Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

М. Б. Скопенков*

Цель данной статьи — подробно познакомить читателей с красивой идеей академика В. И. Арнольда о связи теоремы о высотах треугольника с тождеством Якоби [1]. Основное отличие нашей статьи от статьи В. И. Арнольда в том, что мы имеем дело в основном со сферической геометрией, а не с геометрией Лобачевского, и это делает основную идею более понятной. В частности, большая часть нашей статьи доступна школьнику-старшекласснику. При этом нужно иметь в виду, что можно единообразно доказать теорему о высотах в сферической геометрии и в геометрии Лобачевского.

Мы расскажем о двух интересных применениях идеи В. И. Арнольда — двух обобщениях теоремы о высотах треугольника.

Первый результат — это обобщение теоремы о высотах на криволинейные треугольники. *Криволинейным треугольником* мы называем фигуру, составленную из трех дуг окружностей a, b и c (рис. 1a). *Высотой* h_a криволинейного треугольника мы называем окружность, проходящую через *обе* точки пересечения окружностей b и c, перпендикулярную окружности a (смотри рисунок 1b). Аналогично определяются две другие высоты h_b и h_c. (Мы исключаем из рассмотрения криволинейные треугольники с двумя прямыми углами.)

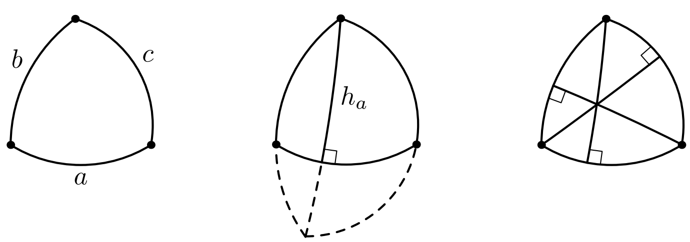

Рис. 1.

*Автор частично поддержан грантами РФФИ №05-01-00993 и №06-01-72551.

Теорема о высотах криволинейного треугольника[1]. Если две высоты криволинейного треугольника пересекаются в некоторой точке, то и третья высота проходит через эту точку (см. рис. 1c).

Эта теорема переходит в классическую теорему о высотах треугольника, если радиусы окружностей a, b и c увеличивать неограниченно.

Второй результат — это обобщение теоремы о высотах на случай трехмерного пространства:

Теорема Петерсена – Морли. Пусть a, b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c. Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c''. Тогда три прямые a'', b'' и c'' имеют один общий перпендикуляр (т. е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

Эта теорема превращается в теорему о высотах треугольника, если прямые a, b и c лежат в одной плоскости. Теорема Петерсена – Морли — трудная теорема стереометрии, и одна из наших основных целей — рассказать ее доказательство.

Идея В. И. Арнольда наиболее явно проявляется в сферической геометрии, поэтому мы начнем со знакомства с *геометрией на сфере*.

Не следует думать, что геометрия на сфере сложнее геометрии на плоскости. Напротив, оказывается, во многом эта геометрия устроена проще! Многие известные теоремы, например, теоремы синусов и косинусов, были открыты в сферической геометрии раньше, чем в планиметрии (поскольку они были необходимы для приложений в астрономии).

Сюжет первый. Сферическая геометрия и векторное произведение

Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного пространства. Назовем *большой окружностью* (*сферической прямой*) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O.

Каждому ненулевому вектору пространства можно сопоставить два объекта сферической геометрии: точку на сфере и большую окружность.

[1] Эта элегантная формулировка теоремы о высотах треугольника в неевклидовой геометрии была найдена участником Летней конференции Турнира Городов А. Мафусаловым.

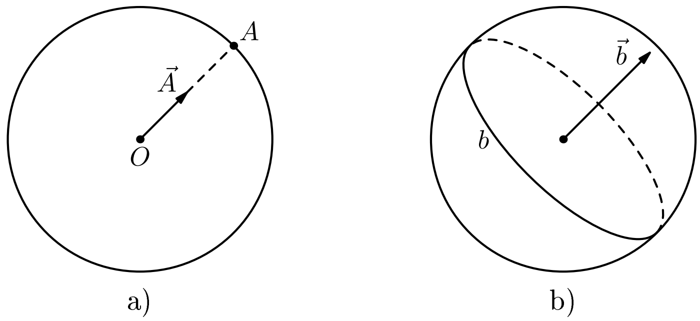

Рис. 2.

