Уникальносоставленные фигуры

А. М. Петрунин, С. Е. Рукшин

В этой статье мы рассматриваем отношение равносоставленности на множестве выпуклых плоских фигур.

Первым существенным результатом в этом направлении было доказательство Ф. Бойяи и П. Гервином (1832) следующего утверждения: *два многоугольника, имеющие равные площади, равносоставлены* (*т. е. один из них можно разрезать на конечное число многоугольных частей, переложив которые, можно получить другой многоугольник*).

С проблемой равносоставленности трехмерных тел связана знаменитая третья проблема Гильберта [1]. Как показал в 1900 г. Макс Ден, даже для тетраэдров равенство объемов не влечет их равносоставленности.

В дальнейшем теорема Бойяи – Гервина и другие результаты, связанные с третьей проблемой Гильберта, обобщались в различных направлениях [1].

Так, в математическом фольклоре известно следующее утверждение: круг не равносоставлен никакому многоугольнику. В процессе обобщения теоремы Бойяи – Гервина на случай *круговых многоугольников* [7], граница которых состоит из отрезков и дуг окружностей, удалось усилить это утверждение, доказав, что *круг не равносоставлен никакой выпуклой фигуре, отличной от круга*. Такие выпуклые фигуры, не равносоставленные никакой другой выпуклой фигуре, мы будем называть уникальносоставленными. В этой статье мы дадим полное описание таких фигур.

Эти результаты были получены нами почти 20 лет назад [6]. Знакомство с замечательной работой [12] позволило существенно упростить доказательство.

Для понимания большей части статьи потребуется только знание доказательства теоремы Бойяи – Гервина, которое можно найти, например, в книжках Болтянского [1] или [2].

Для упрощения восприятия мы доказываем последовательно несколько теорем, каждая следующая из которых обобщает предыдущую.

1. Обозначения и определения

F будет обозначать плоскую и чаще всего выпуклую фигуру, $S(F)$ обозначает площадь F, ∂F обозначает кривую, ограничивающую F.

Определение 1. Две плоских фигуры F и G называются *равносоставленными* (обозначение $F \sim G$), если одну из них можно разрезать отрезками прямой на конечное число частей и составить из этих частей другую.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, 2006(161–175)

Можно рассматривать и другие определения равносоставленности. Вместо разрезов по отрезкам прямой можно разрешить разрезы вдоль спрямляемых жордановых кривых, или вообще вдоль произвольных жордановых кривых. В общем случае эти определения дают различные классы равносоставленных фигур. Но, как было доказано в [12], для *выпуклых* фигур эти определения равносильны, т. е. если две *выпуклые* фигуры «равносоставлены» по одному из новых определений, то они равносоставлены и в смысле определения 1.

Равносильность этих определений является достаточно глубоким фактом, и именно она позволила существенно упростить первоначальные авторские доказательства: удалось отказаться от топологических подробностей и оставить только наглядные геометрические рассуждения, изложенные в настоящей статье.

К совершенно иным эффектам приводит теоретико-множественное определение равносоставленности. Назовем *равноразложимыми* два множества точек X и Y, если существует разбиение X на непересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и Y на $B_1, B_2, \ldots, B_n$ такие, что множества B_i получаются из соответствующих A_i подходящими движениями $f_i\colon B_i = f(A_i)$. Знаменитый парадокс Банаха – Тарского состоит в том, что шар в $\mathbb{R}^3$ равноразложим с объединением двух непересекающихся шаров того же радиуса (см. [11]). Оказывается, что вообще любые два множества в $\mathbb{R}^3$, имеющие непустую внутренность, равноразложимы. Отсылаем заинтересованного читателя к книге [10].

В дальнейшем описании уникальносоставленных фигур мы будем понимать равносоставленность исключительно в смысле определения 1.

Определение 2. Выпуклая фигура F называется *уникальносоставленной*, если любая выпуклая фигура, равносоставленная F, является конгруэнтной F.

Как мы уже упоминали, к уникальносоставленным фигурам относится круг. В [12] доказана уникальносоставленность эллипса.

Определение 3. Две кривые (или два набора кривых) α и β называются *равносоставленными* (или $\alpha \sim \beta$), если первую(ый) можно разбить на конечное число дуг и составить из них вторую(ой).

Определение 4. Две кривые α и β называются *стабильно равносоставленными* (или $\alpha \approx \beta$), если из них можно исключить конечное число отрезков прямой так, что оставшиеся два набора кривых равносоставлены.

