

Об обучении математике

У. Тёрстон

Нынешнее состояние преподавания математики является неприемлемым. Впрочем, хотя это обстоятельство волнует многих, реальные перемены происходят медленно.

Лица, принимающие стратегические решения, зачастую не понимают суть математики и математического образования. В школах, относящихся к разным округам, «реформы» зачастую проводятся в противоположных направлениях. Это свидетельствует о том, что нам нужно не только признать существование и важность проблемы, но и вникнуть в нее.

Я верю, что наша страна сможет эти проблемы решить: трудности, вызванные недостаточным пониманием, не являются неразрешимыми. У нас наличествует и политическая воля, и ресурсы, и интеллект; чего не хватает, так это верного направления.

1. Симптомы

Многое свидетельствует о том, что с обучением математике не все ладно. Число старшекурсников, специализирующихся по математике, сейчас примерно в два раза меньше, чем 15 лет тому назад.¹⁾ Количество американских аспирантов более чем вдвое уменьшилось по сравнению с тем, что было 15 лет назад (хотя частично это уменьшение было компенсировано за счет аспирантов-иностранцев). Стандартные тесты свидетельствуют, что наши учащиеся на всех уровнях демонстрируют более низкий уровень знаний и умений, чем в других промышленно развитых странах.

Когда взрослый американец видит математика, обычно он испытывает смущение. Извиняющимся тоном он рассказывает о последнем из изучавшихся им математических курсов (как правило, это тот самый курс, на котором ваш собеседник и утратил понимание предмета).

Многие компании отмечают, что серьезным недостатком их работников является незнание математики. С развитием технологий отпала

W. Thurston. Mathematical education // Notices of the AMS. Vol. 37, 1990. P. 844–850. Публикуется с любезного разрешения AMS и автора текста. Перевод С.М. Львовского.

¹⁾Статья была впервые опубликована в 1990 году — *прим. пер.*

необходимость в знании математики на некоторых рабочих местах (например, математика не нужна кассиру, пробивающему гамбургеры), но при этом пропали и многие рабочие места, не требующие квалификации (например, рабочий у конвейера), и появилось множество других, на которых необходима серьезная математическая подготовка.

Студенты, изучающие математические курсы в колледже, не идут на контакт. Они боятся рассуждать и боятся придумывать что-либо самостоятельно. Если походить по урокам в разных классах, то будет заметно, как резко падает с возрастом естественность и живость. Создается впечатление, что в школе вытравливается любопытство и естественный интерес маленьких детей к математике.

В большинстве учебных заведений стало труднее, чем двадцать лет назад, добиваться того, чтобы учащиеся делали домашние задания или занимались вне стен классной комнаты.

Даже у тех учащихся колледжей, что успешно освоили математическую программу старших классов, включая начала анализа, познания в математике очень узки.

2. РАЗОБЩЕННОСТЬ

Серьезным источником трудностей и препятствием к их разрешению является разобщенность, царящая в обширном сообществе людей, связанных с математическим образованием, — от детского сада и до аспирантуры. В частности, очень мало обмениваются информацией преподаватели математики в колледже и в старших классах средней школы. Уровень взаимопонимания между лицами, занимающимися реформой школьной программы и программы колледжа, также оставляет желать лучшего. Эта разобщенность проистекает отчасти из того, что существует несколько различных математических ассоциаций, как-то: Американское математическое общество (AMS), представляющее в первую очередь тех, кто занимается научными исследованиями; Математическая ассоциация Америки (MAA), представляющая в первую очередь преподавателей на младших курсах высших учебных заведений; Национальный совет учителей математики (NCTM), представляющий наиболее увлеченных своим делом школьных учителей математики. Кроме того, есть организации, представляющие двухлетние колледжи, прикладную математику, статистику, исследование операций, а также информатику.

Списки членов AMS и MAA перекрываются не более чем на треть. Большинство членов AMS даже и не подозревают о существовании NCTM. И наоборот, очень немногие члены NCTM знают про AMS. Очень немногие математики, занимающиеся научной работой, общаются со школьными учителями вне связи со школьными успехами своих детей. Во многих

университетах хорошо поставлены и исследовательская работа, и подготовка учителей, но даже и в них научные работники к подготовке учителей отношения не имеют.

Еще более серьезная разобщенность возникает из-за того, что реальные решения, касающиеся школьного образования, принимаются во многих разных школьных округах, а решения, касающиеся университетского образования, принимаются на многих разных факультетах. Многие размышляют об имеющихся проблемах и пытаются их самостоятельно решить; многие из этих попыток вполне успешны. К сожалению, при этом совершенно недостаточны координация и обмен наработанным опытом.