А именно, вектору можно сопоставить точку пересечения сферы с лучом, исходящим из точки O в направлении данного вектора (рис. 2a), и можно сопоставить сечение сферы плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной этому вектору (рис. 2b).

Будем обозначать точки на сфере большими буквами, сферические прямые — маленькими. Точку (сферическую прямую), соответствующую данному вектору, будем обозначать той же буквой, что и сам вектор, только без значка вектора. Например, если $\vec{A}$ и $\vec{b}$ — два вектора, то A обозначает точку, соответствующую вектору $\vec{A}$, а b обозначает сферическую прямую, соответствующую вектору $\vec{b}$.

Исследуем простейшие свойства построенных соответствий.

Утверждение 1. (Рисунок 3a) Если векторы $\vec{A}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то точка A лежит на сферической прямой b.

Доказательство. Действительно, проведем из точки O луч в направлении вектора $\vec{A}$. По нашему определению, точка A — точка пересечения нашего луча со сферой. Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{b}$. По нашему определению, сферическая прямая b — сечение сферы нашей плоскостью. Поскольку $\vec{A}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то построенный луч лежит в нашей плоскости. Поэтому точка A лежит на сферической прямой прямой b, что и требовалось.

Будем обозначать через $[\vec{A}, \vec{B}]$ векторное произведение двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Напомним, что *векторное произведение* двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — это вектор, перпендикулярный данным векторам и равный по модулю площади натянутого на них параллелограмма. Направление этого вектора определяется правилом правой руки.

Утверждение 2. (Рисунок 3b) Вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B.

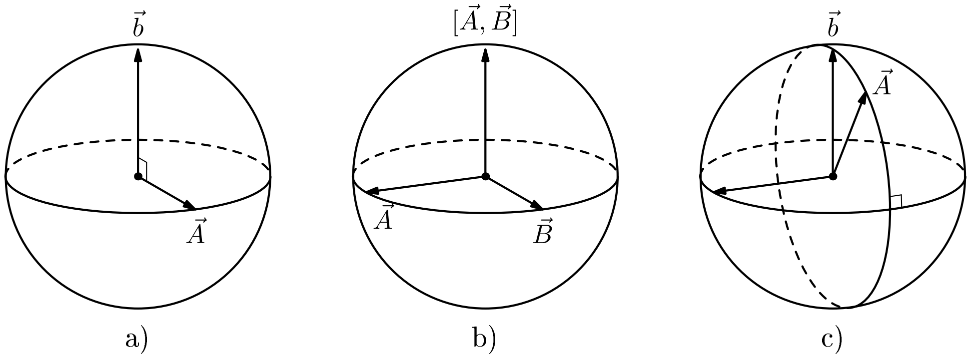

Рис. 3.

Действительно, вектор $[\vec{A},\vec{B}]$ перпендикулярен обоим векторам $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Поэтому согласно утверждению 1 обе точки A и B лежат на сферической прямой, соответствующей вектору $[\vec{A},\vec{B}]$.

Утверждение 3. (Рисунок 3c) Вектор $[\vec{A},\vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую b.

Действительно, пусть вектору $[\vec{A},\vec{b}]$ соответствует сферическая прямая c. Поскольку этот вектор перпендикулярен вектору $\vec{A}$, то согласно утверждению 1 сферическая прямая c проходит через точку A. А поскольку он перпендикулярен $\vec{b}$, то сферическая прямая c перпендикулярна сферической прямой b. Иными словами, c — перпендикуляр, опущенный из точки A на сферическую прямую b.

Утверждение 4. (Рисунок 4) Если $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, то три сферические прямые a, b и c пересекаются в одной точке.

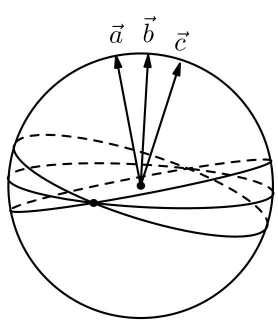

Рис. 4.

Доказательство. Из условия $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны некоторой плоскости. Рассмотрим вектор $\vec{P}$, перпендикулярный этой плоскости. Применяя утверждение 1, получим, что точка P лежит на всех трех сферических прямых a, b и c.