Следующее утверждение является простым обобщением теоремы Бойяи – Гервина, утверждающей, что равновеликие многоугольники равносоставлены, (см. [1] или [2]):

Утверждение 5. *Две выпуклые фигуры F и G равносоставлены тогда и только тогда, когда их площади равны и кривые, их ограничивающие, стабильно равносоставлены. Или*

$$F \sim G \;\Leftrightarrow\; S(F) = S(G) \text{ и } \partial F \approx \partial G.$$

Доказательство. Необходимость: совокупность всех кривых, ограничивающих куски разбиения, состоит из дуг первой кривой плюс какое-то количество «внутренних» отрезков прямой, и из тех же кусков состоит и вторая фигура. Таким образом, если из границы F вырезать отрезки прямой, которые соответствуют «внутренним» отрезкам разбиения G, и аналогично поступить с границей G, то оставшиеся куски границ будут равносоставлены.

Достаточность: рассмотрим разбиение границ F и G как в определении стабильной равносоставленности. Если к каждой такой дуге фигур F и G провести хорду, то образовавшиеся горбушки (сегменты) для равных дуг равны. Так как $S(F) = S(G)$, то и площади оставшихся многоугольников равны, а значит, они равносоставлены по теореме Бойяи – Гервина. □

2. Уникальносоставленность круга

Теорема 6. *Круг уникальносоставлен.*

Для доказательства нам потребуется следующая лемма:

Лемма 7. *Если граница выпуклой фигуры F состоит из конечного числа отрезков прямой и дуг окружностей радиуса R с общей угловой мерой $360°$, то она является R-окрестностью выпуклого многоугольника.*

В частности, F содержит в себе круг радиуса R.

Сначала мы покажем, что теорема 6 действительно следует из леммы:

Доказательство теоремы 6. Обозначим через K круг радиуса R. Пусть F есть выпуклая фигура, такая что $K \sim F$. Тогда из утверждения 5 мы имеем: $S(F) = S(K)$ и граница F *стабильно равносоставлена* окружности радиуса R. В частности, F удовлетворяет лемме 7. Таким образом, F содержит в себе копию K. Так как $S(F) = S(K)$, получаем $K \cong F$. □

В доказательстве леммы мы будем пользоваться следующим фактом, который предоставляем доказать читателю в качестве упражнения:

Упражнение 8. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ есть замкнутая ломаная, которая при обходе по ней поворачивает всё время против часовой стрелки, и общий угол поворота равен $360°$ — тогда ломаная $A_1A_2 \cdots A_n$ ограничивает выпуклый многоугольник.

Доказательство леммы 7. Пусть α есть выпуклая кривая стабильно равносоставленная окружности радиуса R. Заметим, что в этом случае кривая не имеет угловых точек. Действительно, при обходе вокруг кривой необходимо повернуть на 360°, и ровно на этот же угол мы поворачиваем, пройдя по всем дугам окружности; таким образом, на углы не остается места (т. е., если бы имелась еще и угловая точка, то общий угол поворота был бы больше чем 360°, что невозможно). Таким образом, кривая α состоит из поочередно сменяющихся дуг окружностей и отрезков прямых, так что отрезки и дуги продолжают друг друга в том же направлении (см. рис. 1). Для каждого отрезка прямой в α рассмотрим его параллельный перенос в перпендикулярном направлении внутрь фигуры на расстояние R. При этом концы отрезков, соседние через дугу, перейдут в одну точку, и мы получим замкнутую ломаную из параллельных переносов всех отрезков α. Звенья этой ломаной поворачивают в одну и ту же сторону (так же как и α), и, так же как у α, общий угол поворота будет 360°. Воспользовавшись упражнением 8, мы получаем, что эта ломаная ограничивает выпуклый многоугольник. Обозначим его M, и из построения легко видеть, что сама фигура F есть множество точек на расстоянии R от M. □

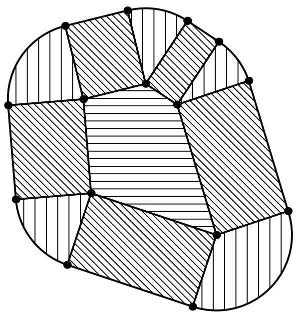

Рис. 1.

