как i — замкнутое вложение, то $R^i \sigma_* \mathcal{O}_X = R^i q_*(i_* \mathcal{O}_X)$.

Применяя к точной последовательности Эйлера на $\mathbb{P}(V)$ функтор p^*, получим точную последовательность на $U \times \mathbb{P}(V)$

$$0 \to p^*\mathcal{O}(-1) \to V \otimes \mathcal{O} \to p^*T(-1) \to 0.$$

Кроме того, вложение $U \subset V$ задает сечение $\mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}$. Компонируя его с проекцией $V \otimes \mathcal{O} \to p^*T(-1)$, получаем сечение $s \in \Gamma(U \times \mathbb{P}(V), p^*T(-1))$. Заметим, что сечение s обращается в нуль в точке (u, L) тогда и только тогда, когда $u \in L \subset V$. Другими словами, множество нулей сечения s совпадает с подмногообразием $X \subset U \times \mathbb{P}(V)$. Кроме того, $\operatorname{codim} X = \dim \mathbb{P}(V) = r(p^*T(-1))$, поэтому комплекс Кошуля (см. Упр. 3.13) является резольвентой пучка $i_*\mathcal{O}_X$, то есть точна следующая последовательность пучков на $U \times \mathbb{P}(V)$

$$\dots \to \Lambda^2(p^*\Omega(1)) \to p^*\Omega(1) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_X \to 0,$$

где $\Omega := T^*$ — пучок дифференциалов. Применяя функтор q_* и пользуясь теоремой о плоской замене базы в применении к декартову квадрату

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}(V) \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ U & \xrightarrow{p'} & \mathrm{pt} \end{array}$$

получаем $\quad R^i q_* \Lambda^k(p^*\Omega(1)) = R^i q_*(p^*\Lambda^k(\Omega(1))) =$

$$= (p')^*(R^i q'_* \Lambda^k(\Omega(1))) = \mathrm{H}^i(\mathbb{P}(V), \Lambda^k(\Omega(1))) \otimes \mathcal{O}_U.$$

Упражнение 7.8. Докажите, что при $k > 0$ имеем $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}(V), \Lambda^k(\Omega(1))) = 0$ для всех i.

Из Упражнения следует, что

$$R^i\sigma_*\mathcal{O}_X = R^i q_* i_* \mathcal{O}_X = \begin{cases} \mathcal{O}_U, & \text{при } i = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

что и требовалось доказать. □

7.3. **Стандартная диаграмма.** Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим многообразие частичных флагов $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(1, 2; V) = \{(x, l) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}_n \mid x \in l\}$. Обозначим через p и q проекции $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^n$ и $\mathbb{F}_n \to \mathbb{G}_n$ соответственно. Для всякой точки $x \in \mathbb{P}^n$ обозначим

$$\mathbb{F}(x) = p^{-1}(x) \subset \mathbb{F}_n, \qquad \mathbb{G}(x) = q(\mathbb{F}(x)) \subset \mathbb{G}_n.$$

Легко показать, что q индуцирует изоморфизм

$$q : \mathbb{F}(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}(x) = \mathbb{P}(V/x) = \mathbb{P}^{n-1}.$$

Аналогично, для всякой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ положим $\widetilde{L} = q^{-1}(\{L\})$. Ясно, что p индуцирует изоморфизм $p : \widetilde{L} \to L \subset \mathbb{P}^n$. Таким образом, p является расслоением со слоем $\mathbb{P}^{n-1}$, а q является расслоением со слоем $\mathbb{P}^1$.

Наконец, пусть

$$\mathbb{B}(x) = q^{-1}(\mathbb{G}(x)) = \{(y, l) \in \mathbb{F}_n \mid x, y \in l\}.$$

Обозначим ограничение проекции q на $\mathbb{B}(x)$ через f, а ограничение проекции p на $\mathbb{B}(x)$ через σ.

Упражнение 7.9. Покажите, что f — расслоение над $\mathbb{G}(x) = \mathbb{P}^{n-1}$ со слоем $\mathbb{P}^1$, а σ — раздутие $\mathbb{P}^n$ в точке x.

Набор построенных многообразий и отображений называется стандартной диаграммой. Стандартная диаграмма оказывается весьма полезной, если мы хотим получить какую-либо информацию о расслоении на $\mathbb{P}^n$, основываясь на информации о его ограничении на прямые в $\mathbb{P}^n$.

Теорема 7.10. *Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^n$, а $x \in \mathbb{P}^n$. Допустим E тривиально ограничивается на всякую прямую, проходящую через точку x. Тогда E тривиально.*

Доказательство: Рассмотрим расслоение $\sigma^* E$ на $\mathbb{B}(x)$. Ясно, что для всякой точки $L \in \mathbb{G}(x)$ имеем

$$(\sigma^* E)_{|f^{-1}(\{L\})} = (\sigma^* E)_{|\widetilde{L}} = p^*(E_{|L}) = p^*(\mathcal{O}_L^{\oplus r}) = \mathcal{O}_{\widetilde{L}}^{\oplus r},$$

значит мы можем использовать теорему о замене базы по отношению к расслоению $\sigma^* E$ и морфизму f. Из теоремы следует, что $F = f_* \sigma^* E$ является расслоением на $\mathbb{G}(x)$, причем $F_{|\{L\}} = \mathrm{H}^0(f^{-1}(\{L\}), \sigma^* E)$. Отсюда следует, что каноническое отображение $f^* F \to \sigma^* E$ является изоморфизмом на каждой прямой $\widetilde{L}$, то есть $\sigma^* E \cong f^* F$.

Заметим теперь, что проекция $f : \mathbb{B}(x) \to \mathbb{G}(x)$ обладает сечением $s : \mathbb{G}(x) \to \mathbb{B}(x)$, $s(\{L\}) = (x, L) \in \mathbb{B}(x)$. Заметим далее, что $f \cdot s = \mathrm{id}$, а $\sigma \cdot s$ — проекция $\mathbb{G}(x) \to \{x\}$. Отсюда следует, что

$$F \cong \mathrm{id}^* F \cong s^* f^* F \cong s^* \sigma^* E \cong (\sigma \cdot s)^* E = (E_{|x}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}(x)} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}(x)}^{\oplus r}.$$

Далее, пользуясь формулой проекции и теоремой 7.7, получаем

$$E \cong E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong E \otimes \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)} \cong \sigma_* \sigma^* E \cong \sigma_* f^* F \cong \sigma_* f^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}(x)}^{\oplus r} \cong \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r},$$

что и требовалось доказать. □

Из доказанной теоремы вытекает полезное следствие.

Теорема 7.11. *Если расслоение E на $\mathbb{P}^n$ порождается глобальными сечениями и $\deg(E) = 0$, то E тривиально.*

Доказательство: Так как E порождается глобальными сечениями, то ограничение $E_{|L}$ на любую прямую тоже порождается глобальными сечениями, значит тип расщепления $a^E(L)$ удовлетворяет условию $a_i^E(L) \geq 0$. С другой стороны, $\sum_{i=1}^r a_i^E(L) = \deg(E) = 0$, значит $a_i^E(L) = 0$ для всех i. Другими словами, ограничение E на любую прямую тривиально. Значит выполнены условия теоремы 7.10, следовательно E тривиально. □