

О неотрицательных гармонических функциях на решетке

П. Шольце

Гармонической на целочисленной решетке \mathbb{Z}^n называется такая функция $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в каждой точке равно среднему арифметическому от значений соседей:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(f(x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) \right).$$

Данная заметка посвящена доказательству следующего утверждения, из которого, в частности, следуют пункты б) и в) задачи 5.9 задачника «Математического просвещения».

ТЕОРЕМА. *Гармоническая на решетке неотрицательная функция постоянна.*

Аналогично одномерному случаю (см. предыдущую статью И. И. Богданова и Г. Р. Челнокова) мы введем операторы сдвига X_1, \dots, X_n , действующие на наших функциях по следующему правилу:

$$(X_i f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n).$$

Таким образом, X_i «сдвигает» расстановку чисел в узлах решетки на 1 по i -й координате. Условие гармоничности функции записывается с помощью операторов сдвига как

$$(X_1 + X_1^{-1} + X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})f = 2nf$$

или

$$(X_1 + X_1^{-1} + X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1} - 2n)f = 0,$$

где 0 — тождественно нулевая расстановка.

Операторы сдвига коммутируют. Поэтому можно рассматривать многочлены от операторов X_i, X_i^{-1} с действительными коэффициентами, понимая умножение операторов как композицию, а сложение и умножение на число — как сложение и умножение на число функций $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Перевод и редактирование И. И. Богданова.

Заметим, что, применяя многочлен от сдвигов X_i, X_i^{-1} к гармонической функции, мы опять получаем гармоническую функцию. При этом, если коэффициенты многочлена и исходная функция неотрицательны, то и полученная функция неотрицательна.

Мы будем вести доказательство индукцией по n . Доказательство для $n = 1$ тривиально, поскольку одномерная гармоническая функция линейна, а ограниченная линейная функция постоянна.

Для шага индукции достаточно доказать, что функция f из условия теоремы удовлетворяет неравенству

$$2(n-1)f \geq (X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})f \quad (1)$$

(подобные неравенства мы всегда будем воспринимать поточечно; в частности, данное неравенство означает, что значение левой функции в каждой точке не меньше, чем соответствующее значение правой). Действительно, тогда из симметрии выполняются неравенства такого же вида с заменой индекса 1 на i ; просуммировав по всем i , мы получим, что

$$(2n - X_1 - X_1^{-1} - X_2 - X_2^{-1} - \dots - X_n - X_n^{-1})f \geq 0.$$

Поскольку это неравенство обращается в равенство, то обращались в равенство и все слагаемые, т. е. при любом j

$$\left(\sum_{i \neq j} (X_i + X_i^{-1}) \right) f = 2(n-1)f.$$

Зафиксируем произвольное $a \in \mathbb{Z}$. Тогда функция

$$f_1: (x_2, \dots, x_n) \mapsto f(a, x_2, \dots, x_n)$$

является неотрицательной гармонической функцией на $(n-1)$ -мерной решетке, по предположению индукции она постоянна; по тем же причинам и функция

$$f_2: (x_1, x_3, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, a, x_2, \dots, x_n)$$

постоянна. А тогда и функция f также постоянна.

Осталось доказать неравенство (1).

Введем многочлен $m(x_2, \dots, x_n) = (2n-2) - x_2 - x_2^{-1} - \dots - x_n - x_n^{-1}$ и обозначим через M соответствующий ему оператор $m(X_2, \dots, X_n)$. Нам нужно доказать, что $Mf \geq 0$. Заметим, что $(Mf)(x_1, x_2, \dots, x_n)$ зависит только от значений функции при данном фиксированном x_1 .

Сумма сдвигов вдоль первой координаты $(X_1 + X_1^{-1})f$ выражается через сдвиги f вдоль остальных координат; иначе говоря, сумма двух значений f в точках, симметричных относительно плоскости $x_1 = a$, выражается через значения f в этой плоскости. Выясним, как именно она выражается.

Введем многочлены

$$p_0(t) = 2, \quad p_1(t) = 2 + t, \quad p_{k+2}(t) = (2 + t)p_{k+1}(t) - p_k(t).$$

Положим $P_k = p_k(M)$.