3. МАТЕМАТИКА — НАУКА ПРОТЯЖЕННАЯ

Одной из черт науки математики, которую необходимо учитывать при ее преподавании, является ее «протяженность», то есть длина цепочек связей, в которых каждая очередная концепция основывается на предыдущих. Математическое рассуждение может быть очень ясным и бесспорным, и как только некоторый факт установлен, на нем можно основываться. Это означает, что можно строить концептуальные структуры, являющиеся одновременно весьма протяженными, очень надежными и чрезвычайно мощными.

Структура математики похожа не на дерево, а на строительные леса со множеством подпорок. Как только леса смонтированы, нетрудно надстроить и следующий уровень, но невозможно смонтировать очередной уровень, пока нет всех предыдущих.

Трудности возникают тогда, когда учащиеся, занимающиеся каким-либо курсом, находятся на разных этапах освоения предыдущего материала. Кроме того, они обычно стесняются говорить, что из этого предыдущего материала они знают, а что — нет. Например, многие из изучающих начала анализа не умеют правильно складывать дроби, по крайней мере в символическом виде; типичная ошибка:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d},$$

что гораздо проще, чем

$$\frac{ad+cb}{bd}.$$

И при этом учащимся неприятно сознавать, что они нетверды в сложении дробей, так что они не торопятся это признать и задать (хотя бы самому себе) вопрос, как оно устроено.

Сложение дробей — очень скучное дело для того, кто с ним уже знаком, но умение это делать необходимо при изучении алгебры, а алгебра

необходима для анализа. Если поговорить с таким учащимся, то нетрудно выяснить, какие части общей картины нуждаются в уточнении, и поправить дело в рамках индивидуальной работы. Трудно угадать, на каком уровне вести преподавание, чтобы оно было и понятно, и интересно группе учащихся с различной подготовкой.

4. МАТЕМАТИКА — НАУКА ШИРОКАЯ

Математика — наука не только протяженная, но и очень широкая. Многие из ее разделов никак не обсуждаются в рамках стандартной программы, завершающейся началами анализа, а у тех разделов, которые в программе присутствуют, есть множество необсуждаемых подразделов.

В поколении моих родителей (сороковые годы) первым математическим курсом в колледже был курс алгебры. Вскоре после этого место первого математического курса заняли начала анализа, которыми в настоящее время, как правило, владеют лучшие ученики старших классов школы. Сейчас начала анализа большей частью перешли в программы средней школы в богатых школьных округах, так что большинство студентов, специализирующихся в математике и естественных науках в наших лучших университетах, уже проходили курс начал анализа до поступления в университет. В Принстоне, например, две трети поступающих имеют в своем багаже хотя бы семестровый курс анализа.

Это ускорение темпа прохождения материала имело и свои минусы: оно сопровождалось тенденцией к отсечению «побочных» тем. Например, когда я учился в школе, то, как правило, наряду с планиметрией изучалась также стереометрия и сферическая геометрия. Ныне эти темы уже давно исключены. Набор знаний по математике у типичного учащегося напоминает высокую, но шаткую башню: она достигла максимальной высоты, при которой фундамент еще может ее держать, а расти дальше она не может.

Две эти тенденции (удлинение и сужение школьной программы по математике) были подстегнуты все более широким использованием стандартизированных тестов. Тесты предназначены охватить темы, входящие в самые ходовые программы: если какую-то тему изучает только половина учащихся, то нечестно включать ее в стандартизированный тест. Это не столь плохо, если тесты используются исключительно для беспристрастной *оценки*. На самом деле, однако, высокие результаты часто рассматриваются как *самоцель*. Депутаты, пресса и родители давят на руководителей органов народного образования и школьные советы, органы народного образования и школьные советы давят на директоров, директора давят на учителей, учителя — на учеников — и все ради того, чтобы показать более высокие результаты тестов. Печальным следствием этого

является то, что многие математические курсы специально разрабатываются ради того, чтобы показать высокие результаты в том или ином тесте.

Никто не диагностирует воспаление легких с помощью одного только градусника, и никто не пытается лечить эту болезнь, предлагая пациенту пожевать льдинку. Подобного подхода мы должны придерживаться и при оценке роли тестирования в обучении математике.