3. Уникальносоставленность линзы

Следующий факт имеет несколько более сложное доказательство:

Теорема 9. *Пересечение двух кругов одинакового радиуса есть уникальносоставленная фигура.*

Для краткости, давайте назовем пересечение двух кругов радиуса R линзой и будем обозначать ее L_ω, где ω есть угловая мера дуг, ее ограничивающих (в частности, $L_{2\pi}$ есть круг радиуса R). С помощью точно такого же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 6, теорема 9 сводится к следующей лемме:

Лемма 10. *Если выпуклая фигура F имеет границу, стабильно равносоставленную границе линзы L_ω, то $S(F) \geqslant S(L_\omega)$. Более того, если $S(F) = S(L_\omega)$, то $F \cong L_\omega$.*

Доказательство будет проведено в два шага. Сначала мы докажем следующее, более слабое утверждение, а уже потом приступим к общему случаю.

Лемма 11. *Если центрально-симметричная выпуклая фигура F имеет границу, стабильно равносоставленную границе линзы L_ω, то $S(F) \geqslant S(L_\omega)$. Более того, если $S(F) = S(L_\omega)$, то $F \cong L_\omega$.*

Доказательство. В доказательстве мы воспользуемся двумя процедурами: «вырезанием параллелограмма» (см. рис. 2) и «четырехшарнирным методом» (см. рис. 3). Первый (примененный несколько раз) заменит фигуру F на фигуру F_1 с теми же свойствами, что и F, но с меньшей площадью и без отрезков прямых на границе. Второй (также примененный несколько раз) заменит уже полученную F_1 на F_2 с теми же свойствами, что и F_1, но с меньшей площадью и с не более чем двумя угловыми точками на границе (это немедленно влечет, что $F_2 \cong L_\omega$).

Предположим, на границе F есть отрезок прямой AB, и пусть $A'B'$ обозначает центрально-симметричный ему отрезок. Тогда из F можно вырезать параллелограмм $ABA'B'$ и из оставшихся двух кусков составить центрально-симметричную выпуклую фигуру F'. При этом, очевидно, $S(F') < S(F)$ и $\partial F' \approx \partial F$ (т. е. их границы стабильно равносоставлены). Повторив эту операцию столько раз, сколько возможно, выбирая каждый раз новую пару отрезков, мы получаем центрально-симметричную выпуклую фигуру F_1 без отрезков прямой на границе такую, что $S(F_1) \leqslant S(F)$ и $\partial F_1 \approx \partial F$.

Предположим, на границе F' есть две пары центрально-симметричных угловых точек A, A' и B, B'. Разрезав F' отрезками AB, BA', $A'B'$ и $B'A$,

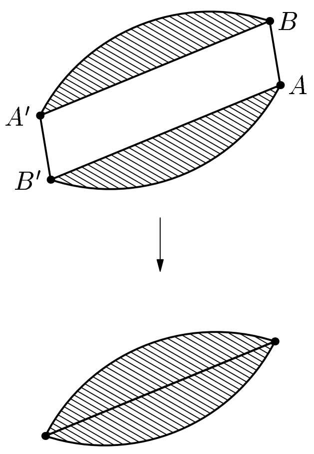

Рис. 2. *Вырезание параллелограмма*

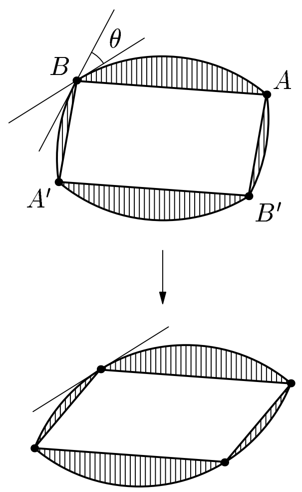

Рис. 3. *Четырехшарнирный метод*

мы получаем параллелограмм $ABA'B'$ и четыре горбушки (см. рис. 3). Не умаляя общности, можно считать, что угол $\angle ABA'$ тупой. Пусть θ есть внешний угол границы F при B. Представьте, что в вершины параллелограмма вставлены шарниры, а стороны сделаны из жесткого материала, при этом горбушки жестко приделаны к сторонам. Давайте повернем сторону AB вокруг B на угол θ так, чтобы угол $\angle ABA'$ увеличился. Тогда площадь параллелограмма $ABA'B'$, а значит и площадь фигуры F_1', образованной параллелограммом и четырьмя горбушками, уменьшится; при этом точки B и B' перестанут быть угловыми.

Повторив эту процедуру столько раз, сколько возможно, выбирая каждый раз новую пару пар центрально-симметричных угловых точек, мы получим фигуру F'' такую, что:

а) F'' имеет не более одной пары угловых точек;

б) F'' центрально-симметрична;

в) $S(F'') \leqslant S(F')$;

г) граница F'' равносоставлена границе F' (в частности, $\partial F'' \approx \partial F$ и у F'' нет отрезков прямой на границе).