ЛЕММА 1. $P_k f = (X_1^k + X_1^{-k})f$ при любом k . Как следствие, $P_k f \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . Для $n = 0, 1$ утверждение очевидно. Для остальных значений n из определения гармонической функции получаем

$$\begin{aligned} (X_1^k + X_1^{-k})f &= \\ &= (X_1^{k-1}(X_1 + X_1^{-1}) - X_1^{k-2} + X_1^{-k+1}(X_1 + X_1^{-1}) - X_1^{-k+2})f = \\ &= -(X_1^{k-2} + X_1^{k-1}(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1} - 2n))f - \\ &- (X_1^{-k+2} + X_1^{-k+1}(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1} - 2n))f = \\ &= (X_1^{k-1} + X_1^{-k+1})(2 + M)f - (X_1^{k-2} + X_1^{-k+2})f = \\ &= ((2 + M)P_{k-1} - P_{k-2})f = P_k f, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы следует, что любую функцию, заданную на плоскости $x_1 = 0$, можно продолжить гармоническим образом на всю область определения: она восстанавливается из доказанной леммы, если предположить, что она симметрична относительно этой же плоскости. При этом, очевидно, она не обязана быть неотрицательной, даже если исходные данные были неотрицательными.

Теперь мы временно забудем про операторы P_k и выясним несколько свойств многочленов $p_k(t)$.

ЛЕММА 2. $p_k(2 \cos \alpha - 2) = 2 \cos(k\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по k . При $k = 0$ и $k = 1$ это очевидно. Используя определение многочленов $p_k(t)$, получаем

$$\begin{aligned} p_{k+2}(2 \cos \alpha - 2) &= 2 \cos \alpha p_{k+1}(2 \cos \alpha - 2) - p_k(2 \cos \alpha - 2) = \\ &= 2(2 \cos \alpha \cos(k+1)\alpha - \cos k\alpha) = 2(\cos(k+2)\alpha + \cos k\alpha - \cos k\alpha) = \\ &= 2 \cos(k+2)\alpha \end{aligned}$$

из предположения индукции. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2 сразу вытекает, что $p_k(t) = 2T_k(\frac{t}{2} + 1)$, где $T_k(t)$ — многочлен Чебышёва степени k .

ЛЕММА 3. $p_k(t) = 2 + (t - t_1) \cdot \dots \cdot (t - t_k)$, где $t_j = 2 \cos \frac{2j\pi}{k} - 2$. Как следствие, $p_k(t) \geq 2$ при $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2, корнями многочлена $p_k(t) - 2$ являются $t_j = 2 \cos \frac{2i\pi}{k} - 2$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. Некоторые числа встречаются среди списка t_j дважды. Однако, если $d = t_r = t_j$, то $r + j = k$, и $-4 < d < 0$; заметим, что при $t \in [-4, 0]$ выполняется неравенство

$$|p(t)| = 2 \left| \cos \left(k \arccos \frac{t+2}{2} \right) \right| \leq 2,$$

а $p(d) - 2 = 0$, поэтому d — внутренняя точка локального максимума $p_k(t) - 2$ и, как следствие, его корень кратности 2. Таким образом, мы насчитали k корней многочлена $p_k(t) - 2$; кроме того, его старший коэффициент равен 1 (из определения). Тогда $p_k(t) = 2 + (t - t_1) \cdot \dots \cdot (t - t_k)$. При этом все t_i неположительны, откуда следует второе утверждение леммы. \square

Пусть r — наименьшее неотрицательное число такое, что неравенство $(M + r)g \geq 0$ выполняется для *любой* неотрицательной гармонической функции g . Заметим, что $(M + 2)g = (X_1 + X_1^{-1})g \geq 0$ из леммы 1; поэтому r существует и не превосходит 2. Требуемое неравенство (1) эквивалентно тому, что $r = 0$.