Теперь мы готовы к выводу более содержательных результатов. Для любых трех векторов трехмерного пространства выполняется *тождество Якоби*:

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]+[\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]]+[\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]]=0.$$

Это тождество позволяет без всяких усилий получить следующую неочевидную теорему:

Теорема 5. Высоты треугольника на сфере пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — три вектора, соответствующие вершинам треугольника на сфере. Согласно утверждению 2 вектор $[\vec{A},\vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B. Тогда согласно утверждению 3 вектор $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]$ соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую BC, т. е. сферической прямой, содержащей высоту h_A треугольника ABC. Аналогично векторы $[\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]]$ и $[\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]]$ соответствуют сферическим прямым, содержащим две другие высоты треугольника ABC. Поэтому тождество Якоби, ввиду утверждения 4, означает, что построенные три прямые пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Пользуясь этим методом, геометрические теоремы можно буквально «считывать» с алгебраических тождеств — в конце статьи мы приводим несколько задач на эту тему.

Легко видеть, что теорема 5 является частным случаем теоремы о высотах криволинейного треугольника (на сфере). Ее можно доказать и проще: при центральной проекции из центра сферы на плоскость, касающуюся сферы в одной из вершин треугольника, теорема 5 переходит в обычную теорему о высотах.

Тождество Якоби позволяет также доказать следующее ослабление теоремы Петерсена – Морли: *прямые a'', b'' и c'' параллельны одной плоскости.* Для доказательства достаточно записать тождество Якоби для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, параллельных исходным прямым a, b и c.

Вот еще одно элементарное применение тождества Якоби: для любых четырех точек O, A, B и C на плоскости выполняется равенство $\overrightarrow{OA}\cdot S(_\triangle BOC)+$ $+\overrightarrow{OB}\cdot S(_\triangle COA)+\overrightarrow{OC}\cdot S(_\triangle AOB)=0$.

О применении тождества Якоби в теории узлов можно прочитать в [4].

Следующие два сюжета не опираются друг на друга и их можно читать независимо. Сюжет второй посвящен доказательству теоремы о высотах криволинейного треугольника, а сюжет третий — доказательству теоремы Петерсена – Морли.

Сюжет второй. Окружности

Назовем *окружностью* сечение сферы произвольной плоскостью, не обязательно проходящей через центр сферы. Точка на сфере и сферическая прямая — частные случаи окружности.

Окружность на сфере можно задать уравнением

$$(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha,$$

где $\vec{A}$ — фиксированный вектор, α — фиксированное число, а $\vec{X}$ — радиус-вектор переменной точки на сфере. Это уравнение задает сечение сферы плоскостью, перпендикулярной вектору $\vec{A}$ и находящейся на расстоянии $\alpha/|\vec{A}|$ от начала координат.

В частности, если $\alpha = 0$, то наша окружность является большой окружностью сферы, а если $\alpha = |\vec{A}|$, то она вырождается в точку.

Следующее свойство уравнений окружностей почти очевидно:

Утверждение 6. Если окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ пересекаются, то окружность $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{X}) = \alpha + \beta$ проходит через обе их точки пересечения.

Действительно, пусть $\vec{X}$ — радиус-вектор одной из точек пересечения первых двух окружностей. Тогда по определению $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$. Складывая эти равенства, получим $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{X}) = \alpha + \beta$, то есть третья окружность тоже проходит через точку X.

На языке наших уравнений легко выразить также условие перпендикулярности двух окружностей:

Утверждение 7. Окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B}) = 0$.

Доказательство. Предположим, что окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ перпендикулярны. Пусть $\vec{X}$ — радиус-вектор одной из точек пересечения этих окружностей. Тогда векторы $[\vec{A}, \vec{X}]$ и $[\vec{X}, \vec{B}]$ параллельны касательным к окружностям A и B в этой точке. Рассмотрим тождество

$$([\vec{A}, \vec{X}], [\vec{X}, \vec{B}]) = (\vec{A}, \vec{X})(\vec{B}, \vec{X}) - (\vec{A}, \vec{B})(\vec{X}, \vec{X}).$$

Его левая часть равна нулю в силу перпендикулярности окружностей A и B, а правая часть в точности равна $\alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B})$. Тем самым в одну сторону нужное утверждение доказано. Обратное утверждение доказывается от противного.

Это утверждение является мотивировкой для следующего определения.

Рассмотрим множество пар вида $(\alpha; \vec{A})$, где α — действительное число, а $\vec{A}$ — вектор трехмерного пространства. *Скалярным произведением* двух таких пар $\mathcal{A} = (\alpha; \vec{A})$ и $\mathcal{B} = (\beta; \vec{B})$ назовем число $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B})$.

