Конкурсы и олимпиады

Студенческий конкурс решения задач 2004–2005 гг.

О правилах конкурса

Вниманию студентов университета предлагается домашний конкурс. Подобные конкурсы проводились неоднократно в прошлом. (Например, о конкурсе 2001–2002 гг. сообщалось в «Математическом просвещении», вып. 7, 2003, с. 177–181.) Среди их участников есть как недавние, так и очень давние выпускники мат-меха. Идея конкурса (в отличие от олимпиад) в решении задач, в основном, исследовательского характера, которые не решаются одним приемом, а требуют серьезных и неспешных раздумий. Конкурс проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Общество образует жюри и выделяет денежные призы для награждения победителей.

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов. Итоги среди первокурсников подводились отдельно. Допускались коллективные (не более трех человек) работы.

Ниже приводятся условия задач конкурса 2004–2005 гг. В предлагаемом списке имеются задачи различной трудности, от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной*. Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Условия задач

Задача 1. Дано множество $A \subset \mathbb{R}$ положительной меры Лебега. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что при всех $x \in \mathbb{R}$ и при всех $a \in A$

$$f(x-a) = f(x) + f(a) - 1.$$

Докажите, что $f(x) \equiv 1$.

Задача 2. Функция $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и для любого $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ точка $x = 0$ — единственный корень производной $f^{(k)}(x)$. Докажите, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ |f'|^{1+\varepsilon} = o(f) \ \text{ при } \ x \to 0\,.$$

Задача 3. Даны числа $0 < a < b$. Убывающая непрерывная функция $y(x)\colon [0,1] \to [0,1]$ определена условием $x^a - x^b = y^a - y^b$. Докажите, что

$$\int_0^1 \frac{\ln y}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{3ab}\,.$$

Задача 4. В некоторых узлах целочисленной решетки на плоскости расположены точечные источники света, а в некоторых — точечные заслонки. Источники света образуют квадратную подрешетку со стороной M, а заслонки — квадратную подрешетку со стороной N (стороны всех решеток параллельны координатным осям). Источник и заслонка не могут находиться в одной точке.

В одной из незанятых точек плоскости находится наблюдатель. Наблюдатель видит источник света, если на соединяющем их отрезке нет ни одной заслонки. При каких отношениях M/N расположение решеток и наблюдателя может быть таким, что наблюдатель

а) не видит ни одного источника света?

б) не видит ни одного источника света внутри некоторого ненулевого угла с вершиной в точке, где он находится?

Задача 5. Обозначим через T единичную окружность $T = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$. Докажите, что существует такая измеримая функция $f\colon T \to T$, что для любой интегрируемой функции $h\colon T \to T$ (можно ограничиться непрерывными h) найдется такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_k, что

$$\int_T |f^{n_k}(t) - h(t)|\,dt \to 0 \quad \text{ при } \quad k \to +\infty.$$

(Здесь f^{n_k} — обычное возведение в степень.)

Задача 6. а) Дан сферический треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами α_s, β_s, γ_s. Углы треугольника со сторонами a, b, c на плоскости обозначим α, β, γ. Докажите, что

$$\alpha_s - \alpha \leqslant (\beta_s - \beta) + (\gamma_s - \gamma).$$

б) Верно ли аналогичное неравенство для треугольников на двух сферах разных радиусов? Для плоскости и плоскости Лобачевского?

Задача 7. а) Дан вещественный многочлен $P(x, y)$, имеющий в точке $(0, 0)$ изолированный нуль (т. е. $P(0, 0) = 0$ и $P(x, y) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $(0, 0)$). Докажите, что существуют такие натуральное n и вещественное $C > 0$, что в некоторой окрестности нуля верно неравенство

$$|P(x, y)| \geqslant C(x^2 + y^2)^n. \tag{$*$}$$

б) Найдите оценки наименьшего показателя $n = n(k)$, $k \to +\infty$, такого что неравенство $(*)$ имеет место для всех многочленов P степени k.

Задача 8. Рассмотрим n-значные числа в k-ичной системе счисления (первой цифрой может быть и 0). Назовем число хорошим, если любые две его соседние цифры отличаются не более чем на 1. Для каждого n-значного числа A определим $f(A)$ как наименьшее число цифр, которое необходимо в нем зачеркнуть, чтобы получившееся число стало хорошим.