Предположим, что $r > 0$. Разделим многочлен $p_k(t)$ с остатком на $(t - 2(n - 1))(t + r)$:

$$p_k(t) = (t - 2(n - 1))(t + r)q_k(t) + r_k(t), \quad \deg r_k \leq 1. \quad (2)$$

ЛЕММА 4. $q_k(t)$ можно представить в виде

$$q_k(t) = \sum_{l=0}^{k-2} A_l p_l(t),$$

где $A_l \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (2) $t = 2 \cos \alpha - 2$ и положим $z = e^{i\alpha}$. Тогда $t = z + z^{-1} - 2$, а $p_k(t) = z^k + z^{-k}$. Соответственно, частное q_k принимает вид

$$\begin{aligned} q_k(z + z^{-1} - 2) &= \frac{z^k + z^{-k} - r_k(z + z^{-1} - 2)}{(z + z^{-1} - 2n)(z + z^{-1} + (r - 2))} = \\ &= A_{k-2}(z^{k-2} + z^{-k+2}) + A_{k-3}(z^{k-3} + z^{-k+3}) + \dots + A_0, \end{aligned} \quad (3)$$

поскольку $q_k(z + z^{-1} - 2)$ симметрично относительно замены $z \mapsto z^{-1}$. Заметим, что тогда $q_k(t) = A_{k-2}p_{k-2}(t) + \dots + A_0$, ибо для любого t найдется такое (возможно, комплексное) z , что $t = z + z^{-1} - 2$. Поэтому нам надо доказать неотрицательность коэффициентов A_l .

При $z \rightarrow \infty$ имеем

$$q_k(z + z^{-1} - 2) = A_{k-2}z^{k-2} + A_{k-3}z^{k-3} + \dots + A_1z + A_0 + o(1).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} q_k(z + z^{-1} - 2) &= \\ &= \frac{z^k}{(z + z^{-1} - 2n)(z + z^{-1} + (r - 2))} + \frac{z^{-k} - r_k(z + z^{-1} - 2)}{(z + z^{-1} - 2n)(z + z^{-1} + (r - 2))} = \\ &= \frac{z^k}{(z + z^{-1} - 2n)(z + z^{-1} + (r - 2))} + o(1), \end{aligned}$$

поскольку $r_k(t)$ не более, чем линейен.

Значит, при $z \rightarrow \infty$

$$\frac{z^k}{(z + z^{-1} - 2n)(z + z^{-1} + (r - 2))} = A_{k-2}z^{k-2} + A_{k-3}z^{k-3} + \dots + A_1z + A_0 + o(1).$$

Подставив $x = 1/z$ и домножив на x^{k-2} , получаем при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + 1 - 2nx)(x^2 + 1 + (r - 2)x)} &= A_{k-2} + A_{k-3}x + \dots + A_1x^{k-3} + A_0x^{k-2} + \\ &+ o(x^{k-2}), \end{aligned}$$

т. е. A_l есть коэффициенты ряда Маклорена функции

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + 1 - 2nx)(x^2 + 1 + (r - 2)x)} &= \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2nx + 1} \cdot \frac{1}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + (r - 2)x + 1)} = u(x)v(x). \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что ряд Маклорена каждого из сомножителей неотрицателен. Пусть $\nu_1 > 1$, $\nu_2 = 1/\nu_1$ — корни многочлена $x^2 - 2nx + 1$, тогда

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2nx + 1} = 1 + \frac{(2n - 2)x}{(1 - \nu_1 x)(1 - \nu_2 x)} = \\ &= 1 + \frac{(2n - 2)x}{\nu_1 - \nu_2} \left(\frac{\nu_1}{1 - \nu_1 x} - \frac{\nu_2}{1 - \nu_2 x} \right) = 1 + \frac{2n - 2}{\nu_1 - \nu_2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \nu_1^l x^l - \sum_{l=1}^{\infty} \nu_2^l x^l \right) = \\ &= 1 + \frac{2n - 2}{\nu_1 - \nu_2} \sum_{l=1}^{\infty} (\nu_1^l - \nu_2^l) x^l, \end{aligned}$$

где все коэффициенты, очевидно, положительны.