Долгосрочным целям математического образования лучше бы способствовало, если бы меньше внимания уделялось объему стандартной программы, если бы программа была более диверсифицирована за счет включения тем, для изучения которых нужно меньше предварительных знаний. Определенные тенденции в этом направлении имеются (например, включение курсов по конечной математике и теории вероятностей), но тут есть много места и для дальнейшей работы.

5. МАТЕМАТИКА БЛИЗКА К ИНТУИЦИИ И РЕАЛЬНОСТИ

Обычно учащиеся теряют ощущение связи математики с реальностью и интуицией. Их учителя, начиная с детского сада, как правило, чувствуют себя очень неуютно, как только им предлагают сойти с проторенной дорожки. У маленьких детей есть множество оригинальных подходов к математическим вопросам, но учителя, как правило, нестандартные подходы не поощряют: отчасти потому, что понять то, что ребенок думает или пытается сказать, трудно, и у учителя это не выходит, а отчасти потому, что учитель считает неправильным применять нестандартный метод или давать нестандартное объяснение.

К тому времени, когда учащийся оказывается в колледже, он уже приучен не пытаться думать самостоятельно и не говорить вслух, о чем он думает. Он просто старается понять, какие стандартные процедуры ему надо выучить. Стоит в процессе занятия хоть немного отойти от программы курса или текста учебника, как обязательно найдется кто-нибудь, кто спросит, будет ли этот материал на экзамене.

Пока математика не имеет реальной связи с людьми, люди вряд ли будут думать о ней или пользоваться ею после завершения курса.

6. ОПЕРЕЖЕНИЕ ПРОГРАММЫ И ОЛИМПИАДЫ

Наряду с тенденцией уделять особое внимание тестам пришла и мода на ускоренное освоение программы. Для способного ученика не очень сложно освоить программу по математике гораздо быстрее, чем предусмотрено.

С этим ускорением связано несколько проблем. Часто те, кто усваивают программу с опережением, имеют пробелы в подготовке, которые

проявляются только позднее. К этому моменту учащемуся может быть стыдно признать наличие пробела, и он пытается имитировать понимание. Это, как правило, приводит к катастрофическим последствиям.

Другая беда состоит в том, что опережающие программу учащиеся начинают считать, что главное — не качество обучения и мышления: главное — опережать своих ровесников. Поскольку у учащегося впереди целая жизнь, постольку этот подход является близоруким. Когда такому студенту исполнится 25–30 лет, оценивать его будут не по тому, насколько он успел забежать вперед, а по качеству его работы. Часто такие ученики бывают серьезно разочарованы, когда оказывается, что их талантливые, но не забегавшие вперед соученики с ними сравнялись и они уже не выделяются на фоне многих других. В богатых школьных округах проблему зачастую усугубляют и родители, стремящиеся к тому, чтобы их дети максимально быстро прошли школьную программу — до того, как они действительно к этому готовы.

Третья сложность, связанная с опережением программы, связана с социальной адаптацией. Часто учащийся, который моложе своих одноклассников, способен освоить программу, но с трудом вписывается в их коллектив.

С тенденцией к опережающему усвоению программы связана и популярная тенденция рассматривать математику как спортивное состязание. Существует множество команд старшеклассников, участвующих в математических соревнованиях: команды из различных школ собираются вместе, и им выдается несколько задач, на решение которых отводится около часа.

Проводятся также математические олимпиады на уровне отдельных штатов, всей страны, а также международные. Тем, кто на них успешно выступает, эти олимпиады приносят радость; для таких учащихся они и интересны, и полезны с образовательной точки зрения. Есть, однако, и другая сторона медали: олимпиады служат поддержанию того мнения, что либо у человека есть «хорошие математические гены», либо их нет. Олимпиады развивают нацеленность на скорость решения в ущерб глубине размышлений. На олимпиадах основную роль играют задачи, представляющие собой загадки, которые решаются с помощью искусственного приема, а вовсе не более реалистичные задачи, в которых важны систематические и упорные размышления.

Такой подход отваживает от математики многих учащихся, которые не настолько быстро думают или хуже натренированы, но которые при этом могли бы хорошо решать задачи, будь у них время на их продумывание. Некоторые из лучших олимпиадников действительно становятся хорошими математиками, но многие из лучших математиков олимпиадными успехами не блистали. Скорость мышления в математике

полезна, но это лишь одно из качеств, полезных математику. Тем, кто математическими исследованиями заниматься не станет, необходимые для участия в математической олимпиаде навыки нужны еще меньше.