Из этих условий нетрудно видеть, что $F'' \cong L_\omega$. Таким образом,

$$S(F) \geqslant S(F') \geqslant S(F'') = S(L_\omega).$$

Отметим, что F'' была получена из F как результат последовательности шагов, в каждом из которых площадь уменьшалась. Значит, в случае равенства $S(F) = S(L_\omega)$ мы вовсе не делали ни одного шага, то есть $F \cong F' \cong F'' \cong L_\omega$. $\square$

Доказательство леммы 10. Пусть F есть фигура описанного типа. Проведем две параллельные прямые a и b так, что вся F лежит в полосе между ними, и обе прямые касаются F. Обозначим через A и B точки пересечения F соответственно с a и b (если прямая соприкасается с F вдоль отрезка, то следует выбрать произвольную точку на отрезке). Пусть α и β обозначают соответственно общую угловую величину всех дуг окружностей на участках границы F от A до B и от B до A против часовой стрелки.

Упражнение 12. Покажите, что пару A, B можно выбрать с дополнительным свойством, что $\alpha = \beta$.

Подсказка. Для этого надо просто прокрутить пару A, B непрерывно вокруг F, так, чтобы A перешло бы в B, а B в A, и воспользоваться тем, что непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения. (Мы советуем посмотреть статью Болтянского и Савина [3], в которой обсуждаются геометрические задачи, в решении которых применяются схожие идеи.)

Теперь мы можем считать, что $\alpha = \beta = \omega/2$. Разрежем F отрезком AB на две части F_- и F_+. Из двух копий F_- можно составить центрально-симметричную фигуру $\widetilde{F}_-$. Аналогично поступим с F_+ и получим фигуру $\widetilde{F}_+$.

Согласно лемме 11 каждая из фигур $\widetilde{F}_-$ и $\widetilde{F}_+$ имеет площадь не меньше, чем линза L_ω. А значит

$$S(F) = S(F_+) + S(F_-) = \frac{1}{2}(S(\widetilde{F}_+) + S(\widetilde{F}_-)) \geqslant S(L_\omega)$$

(см. также рис. 4).

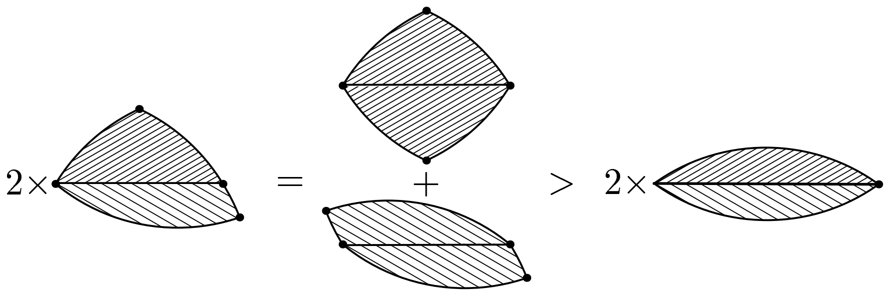

Рис. 4.

Отметим, что равенство может достигаться только в случае, если обе фигуры $\widetilde{F}_-$ и $\widetilde{F}_+$ конгруэнтны L_ω, а значит F имеет не более двух угловых точек и не имеет отрезков прямой на границе, а значит $F \cong L_\omega$. □

4. Круговые многоугольники

Мы приступаем к изучению круговых многоугольников. Начнем с определений:

Определение 13. Выпуклая фигура называется *круговым многоугольником*, если ее граница равносоставлена конечному набору дуг окружностей и отрезков прямой.

Определение 14. Круговой многоугольник M называется *овальным* (или *овалом*), если он обладает следующими свойствами:

а) не имеет отрезков прямой на границе;

б) имеет две перпендикулярные оси симметрии a и b (их точки пересечения с границей M будем обозначать через A, A' и B, B', как показано на рис. 5);

в) если граница M имеет угловые точки, то они находятся на оси a, т.е. в точках A и A';

г) радиусы дуг окружностей, ограничивающей M, монотонно возрастают от A до B.

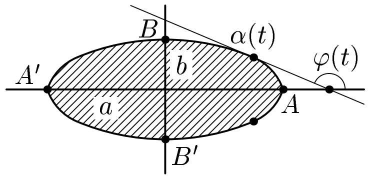

Рис. 5. *Овал*

Легко видеть, что круговой многоугольник овален тогда и только тогда, когда овальна его круговая окрестность.

