

Алгебраическая теория чисел: введение

М.Ю. Розенблюм

Курс планируется как годовой. В осеннем семестре предполагается изучить разделы 1-5.

Полезно, чтобы слушатели уже имели некоторые сведения о группах, коммутативных кольцах, идеалах, гомоморфизмах и были знакомы с основами линейной алгебры.

1. p -адические числа

Абсолютные значения. Теорема Островского. Топологическая и алгебраическая конструкции p -адических чисел. Лемма Гензеля. Отображение Тейхмюллера. p -адический логарифм. Структура мультипликативной группы.

2. Обзор теории Галуа.

Алгебраические расширения. Гомоморфизмы. Алгебраическое замыкание. Нормальные и сепарабельные расширения. Группа Галуа. Основная теорема. Норма и след. Структура конечных полей. Расширения Куммера и Артина-Шрейера. Решение уравнений в радикалах.

3. Поля алгебраических чисел

Дедекиндовы кольца. Локализация. Расширения. Решетки и двойственность. Разложение простых идеалов. Дифферента и дискриминант. Вычисление кольца целых.

4. Локальные поля

Инерция и ветвление. Лемма Краснера. Алгебраическая замкнутость поля \mathbb{C}_p . Степенные ряды в \mathbb{C}_p . Многоугольник Ньютона. Экспонента Артина-Хассе.

5. Метрическая топология

Адели и иделы. Аппроксимационная теорема. Теорема Дирихле о единицах. Конечность числа классов идеалов. Модули и конгруэнц-подгруппы.

6. Дзета-функция

Конгруэнц - дзета-функция. Дзета-функция Римана. Числа Бернулли. Дзета-функция Дедекинда. Функциональное уравнение и формула вычета. Метод Тейта - Ивасава. L -функции Дирихле. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.

7. Модулярные формы

Комплексные торы. Модулярная группа. Конгруэнц-подгруппы. Модулярные кривые. Ряды Эйзенштейна и параболические формы. Скалярное произведение. Операторы Гекке и инволюции. Преобразование Меллина и L -функции. Функциональное уравнение. Действие операторов Гекке на гомологиях и модулярный символ.

8. Эллиптические кривые

Обобщенная форма Вейерштрасса. Закон сложения. Инвариантный дифференциал. Эллиптические функции. Изогении и точки конечного порядка. Эллиптические кривые над конечными полями. Эллиптические кривые над локальными полями. Минимальное уравнение. Редукция. Униформизация Тэйта. Эллиптические кривые над полями алгебраических чисел. Теорема Морделла. Дзета-функция. Униформизация эллиптических кривых модулярными формами.