Математические олимпиады немного похожи на состязания по знанию орфографии. Есть некоторая связь между письмом без орфографических ошибок и умением хорошо писать, но совсем не обязательно, что ученик, лучше всех в штате знающий орфографию, обладает писательским талантом, и некоторые талантливые писатели пишут с ошибками. Если бы было принято путать писательские умения с умением грамотно писать, то у многих людей, которые могли бы стать писателями, отпала бы охота пробовать себя на этом поприще.

Я полагаю, что для решения этих проблем следует выстроить систему, основанную на том, что математика широка, с тем чтобы более продвинутые учащиеся имели возможность прорабатывать материал более глубоко, заглядывая и в соседние темы, и не торопиться обгонять своих сверстников.

7. ТАЙНА И ОВЛАДЕНИЕ

Математики обладает поразительной сжимаемостью. Вы можете долго мучиться, пытаясь несколькими способами и шаг за шагом понять какую-то идею или конструкцию, но как только подлинное понимание достигнуто и вы можете посмотреть на то, чем вы овладели, как на единое целое, так (зачастую) предмет ваших размышлений резко сокращается в объеме: вы можете «отложить его на полку», быстро вспомнить при необходимости и использовать в качестве всего лишь одного из шагов в каком-то еще рассуждении. Озарение, которым сопровождается этот процесс, — одна из прекрасных черт занятий математикой.

Освоив, пусть и ценой больших усилий, какое-то математическое понятие, очень трудно поставить себя на место того, для кого это понятие окружено завесой тайны.

Помню, как в пятом классе я пришел к поразившему меня пониманию, что ответ на вопрос «сколько будет 134, деленное на 29?» — просто $134/29$. Это же удивительно, от какого количества работы можно освободиться! Для меня деление 134 на 29 было утомительным заданием, тогда как за таким предметом, как $134/29$, никакого труда не стояло. В радостном возбуждении я прибежал к отцу и рассказал ему о своем замечательном открытии. Он мне ответил, что да, конечно, так оно и есть: a/b и a , деленное на b , — это просто синонимы. Для него это был всего лишь еще один вариант обозначений.

Один из моих учеников рассказывал, что как-то он зашел в начальную школу и его попросили научить ребенка вычитать дроби. Мой ученик был

поражен и отрезвлен, увидев, сколько всего содержится в этой тривиальной для него премудрости, когда изучаешь ее в первый раз.

Математика полна такими вещами на всех уровнях. Она продолжает расти.

Добытые напряженным трудом мощные инструменты, которые доступны не задумывающимся об этом математикам, но не учащимся, затрудняют математикам возможность учиться у своих учеников. Поэтому возникает препятствие психологического характера, мешающее математикам выслушивать учащихся до конца.

В преподавании математики важно очень стараться преодолевать это препятствие и не мешать учащимся продумывать различные вещи самостоятельно.

8. УМЕНИЕ И СМУЩЕНИЕ

Кроме того, более продвинутые учащиеся знают много того, с чем менее продвинутые учащиеся еще не знакомы. Когда они слышат, как другие небрежно перекидываются непонятными словами, которые, конечно же, должен знать каждый образованный взрослый человек, при том, что они и понятия не имеют, о чем идет речь, они чувствуют себя очень неуютно. Этим учащимся не приходит в голову, что с течением времени и они ознакомятся с этими теориями, выучат соответствующие слова и смогут ими столь же небрежно обмениваться. Я помню много случаев, когда я пугался математических слов и понятий: «отрицательный», «десятичный», «деление столбиком», «бесконечность», «алгебра», «переменная», «уравнение», «анализ», «интегрирование», «дифференцирование», «многообразие», «вектор», «тензор», «пучок», «спектр» и так далее. Далеко не сразу я привык к этому явлению и перестал смущаться.

Учителей математика тоже нередко смущает. Учителя старшей школы зачастую стесняются подходить к преподавателям колледжей и университетов. При этом они (не без оснований) задаются вопросом, знакомы ли университетские профессора с задачами, которые призваны решать учителя. Контакт между теми, кто преподает математику в школах, колледжах и университетах, так мало, что очень немногие университетские профессора имеют представление о проблемах обучения в средней и начальной школе. Что же до учителей начальной школы, то они обычно неуверены в своих математических познаниях и боятся обращаться к кому бы то ни было.

9. ПРОБЛЕМЫ И РЕШЕНИЯ — ОДНО

У проблем математического образования на всех уровнях (от детского сада и до аспирантуры) и у их решений — много общего. Недостаток

общения — это воистину плохо, а восстановление общения — это воистину прекрасно.