Определим сложение пар и умножение пары на число покомпонентно: $\mathcal{A} + \mathcal{B} := (\alpha + \beta; \vec{A} + \vec{B})$, $\lambda\mathcal{A} := (\lambda\alpha; \lambda\vec{A})$.

Будем обозначать окружность, задаваемую уравнением $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$, той же буквой, что и саму пару $(\alpha; \vec{A})$.

Оказывается, введенных операций достаточно, чтобы получить уравнение высоты криволинейного треугольника исходя из уравнений его сторон:

Утверждение 8. Паре $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ соответствует высота h_A криволинейного треугольника, составленного из дуг окружностей $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

Доказательство. Поскольку пара $\mathcal{H} = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является линейной комбинацией пар $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, то согласно утверждению 6 соответствующая ей окружность $\mathcal{H}$ проходит через обе точки пересечения окружностей $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. А поскольку

$$(\mathcal{H}, \mathcal{A}) = (\mathcal{B}, \mathcal{A})(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - (\mathcal{C}, \mathcal{A})(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0,$$

то согласно утверждению 7 окружность $\mathcal{H}$ перпендикулярна окружности $\mathcal{A}$. То есть, по определению, $\mathcal{H}$ — высота сферического треугольника, составленного из дуг окружностей $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

В случае, когда $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — большие окружности сферы, это утверждение согласуется с формулой из предыдущего сюжета, ввиду замечательного тождества $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$.

Теперь мы готовы доказать теорему о высотах криволинейного треугольника на сфере. Действительно, пусть наш треугольник составлен из дуг окружностей $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, не обязательно больших. Согласно утверждению 8 паре $\mathcal{H}_A = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и двум аналогично определяемым парам $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_C$ соответствуют высоты этого треугольника. Предположим, что $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ пересекаются. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{H}_C = -\mathcal{H}_A - \mathcal{H}_B$, поэтому ввиду утверждения 6 высота $\mathcal{H}_C$ проходит через точку пересечения высот $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$, что и требовалось.

Теорема о высотах криволинейного треугольника на плоскости легко сводится к теореме о высотах криволинейного треугольника на сфере, если радиус сферы увеличивать неограниченно.

Определенный нами объект (множество пар с операциями сложения, умножения на число и скалярного произведения) называется пространством Минковского и играет фундаментальную роль в теории относительности [2].

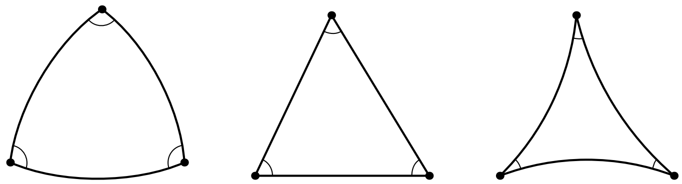

Рис. 5.

В действительности для доказательства теоремы о высотах криволинейного треугольника достаточно результатов только первого сюжета.

А именно, рассмотрим следующие 3 случая:

Случай 1. Сумма углов криволинейного треугольника больше 2π (рисунок 5а). В этом случае наша теорема сводится к теореме 5. Для этого нужно сделать стереографическую проекцию на сферу подходящего радиуса, касающуюся плоскости в радикальном центре трех окружностей a, b и c.

Случай 2. Сумма углов криволинейного треугольника равна 2π (рисунок 5б). Легко видеть, что тогда окружности a, b и c пересекаются в одной точке. Наша теорема сводится к обычной теореме о высотах с помощью инверсии с центром в этой точке.

Случай 3. Сумма углов криволинейного треугольника меньше 2π (рисунок 5в). Тогда существует окружность d, перпендикулярная всем трем окружностям a, b и c. Наша теорема есть в точности теорема о высотах в геометрии Лобачевского, сформулированная в модели Пуанкаре (в которой d — абсолют). Теорему о высотах в геометрии Лобачевского можно получить аналогично первому сюжету, исходя из тождества Якоби для векторного произведения $[\vec{A},\vec{B}] := *(\vec{A}\wedge\vec{B})$ в псевдоевклидовом пространстве [1].

Сюжет третий. Прямые в пространстве

Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u,x]=v.$$

Здесь u и v — фиксированные векторы, а x — радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u=AB$, $v=[OA,OB]$.

Вектор u для данной прямой имеет простой геометрический смысл — это направляющий вектор данной прямой. Отсюда, в частности, следует, что если прямая $[u,x]=v$ перпендикулярна прямой $[u',x]=v'$, то $(u,u')=0$.

