Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Вычислить
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}\,.$$
(*М. Панов*)

2. Назовем *кубоидом* выпуклый многогранник в трехмерном пространстве, комбинаторно эквивалентный кубу (т. е. существует взаимно однозначное соответствие между их вершиами, ребрами и гранями, сохраняющее примыкание). Рассмотрим для каждой грани точку пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Эти 6 точек являются вершинами некторого октаэдра.

   Какие значения может принимать отношение объема этого октаэдра к объему исходного кубоида? (*Р. М. Травкин*)

3. $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ — два разбиения единичного квадрата на непересекающиеся измеримые множества. S_{ij} — пересечение множеств A_i и B_j, $|G|$ — площадь множества G. Докажите неравенство:
$$\sum_{ij} |S_{ij}| \cdot \ln(|S_{ij}|) \geqslant \sum_i |A_i| \cdot \ln(|A_i|) + \sum_j |B_j| \cdot \ln(|B_j|).$$
(*К. Шеннон*)

4. d-мерная ладья бьет по прямым вдоль осей координат.

   а) Какое максимальное число ладей можно расставить в d-мерном кубе $n \times \cdots \times n$ так, чтобы они не били друг друга?

Назовем расстановку ладей *полной*, если в ней максимально возможное число ладей.

б) Слоем трехмерного куба $n \times n \times n$ назовем квадрат $n \times n$, состоящий из клеток с одинаковой третьей координатой. Пусть первые k слоев заполнены полно (т.е. в них стоят nk ладьей). Докажите, что эту расстановку можно продолжить до полной расстановки всего куба. Верно ли аналогичное утверждение для четырехмерного куба?

в) В трехмерном кубе $n \times n \times n$ расставили ладьи и зафиксировали угловую клетку. Рассматриваются подкубы ($k \times k \times k$, для каждого k один подкуб, всего n подкубов) с этой угловой клеткой. В каждом таком подкубе оказывается некоторое число ладей из нашей расстановки, и в некоторых подкубах расстановка оказывается полной (т.е. стоит максимально возможное число для данного k).

Каково максимальное число таких подкубов с полной расстановкой? Аналогичный вопрос для d-мерного куба. (*А. Я. Канель*)

5. На плоскости отметили n непересекающихся отрезков и $n+2$ точки, которые не лежат на этих отрезках. Докажите, что найдутся две точки, которые «видят» друг друга (т.е. соединяющий их отрезок не пересекает отмеченные отрезки). (*М. Концевич*)

6. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n. Ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$? (*Э. Туркевич*)

7. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 2n]$, таких, что $F(0) = 0$ и на любом интервале $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, производная равна ± 1.

   а) Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $f(2n) = 0$?

   b) Как подсчитать число функций, таких, что $-n/k < f(x) < n/k$?
   (*А. Я. Белов*)

8. В пространстве даны две гладкие кривые C_1 и C_2. Рассматривается множество S прямых $l = (A, B) : A \in C_1, B \in C_2$. Докажите, что если некоторая кривая C_3, непересекающаяся с $C_1 \cup C_2$, пересекает каждую прямую из S, то обе кривые C_1 и C_2 лежат в одной плоскости. (*A.Kanel-Belov, J.Kaminsky, M.Taicher*)

9. Можно ли множество рациональных точек единичной сферы раскрасить в два цвета (черный и белый) так, что если три точки отвечают концам трех ортогональных векторов, то одна из них будет черной, а две другие — белыми? (*Д. Муштари*)

10. Пусть A, B — целочисленные матрицы. Известно, что $\det(A) = 1$, $\det(B) \neq 0$. Докажите, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $B^{-1}A^nB$ — целочисленная матрица. (*Фольклор*)

11. Дано $2n + 1$ грузов попарно различной массы и чашечные весы без гирь. Докажите, что за $100n$ взвешиваний можно найти *медиану* (т. е. средний по массе груз). (*Фольклор*)

12. Двое по очереди на доске пишут многочлены от n переменных. Запрещается писать многочлен R, если:

    (1) R представим в виде суммы кратных ранее написанных многочленов, т. е. $R = \sum_{i=1}^{k} R_iQ_i$ при некоторых Q_i;

    (2) 1 представляется в виде суммы кратных написанных многочленов и кратного R: $1 = \sum_{i=1}^{k} R_iQ_i + RQ$ при некоторых Q_i, Q.

    Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

    а) Докажите, что игра заканчивается.

    б) Кто выигрывает при правильной игре? (*А. Белов, Г. Челноков*)

Уточнение условия

Условие задачи 7.10 задачника «Математического просвещения» было сформулировано неточно. Приводим уточнение формулировки.

> а) В пространстве даны две гладкие поверхности S_1 и S_2, заданные уравнениями $f = 0$ и $f = 1$ и гомеоморфные плоскости. Известно, что любую точку поверхности S_1 можно соединить с некоторой точкой поверхности S_2 такой ломаной длины не более 1, которая находится в области $0 < f < 1$ (за исключением начальной и конечной точек). Можно ли установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками S_1 и S_2 так, чтобы соответствующие точки находились бы на расстоянии меньше 10^6?
>
> б) Аналогичный вопрос для плоскости (S_0 и S_1 — линии уровня функции, гомеоморфные прямой).