В течение последних двух лет я встречался со многими людьми, связанными с математическим образованием на всех уровнях, будучи членом MSEB (Совет по обучению математическим наукам — общеамериканская организация, включающая в себя людей с самым различным опытом в математике и в образовании, в том числе и какое-то количество учителей). И я многому научился.

В весеннем семестре 1990-го года Джон Конвей, Питер Дойл и я организовали в Принстоне новый курс «Геометрия и воображение», вобравший в себя многое из того, чему я научился в MSEB. Мы преподавали совместно, избегая лекций и уделяя особое внимание групповым обсуждениям среди учащихся. Основное ударение было сделано на конкретных примерах, совместном обучении и решении задач. Мы просили студентов вести тетради и подробно записывать свои мысли на хорошем английском языке. По окончании курса каждый студент выполнил курсовую работу. Такие принципы обучения обычны в дошкольном и школьном образовании, согласно текущим стандартам NCTM.

В заключение курса мы провели порадовавшую всех «геометрическую ярмарку»: что-то вроде научной ярмарки,²⁾ но без призов и с попкорновыми машинами.

Курс оказался качественно более удачным, чем все то, что мы преподавали до этого. Студенты многому научились; они решали задачи, которые мы бы и не рискнули предложить в колледже на обычном занятии.

В числе прочего, мы обсуждали и вопросы обучения математике. Мы раздали студентам набросок этой статьи, по материалам которого они написали 70 содержательных сочинений, основанных на их собственном опыте. Много полезного из этих сочинений включено в нынешнюю версию этого текста.

10. МЕНЬШИНСТВА

Почему среди математиков так мало женщин и так мало представителей меньшинств неазиатского происхождения?

Я убежден, что это во многом связано с недостатками школьной программы по математике и школьного обучения. То, как математику преподают в школах, не отвечает подлинным целям математического

²⁾ Научная ярмарка — состязание, на котором жюри оценивает выполненные школьниками «проекты» (примеры проектов для школьников разных возрастов: «Факторы, влияющие на рост бактерий», «Влияние солнечной активности на распространение радиоволн», «Наша Солнечная система»). — *прим. пер.*

образования. Очень трудно понять глубину, жизненность, силу и широту математики, если знать о ней только то, что обычно рассказывают в школах. Я думаю, что большинство из тех, кто освоили предмет и стали математиками, программистами и т. п., имели возможность изучать математику помимо школы: иногда дома, иногда по книгам, иногда у выдающегося учителя, и часто — в компании таких же «ботаников» в школе. Когда я учился в школе, я входил в такую компанию (хотя слова «ботаник» тогда еще не было), и я ей очень благодарен. Однако же белому мальчику или мальчику азиатского происхождения войти в такую компанию проще, чем чернокожему, испаноязычному или девочке.

Поскольку указанные выше пути внешкольного изучения математики являются в настоящее время основными для лучших студентов, повышение качества преподавания математики в школе должно послужить выравниванию шансов, в особенности для афроамериканцев, женщин и испаноязычных. При преподавании тем, кто пока что непривычен к математическому стилю рассуждений, особенно важно, чтобы математика представляла им не в разбавленном виде, но опиралась на их реальный опыт.

В большой степени это связано и с робостью. Упор на опережение программы, высокие результаты тестов и соревновательный дух усугубляют те небольшие различия, что возникают по иным причинам.

11. ЦЕЛИ И СТАНДАРТИЗИРОВАННЫЕ ТЕСТЫ

Какова польза от обучения математике?

11.1. МАТЕМАТИКА В ЖИЗНИ. Во-первых, математика — это важный инструмент в повседневной жизни. Предположим, что вы не торопясь проходите мимо магазинной полки, на которой стоит кофе в пакетах по 13 унций и в жестяных банках по 16 унций; можете ли вы, переработав эту информацию вкупе с ценами и ярким объявлением «содержит на 23% больше!», решить, кофе в какой упаковке обойдется вам дешевле, и все это — пока вы идете вдоль полки? Когда вы покупаете новую машину, вы хорошо понимаете все хитрости с кредитом и скидками? Собственно, если бы большинство покупателей это понимало, то хитрости бы и не применялись.