а) Докажите, что для некоторого $c > 0$ наблюдается следующее явление концентрации:

$$\frac{1}{k^n} \sum_A |f(A)/n - c| \to 0, \qquad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где сумма берется по всем n-значным числам.

б) Докажите, что для $k = 3$ константа c равна $1/3 - \sqrt{5}/15$.

в) Получите как можно лучшие оценки для c при $k > 3$.

Задача 9. Пусть функция f непрерывна в замкнутом единичном круге D и тождественно равна нулю на его границе. Известно, что в точках a и b, принадлежащих $\operatorname{Int} D$, она имеет локальные максимумы.

а) Докажите, что если $f \in C^2(D)$, то в $\operatorname{Int} D$ существует еще одна (отличная от a и b) стационарная точка f.

б) Верно ли заключение пункта а), если $f \in C^1(\operatorname{Int} D)$?

Задача 10. Замкнутые несамопересекающиеся гладкие кривые в $\mathbb{R}^2$ с кривизной меньше 1 будем называть *плавными*.

а) Докажите, что в круг радиуса 2.1 нельзя вписать плавную кривую длины больше 100. Найдите более разумную оценку сверху длины плавной кривой, которую можно поместить в этот круг.

б) Докажите, что в круг радиуса 2.2 можно вписать плавную кривую сколь угодно большой длины.

в) Докажите, что существует такое число $\ell > 2\pi$, что в круг радиуса 2.2 нельзя вписать плавную кривую длины ℓ.

г) Верно ли, что любые две плавные кривые, лежащие в круге большого радиуса, гомотопны в классе плавных кривых?

Задача 11. Обозначим через c_n последовательность чисел Каталана: $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Докажите, что

$$\det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \end{pmatrix} = 1.$$

Задача 12. а) Докажите, что для любых m, $n \in \mathbb{N}$ существует такая непрерывная функция $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ и точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m+2}$ на сфере S^{n-1}, что не существует поворота $U \in SO(n)$, для которого

$$f(Ux_1) = f(Ux_2) = \cdots = f(Ux_{n-m+2}).$$

б) Докажите, что для любой непрерывной функции $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ и для любых точек x_1 и x_2 на сфере S^2, существует поворот $U \in SO(2)$, для которого $f(Ux_1) = f(Ux_2)$.

в) Докажите, что для любой непрерывной функции $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ найдутся три точки x_1, x_2 и x_3 на сфере S^2, являющиеся концами ортов, для которых $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$.

г) Докажите, что для любой непрерывной функции $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ и для любых трех точек x_1, x_2 и x_3 на сфере S^2, существует поворот $U \in SO(3)$, для которого $f(Ux_1) = f(Ux_2) = f(Ux_3)$.

д) Докажите еще для каких-нибудь m, n и конфигураций из $k = n - m + 1$ точек $x_1, \ldots, x_k$ на сфере S^{n-1} и любой непрерывной функции $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$, что существует поворот $U \in SO(n)$, для которого

$$f(Ux_1) = f(Ux_2) = \cdots = f(Ux_k).$$

Задача 13. а) Назовем выпуклый центрально симметричный многогранник в $\mathbb{R}^n$ *славным*, если на сфере S^{n-1} существует борелевская мера μ, такая что при всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \int |\langle x, y\rangle| \, d\mu(y),$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма, порождаемая этим многогранником. Докажите, что многогранник славен тогда и только тогда, когда выполняется принцип усреднения: для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ и любых вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ из условия, что неравенство $\sum \lambda_i |\langle x_i, y\rangle| \geqslant 0$ справедливо для любого $y \in \mathbb{R}^n$, следует неравенство $\sum \lambda_i \|x_i\| \geqslant 0$.

б) Останется ли в конечномерном случае утверждение верным, если вместо многогранника взять любое центрально симметричное выпуклое тело?

Задача 14. Пусть F — распределение на $[0,1]$, σ^2 — его дисперсия, а μ_4 — четвертый центральный момент. Докажите, что

$$\mu_4 + 3\sigma^4 \leqslant \sigma^2,$$

причем равенство возможно только для вырожденного распределения или распределения Бернулли.