Оказывается, условие пересечения прямых тоже легко можно выразить на языке их уравнений:

Утверждение 9. Прямые $[u,x]=v$ и $[u',x]=v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u,v')+(v,u')=0$.

Доказательство. Докажем утверждение в одну сторону. Пусть наши прямые пересекаются в некоторой точке с радиус-вектором x. Тогда $(u,v')+(v,u')=(u,[u',x])+([u,x],u')=0$ в силу известного тождества.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть $(u,v')+(v,u')=0$. Выберем произвольную точку x на первой прямой и точку x' на второй. Тогда $(u,v')+(v,u')=(u,[u',x'])+([u,x],u')=(u,[u',x'-x])$ в силу все того же тождества. Значит, $(u,[u',x'-x])=0$. Это означает, что $x'-x = \lambda u+\lambda' u'$ для некоторых чисел λ и λ'. Тогда $x+\lambda u = x'-\lambda' u'$ — искомая точка пересечения наших прямых.

Наша основная цель — понять, как исходя из уравнений двух прямых получить уравнение их общего перпендикуляра. Иными словами, нам нужно найти такие векторы u'' и v'', чтобы прямая $[u'',x]=v''$ пересекала прямые $[u,x]=v$ и $[u',x]=v'$ и была перпендикулярна им.

Ясно, что прямая с направляющим вектором $[u,u']$ перпендикулярна обеим нашим прямым. Положим $u''=[u,u']$.

Оказывается, для вектора v'' тоже есть простая формула. В качестве вектора v'' нужно взять проекцию вектора $[u,v']+[v,u']$ на плоскость, перпендикулярную вектору u''. То, что прямая $[u'',x]=v''$ пересекает прямые $[u,x]=v$ и $[u',x]=v'$, проверяется с помощью утверждения 9.

Эта формула является мотивировкой для следующего определения.

Пусть $(u;v)$ и $(u';v')$ — две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u'';v'')$, где $u''=[u,u']$ и $v''=[u,v']+[v,u']$.

Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u;v)+(u';v') = (u+u';v+v')$.

Замечание. Одной из геометрических интерпретаций таких пар являются *скользящие векторы* [3].

Мы имеем естественное отображение из множества пар векторов в множество прямых в пространстве: паре $(u;v)$ ставится в соответствие прямая $[u,x]=\operatorname{pr} v$, где $\operatorname{pr} v$ — проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u. Фактически мы показали, что это отображение переводит произведение в общий перпендикуляр (строго говоря, только в случае, если $u\perp v$ и $u'\perp v'$, но к нему все сводится — при замене $v\to v+\lambda u$, $v'\to v'+\lambda' u'$ происходит замена $v''\to v''+(\lambda+\lambda')u$).

Приведем одно простое применение нашего соответствия: прямая $[u+u',x]=v+v'$ пересекает общий перпендикуляр к прямым $[u,x]=v$ и $[u',x]=v'$ (проверяется с помощью утверждения 9).

С помощью нашего соответствия получается также теорема Петерсена – Морли. Действительно, произведение пар векторов удовлетворяет тождеству Якоби. Если посмотреть, что оно означает геометрически, получим теорему Петерсена – Морли.

Это доказательство можно пересказать на более научном языке. Дело в том, что тот объект, который мы определили (пары векторов с операцией умножения) — это в действительности алгебра Ли группы движений трехмерного пространства. По теореме Шаля любое собственное движение трехмерного пространства — это винтовое движение вдоль некоторой прямой либо параллельный перенос. Сопоставим каждому бесконечно малому движению, то есть элементу алгебры Ли группы движений трехмерного пространства, такую прямую. Ключевой факт: коммутатор при таком соответствии переходит в общий перпендикуляр. Это следует из того, что прямая, соответствующая коммутатору, должна быть неподвижна при любой симметрии, меняющей местами прямые, соответствующие исходным элементам. Теперь теорема Петерсена – Морли непосредственно получается из тождества Якоби.

В таком виде доказательство проходит без существенных изменений и для пространства Лобачевского — теорема Петерсена – Морли оказывается справедливой и в неевклидовом пространстве [5].

Задачи

Во всех задачах предполагается, что $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — *единичные* векторы, идущие в вершины сферического треугольника ABC из центра сферы. Через AB, BC и CA обозначаются *длины* сторон треугольника, то есть длины дуг соответствующих больших окружностей.

1. Рассматривая вектор $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, докажите, что медианы треугольника на сфере пересекаются в одной точке.