Во-вторых, умение математически рассуждать важно для того, чтобы быть сознательным гражданином. Можете ли вы разобраться в суждениях об опасности для здоровья различных веществ и решить, насколько эти суждения обоснованы? Когда вы слушаете выступление политического деятеля, способны ли вы проанализировать, насколько разумны приводимые им статистические данные и что они на самом деле доказывают? Сможете ли вы правильно провести измерения и вычисления, необходимые для простых плотницких и швейных работ? Умеете ли вы

планировать расходы? Если вы видите в газете или журнале диаграмму, понимаете ли вы, что она означает, и знакомы ли вы с нехитрыми уловками, позволяющими скрыть или подчеркнуть какое-то обстоятельство?

В-третьих, математика — инструмент, необходимый на множестве рабочих мест в нашем все более сложном и технологичном обществе. Она используется повсюду и по-всякому. Зубной техник, мастер по ремонту факсов, менеджер в «Макдональдсе», риэлтер, консультант по компьютерам, бухгалтер, банкир, няня, адвокат — все они для выполнения своих профессиональных обязанностей нуждаются в каком-то владении математикой.

В-четвертых, математика интенсивно используется (порой неправильно) в большинстве отраслей науки. Многое в теоретической науке и является на самом деле математикой. Многие ученые пользуются широко распространенными компьютерными программами для статистических вычислений, что облегчает им вычисления. Однако же те, кто используют такие программы, зачастую нетвердо понимают, на чем основана работа этих программ, и часто применяют статистические тесты и графическое представление результатов некорректным образом.

11.2. МАТЕМАТИКА ЖИВА. Для меня эти практические применения важны, но вторичны. Математика обладает замечательной красотой, силой и стройностью в большей степени, чем можно было бы ожидать. Она все время меняется; на каждом новом повороте мы обнаруживаем новые прекрасные и неожиданные связи с тем, что нам уже знакомо. Перемены в математике быстры — потому что математические рассуждения базируются на очень прочной основе.

Математика похожа на полет фантазии — но такой, при котором фантастическое становится реальным и оказывается, что оно было всегда. Занятия математикой похожи на фантазирование, но на самом деле они состоят в том, что наше восприятие обостряется, в результате чего мы открываем закономерности, присутствующие вокруг нас. В своей знаменитой книге «Апология математика» Г. Х. Харди воздал хвалу теории чисел за чистоту, абстрактность и полную невозможность применить ее на практике — а сейчас этот же раздел математики применяется очень широко, особенно в задачах кодирования и декодирования.

Мой опыт математика убеждает меня в том, что цели эстетические и практические оказываются для математики очень близки друг к другу. Наше чувство прекрасного влечет нас к той математике, что обладает определенной глубиной и стройностью. А затем сами по себе глубина и красота математических конструкций приводят к тому, что они неожиданным образом проявляются в других частях математики и в окружающем мире.

Поделиться с учащимися прелестью и интеллектуальным опытом математики, дать возможность полетать там, где мы ранее ходили пешком, — вот в чем цель математического образования.

11.3. ТЕСТИРОВАНИЕ И «ПРОВЕРЯЕМОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ». К сожалению, цели школьного преподавания математики оказались удивительно узкими, много более узкими, чем даже практические цели, перечисленные выше, не говоря уж об остальном. В последнее время и политики, и публика обычно требуют от школ «проверяемых результатов». Это было бы прекрасно, если бы результаты школьного обучения не определялись по узконацеленным тестам.

Представим себе, что считалось бы, что школьники освоили Шекспира, если они могут пройти тест по английскому языку XVI века, или же что они научились хорошо писать, если они умеют правильно выбрать грамматическую форму из четырех предложенных.

Органы народного образования (как региональные, так и на уровне штатов) выдают не программы обучения, а всего лишь список умений, которыми школьники должны овладеть к определенному возрасту: сложение в строчку или в столбик, прибавление двузначных чисел к двузначным, если сумма двузначна, и отдельно то же, если сумма трехзначна, и т. п.

В статье, открывающей один из разделов номера «Нью-Йорк Таймс» от 24 июля 1990 года, сравниваются начальные школы в двух разных «трудных» районах Бруклина. Первая из этих школ была «успешной»; в ней ежедневно проводилось два урока чтения, причем второй из них был целиком посвящен отработке навыков, необходимых для написания тестов, и тренировкам со стандартными тестами на чтение. В этой школе 80,5% учащихся прошли тест успешно. Вторая школа была «неуспешной»: в ней подготовка к тесту занимала «только» три месяца. В этой школе тест прошли 36,4% учащихся.

