АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ В ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧАХ

спецкурс А.Б. Скопенкова

Аннотация. Для многообразий важнейшие методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных и сложных результатов. На спецкурсе изучаются основные методы алгебраической и дифференциальной топологии, полезнейшие для их приложений. Например, пересечение в гомологиях, характеристические классы, векторные расслоения и конструкция Понтрягина. В частности, будут даны наброски доказательств следующих ярких результатов (и их обобщений):

• невложимость n-мерного проективного пространства в $(2n-1)$-мерное евклидово для n, являющегося степенью двойки (Уитни);

• существование нестандартной семимерной сферы (Милнор);

• существование трехмерного узла в шестимерном пространстве (Хефлигер).

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого и максимизируется научное содержание курса, и курс становится доступным для начинающих. Для его изучения достаточно знакомства с основами алгебраической топологии многообразий — например, в объеме глав 1-6, 8 и 10 из книги [S] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, МЦНМО, 2020.

При этом для работы с новыми понятиями потребуется (и будет развиваться) математическая культура. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнеее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции).

Программа (несколько простых пунктов или несколько пунктов со звездочкой будут пропущены по желанию и возможностям участников курса)

1. Три классические проблемы топологии: гомеоморфизма, вложимости и заузливания. Некоторые яркие результаты. [S, 11.1, 12.1]

2. Пересечение в гомологиях многообразий. Двойственности Пуанкаре и Лефшеца (простая и сложная части). [S, 10.8, 10.9, 11.2]

3. Эйлерова характеристика — инвариант кобордизма. Сигнатура — инвариант ориентированного кобордизма. Неограничивающие многообразия. [S, 10.4, 11.1, 11.4]

4. Теоремы Рохлина и Милнора-Кервера-Хирцебруха о делимости сигнатуры. Применение: инвариант Рохлина трехмерных гомологических сфер и инвариант Милнора семимерных гомотопических сфер. Нестандартная сфера Милнора. [S, 11.4, 11.9]

5. Конструкция Понтрягина: оснащенные многообразия и их кобордизмы. [S, 8.8, 14.6]

6. Заузленная сфера Хефлигера. [Haefliger, 1962, Ann. of Math.]

7. Геометрическое определение характеристических классов Штифеля-Уитни как препятствий к существованию системы векторных полей. [S, 9]

8. Нормальные классы Уитни как препятствия к погружаемости и вложимости многообразий. Непогружаемость и невложимость проективных пространств. [S, 12.2-12.5]

9. * Классификация маломерных многообразий с точностью до кобордизма (формулировка). Числа Штифеля-Уитни и Понтрягина — инварианты кобордизма. Теорема Тома о классификации многообразий с точностью до кобордизма (формулировка). Теорема Хирцебруха о сигнатуре; набросок вывода из теоремы Тома. [S, 16]

10.* Инварианты гомотопических сфер. [S, 16.6]

11.* Изотопия. Инвариант Ву вложений графов в плоскость и в пространство.