Рассмотрим $v(x)$. Заметим, что у ряда

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

все коэффициенты положительны. Тогда, если $r = 0$, то сомножитель

$v(x)$, равный квадрату этого ряда, положителен. Если же $r > 0$, то

$$xv(x) = \frac{x}{(x^2 + 1 - 2x)(x^2 + 1 + (r-2)x)} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1 - 2x + x^2} - \frac{1}{1 + (r-2)x + x^2} \right).$$

Аналогично проведенным выше вычислениям, имеем

$$\begin{aligned} rxv(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)x^l - \frac{1}{\zeta - \zeta^{-1}} \sum_{l=0}^{\infty} (\zeta^{l+1} - \zeta^{-l-1})x^l = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(l+1 - \frac{\zeta^{l+1} - \zeta^{-l-1}}{\zeta - \zeta^{-1}} \right) x^l, \end{aligned}$$

где ζ, ζ^{-1} — корни трехчлена $x^2 + 1 + (r-2)x$ (они при $0 < r \leq 2$ комплексно сопряжены). Осталось заметить, что

$$\left| \frac{\zeta^{l+1} - \zeta^{-l-1}}{\zeta - \zeta^{-1}} \right| = |\zeta^l + \zeta^{l-2} + \dots + \zeta^{-l}| \leq l+1,$$

поэтому для (действительных!) коэффициентов ряда $rxv(x)$ верно неравенство

$$l+1 - \frac{\zeta^{l+1} - \zeta^{-l-1}}{\zeta - \zeta^{-1}} \geq 0,$$

а значит, и коэффициенты ряда $v(x)$ неотрицательны. \square

Рассмотрим операторы $Q_k = q_k(M)$, $R_k = r_k(M)$ и произвольную неотрицательную гармоническую функцию g .

ЛЕММА 5. $R_k g \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} R_k g &= P_k g + (M+r)(2n-2-M)Q_k g = \\ &= P_k g + (M+r)(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})Q_k g. \end{aligned}$$

Заметим, что $P_i g \geq 0$ из леммы 1, а поэтому $Q_k g \geq 0$ из леммы 4. Тогда применение оператора $(M+r)$ к гармонической неотрицательной функции $(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})Q_k g$ дает снова неотрицательную функцию. Отсюда следует утверждение леммы. \square

Завершим доказательство теоремы. Итак, мы предположили, что $r > 0$. Тогда $0 < \varphi = \arccos \frac{2-r}{2} \leq \pi$, и существует такое k , что $\pi/2 < k\varphi \leq \pi$. При этом k имеем $p_k(-r) = 2 \cos k\varphi < 0$ согласно лемме 2. Кроме того, из леммы 3 получаем $p_k(2n-2) \geq 2$.

Подставив в (2) $t = 2(n-1)$ и $t = -r$, получаем

$$r_k(2(n-1)) = p_k(2(n-1)), \quad r_k(-r) = p_k(-r),$$

откуда

$$r_k(t) = p_k(2(n-1)) + (x - 2(n-1)) \frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{2(n-1) + r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_k g = & \frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{2(n-1) + r} M g + \\ & + \left(p_k(2(n-1)) - 2(n-1) \frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{2(n-1) + r} \right) g \geq 0, \end{aligned}$$

причем коэффициент при M в этом выражении положителен. Разделив на этот коэффициент, получаем

$$\left(M + p_k(2(n-1)) \frac{2(n-1) + r}{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)} - 2(n-1) \right) g \geq 0.$$

Однако

$$\begin{aligned} p_k(2(n-1)) \frac{2(n-1) + r}{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)} - 2(n-1) = \\ = (2(n-1) + r) \frac{p_k(2(n-1))}{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)} - 2(n-1) < \\ < 2(n-1) + r - 2(n-1) = r; \end{aligned}$$

неравенства выполняются, ибо $p_k(2(n-1)) \geq 2 > 0 > p_k(-r)$. Получаем противоречие с выбором r . Значит, $r = 0$, откуда следует неравенство (1), из которого, как было показано выше, и следует теорема.