Журналист приводит пример того, как директор задает тон в успешной школе:

Ей недостаточно того, что даются всего лишь правильные ответы: она хочет, чтобы были верны и все промежуточные шаги. В одном из четвертых классов она обратила внимание, что девочка по имени Кеанда Снэгг предложила странный, но правильный подход к задаче, в которой требовалось выяснить, в каком из двух магазинов ниже средняя цена товара. «Похоже, ты хочешь получить ответ, не сделав работы», — сказала она девочке.

Наблюдая, как Кеанда проводит арифметические вычисления, она подчеркнула, сколь важно аккуратно записывать числа в столбик.

Не видя этих школ, я не могу сказать, какая из них на самом деле более успешна, но я знаю одно: ни результаты тестов, ни пересказанная в статье история об этой успешности не свидетельствует.

12. МЫШЛЕНИЕ И ЗАЗУБРИВАНИЕ

Узкие цели отупляют.

Люди гораздо более сообразительны в ситуации, когда они могут использовать весь свой интеллект и связать то, что они изучают, с реальными с их точки зрения ситуациями или явлениями.

Если кто-то затрудняется понять то, что вы ему объясняете, то естественная реакция — разделить материал на более мелкие фрагменты и объяснять эти фрагменты по отдельности. Это обычно не помогает, так что вы предпринимаете еще более мелкое деление и рассказываете еще более подробно.

Дело, однако, в том, что человеческий мозг работает не как компьютер: понять нечто, представленное в виде набора аккуратно объясненных мелких частей, не проще, а сложнее, чем понять то же самое как целое. Для человека очень трудно прочесть компьютерную программу на ассемблере и понять, что она делает, хотя компьютер читает и исполняет ее в мгновение ока. Тем не менее даже самый мощный компьютер на свете не обладает интеллектом, достаточным для того, чтобы безопасно водить машину, ходить по тротуару, не натываясь на прохожих, или сделать интересное математическое открытие.

Изучать математику, разбитую на мелкие составные части, — все равно, что начать изучение языка с того, чтобы заучить словарь и грамматику, затем научиться строить предложения, и только после всего этого научиться читать, писать и говорить. Носители языка не знают правил грамматики: они усваивают язык, концентрируясь на более высоком уровне и усваивая грамматические правила подсознательно. Выучить правила гораздо труднее, чем выучить язык как таковой. Многочисленные и до сих пор неудачные попытки научить компьютеры языкам показывают, что до сих пор никому не удалось адекватно описать язык с помощью точных правил.

Лучше не преподавать какую-то тему вообще, чем учить ей, разбивая на мелкие части.

13. ОТВЕТЫ И ВОПРОСЫ

Математические теории лучше усваиваются и выше ценятся теми, кто предварительно пытался самостоятельно разрешить вопросы, на которые теория призвана ответить.

В преподавании математики имеется естественная тенденция не нарушать логический порядок и рассказывать всю необходимую технику и все ответы до того, как демонстрировать примеры и задавать вопросы, в надежде, что к этому времени в распоряжении учащихся будет весь необходимый инструментарий для получения ответов.

Лучше, однако, чтобы все время присутствовали интересные неотвеченные вопросы и необъясненные примеры, независимо от того, готовы ли учащиеся, преподаватели или кто-то еще ответить на них. В математике лучший с психологической точки зрения порядок изучения предмета зачастую сильно отличается от наиболее эффективного с логической точки зрения.

Мы, математики, знаем, что вопросы без ответа никогда не кончатся. А вот учащиеся обычно воспринимают математику как нечто расфасованное и упакованное — по той причине, что они недостаточно далеко зашли в ее изучении.

Мы должны представлять математику учащимся так, чтобы она выглядела и интересной, и достаточно близкой к ситуациям, с которыми учащиеся столкнутся в реальной жизни, когда нет гарантированного ответа.

14. ЧТО МЫ МОЖЕМ СДЕЛАТЬ?

Ответ зависит от того, кто мы.

В нашей системе, для которой характерна разобщенность, отдельной организации или отдельному человеку трудно напрямую повлиять на систему в целом. Я попробую ответить на заданный в заголовке вопрос с позиций преподавателей математики в колледжах и университетах.

Во-первых, необходимо разрабатывать курсы для колледжей и университетов, которые давали бы студентам возможность начать с нуля. Повторительные курсы широко распространены, но их успех невелик: проходить один и тот же материал второй раз скучно и утомительно, вне зависимости от того, был ли он усвоен в первый раз. Такие курсы расхолаживают студентов и препятствуют их творчеству.