2. С помощью тождества $([\vec{A},\vec{B}],[\vec{B},\vec{C}]) = (\vec{A},\vec{B})(\vec{B},\vec{C}) - (\vec{A},\vec{C})(\vec{B},\vec{B})$ получите *сферическую теорему косинусов*:

$$\sin AB \sin BC \cos \angle ABC = \cos AB \cos BC - \cos AC.$$

3. С помощью тождества $([\vec{A},\vec{B}],\vec{C}) = ([\vec{B},\vec{C}],\vec{A}) = ([\vec{C},\vec{A}],\vec{B})$ докажите *сферическую теорему синусов*:

$$\frac{\sin AB}{\sin \angle ACB} = \frac{\sin BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sin CA}{\sin \angle CBA}\,.$$

4. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисах криволинейного треугольника на плоскости.

Благодарности. Автор благодарен В. Прасолову за помощь в подготовке данной статьи, В. Арнольду за важные замечания, В. Дремову, которому принадлежит множество ценных идей, реализованных в данном цикле задач, а также А. Канелю, О. Карпенкову, И. Лосеву и А. Скопенкову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. *Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости* // Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005. С. 93–99.

[2] Берже М. *Геометрия*. М: Мир, 1984.

[3] Соловьев Ю. П., Сосинский А. Б. *Геометрия скользящих векторов* // Квант №8, 1985. С. 9–17.

[4] Conant J., Schneiderman R., Teichner P. *Jacobi identities in low-dimensional topology*. To appear in Compositio Mathematica, 2007.

[5] Fenchel W. *Elementary geometry in hyperbolic space*. WdeG, 1989.

М. Б. Скопенков, механико-математический факультет МГУ

Издательство МЦНМО

А. К. Звонкин. **Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников.** 2006. 240 с.

Автор этой книги — профессиональный математик — рассказывает о своем опыте занятий математикой с дошкольниками. Жанр книги смешанный: дневниковые записи перемежаются рассуждениями о математике или о психологии, наблюдения за детьми и за их реакцией на происходящее служат источником для новых задач, а те в свою очередь позволяют углубить и развить как бы намеченные пунктиром идеи. Книга будет интересна родителям дошкольников (а также их бабушкам и дедушкам), воспитателям детских садов, учителям начальных классов, и вообще всем тем, кого интересует процесс развития детского интеллекта.

А. М. Райгородский. **Проблема Борсука.** Б-ка «Математическое просвещение», вып. 33. 2006. 56 с.

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной на Малом мехмате МГУ для школьников 9–11 классов. В ней рассказывается об одной из знаменитых задач комбинаторной геометрии — гипотезе Борсука. Многие главы снабжены задачами. Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей. От читателя потребуется знание элементарных понятий комбинаторики, а, кроме того, будет полезным (но не обязательным) знакомство с аналитической геометрией и началами анализа.

В. А. Успенский. **Четыре алгоритмических лица случайности.** 2006. 48 с.

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором в летней школе «Современная математика». Она посвящена формализации такого интуитивно ясного термина, как «случайность». В брошюре рассматривается четыре разных подхода к этому понятию, основанных на характерных свойствах случайных последовательностей: частотоустойчивость, хаотичность, типичность и непредсказуемость. Брошюра адресована старшим школьникам и студентам младших курсов. Предварительных знаний от читателя не потребуется, однако будет полезным знакомство с теорией алгоритмов, а для чтения последней главы — с основными понятиями теории вероятностей.

А. Г. Хованский. **Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности.** 2006. 96 с.

В брошюре изложена теория Галуа и ее применения к вопросам о разрешимости алгебраических уравнений. Рассматривается аналогия между основной теоремой теории Галуа и классификацией накрытий над топологическими пространствами. В последней части приведено геометрическое описание конечных алгебраических расширений поля мероморфных функций на римановых поверхностях. Для студентов, аспирантов и специалистов в области математики.

А. Шень. **О «математической строгости» и школьном курсе математики.** 2006. 72 с.

Математики традиционно (и не без оснований) гордятся «математической строгостью» — точностью и полнотой доказательств теорем на основе определений и аксиом. Насколько этот идеал достигнут в школьном курсе математики? Можно ли его достигнуть? И нужно ли к этому стремиться? В брошюре разбираются несколько деликатных вопросов школьного курса математики (в чём проблема, как ее пытаются решить в школьных учебниках и как ее можно было бы решать). Изложение рассчитано на любознательных школьников, квалифицированных учителей и добросовестных экзаменаторов.