Вместо этого должно быть больше курсов, доступных первокурсникам и тем, кто по математике не специализируется, с тем, чтобы эти курсы, благодаря широте математики, позволяли начать изучение почти с начала и без того, чтобы повторять многое из того, о чем учащиеся уже слышали. Например, элементарные курсы по топологии, теории чисел, теории групп и симметриям, теории вероятностей, конечной математике, алгебраической геометрии, динамическим системам (хаосу), компьютерной графике с линейной алгеброй, проективной и начертательной

геометриям, геометрии Лобачевского, математической логике могут отвечать этому критерию.

Во-вторых, следует стремиться улучшить возможность обмена информацией между разными частями образовательной системы. Надо сделать так, чтобы педагогические достижения университетских преподавателей не оставались достоянием их самих или их факультетов, но были известны во всем академическом мире. Нам надо найти средства обмена интересными идеями между различными факультетами (например, ознакомительные визиты деканов факультетов и ответственных за работу на младших курсах). Нам нужно ходить друг к другу на занятия. Нужно, чтобы было больше докладов и заседаний, посвященных образованию, на наших математических конференциях, и чтобы было установлено больше премий за педагогические достижения.

Такие возможности для обмена информацией предоставляют бюллетени «Undergraduate Mathematics Education Trends» и «Focus» (последний издается МАА); есть и еще несколько изданий, публикующих статьи о преподавании на младших курсах. Еще одно средство коммуникации — ежегодное совещание деканов факультетов, проводимое отделом математических наук Национального совета по исследованиям; впрочем, повестка дня этих совещаний посвящена не только образованию. И тем не менее, существующие каналы коммуникации совершенно недостаточны по сравнению с тем, что мы могли бы сделать.

Еще важнее и еще труднее организовать обмен информацией между различными слоями образовательного сообщества. Для колледжей и университетов чрезвычайно важно общение между их математическими факультетами, с одной стороны, и старшей школой — с другой. Это общение должно быть двусторонним: профессора из колледжей и университетов могут научиться многому в преподавании у школьных учителей. Одним из таких каналов коммуникации является MSEB, а также созданные при его участии «математические союзы» на уровне штатов; но нам нужен более широкий обмен.

Как могут профессора с большим стажем, возглавляющие систему, которая, очевидно, работает не лучшим образом, считать, что они учат своих младших коллег, как хорошо преподавать? Аспиранты и молодые преподаватели часто учат математике лучше, чем преподаватели постарше, которые порой смирились с тем, что преподавание стало для них унылой рутинной, и даже не пытаются придумать что-нибудь новое. Даже если они, вопреки указанной тенденции, вполне удачно преподают сами, они обычно не участвуют в реформировании системы в целом.

Профессор, интересующийся преподаванием, часто встречает косые взгляды своих коллег. Обычно они считают, что единственно важное дело — это научные исследования и если кто-то уделяет основное внимание

преподаванию, то это знак того, что у него плохи дела с наукой. Иногда профессора со стажем прямо советуют младшим коллегам не тратить слишком много сил на преподавание, поскольку это может помешать их карьерному росту.

Мы должны признать, что мы можем приносить пользу обществу и существующим общественным институтам многими разными способами. Глупо оценивать математиков исключительно по их научной работе. Преподавание — важное и непростое занятие, которым многие занимаются не из необходимости, а по свободному выбору. И оценивать этих людей надо по тому, чего они добились, а не по тому, чего бы они могли добиться, если бы тратили свои время и силы на другое.

Надо срочно изменить систему стимулов. Нужно создать что-то лучшее, чем нынешняя практика, когда на словах все признают важность преподавания, но как только надо выбирать из нескольких кандидатов при приеме на работу или предоставлении постоянной позиции, так оказывается, что преподавание и общественная работа принимается во внимание в последнюю очередь, при прочих равных.

Люди мотивируются обществом. Если мы будем обсуждать друг с другом проблемы преподавания, то его значимость возрастет. Академическая культура может меняться; она и изменилась. Эти изменения по большей части неформальны: это то, о чем мы говорим в обеденный перерыв, а не какие-то управленческие решения. Тем не менее, когда перемены назреют — а я считаю, что в случае с преподаванием математики они назрели, — то даже небольшие организационные усилия приведут к серьезным изменениям.

Необходимые нам реформы будут проведены благодаря нашим совместным усилиям. Хорошие математические идеи распространяются в математическом сообществе очень быстро, по неформальным каналам. Если мы обратим свое внимание на образование, то столь же быстро распространятся и хорошие педагогические идеи.