Теорема 15. *Круговой многоугольник уникальносоставлен тогда и только тогда, когда он овален.*

В следующем разделе мы обобщим этот результат на случай всех выпуклых фигур.

Нетрудно видеть, что в классе круговых многоугольников со стабильно равносоставленной границей есть единственный, с точностью до конгруэнтности, овал. Как и в случаях круга и линзы, теорема 11 для круговых многоугольников немедленно следует из аналога леммы 10:

Лемма 16. *Если круговой многоугольник M имеет границу, стабильно равносоставленную границе овала V, то*

$$S(M) \geqslant S(V).$$

Более того, если $S(M) = S(V)$, то $M \cong V$.

Таким образом, овалы обладают следующим экстремальным свойством: среди всех круговых многоугольников со стабильно равносоставленной границей овалы имеют наименьшую площадь.

Как и в случае с линзой, доказательство будет проведено в два шага; сначала мы докажем аналогичное более слабое утверждение:

Лемма 17. *Если центрально-симметричный круговой многоугольник M имеет границу, стабильно равносоставленную границе овала V, то*

$$S(M) \geqslant S(V).$$

Более того, если $S(M) = S(V)$, то $M \cong V$.

Доказательство леммы 17 проходит индукцией по количеству дуг различных радиусов на границе M, при этом мы считаем угловые точки за дуги нулевого радиуса. Доказательство для круга можно принять за базу индукции, а доказательство для линзы можно рассматривать как часть первого шага в этой индукции (на границе линзы присутствуют дуги радиуса R и радиуса 0). Тем не менее, в доказательстве участвует еще пара дополнительных идей, которые нам не были нужны раньше.

В частности, нам потребуются следующие утверждения, доказательство которых мы предоставляем читателю:

Упражнение 18. Пусть F и G суть выпуклые фигуры с равносоставленной границей, а F_R и G_R — их R-окрестности; тогда $F \sim G$ тогда и только тогда, когда $F_R \sim G_R$.

Упражнение 19. Если выпуклая фигура F имеет границу, равносоставленную границе овала V, то диаметр F не превосходит диаметра V. Более того, в случае равенства диаметров, F конгруэнтна V.

Доказательство леммы 17. Пусть M есть круговой многоугольник с n различными радиусами дуг на границе.

Как и в случае линзы, применив несколько раз «вырезание параллелограмма», мы сводим задачу к случаю, когда на границе M отсутствуют отрезки прямой. В частности, мы можем считать что граница M, уже не только стабильно равносоставлена, но и равносоставлена границе V.

Если на границе кругового многоугольника M нет угловых точек, то существует круговой многоугольник M', такой что $M = M'_R$ (напомним, что M'_R обозначает R-окрестность M'). Таким образом, из упражнения 18 следует, что достаточно доказать лемму для случая, когда на границе M есть угловые точки.

Если у M более одной пары угловых точек, то можно применить несколько раз «Четырехшарнирный метод» и свести задачу к случаю, когда на границе M есть ровно две угловые точки.

Далее, пусть A, A' есть единственная пара угловых точек M, пусть α есть внешний угол при каждой из этих точек, и r_1 есть минимальный ненулевой радиус дуг на границе M. Разрежем границу M на две дуги по точкам A и A' и продолжим оба конца первой из дуг двумя дугами радиуса r_1 с угловой величиной α. К полученной дуге можно приставить вторую из дуг от A до A' до образования выпуклой замкнутой кривой без угловых точек (рис. 6). Обозначим через $\bar{M}$ фигуру, ограниченную полученной кривой.

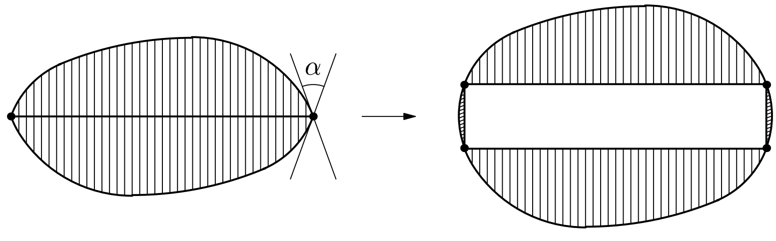

Рис. 6.

Проделаем ту же операцию с овалом V, получим овал $\bar{V}$ с границей равносоставленной $\bar{M}$.

Заметим что при этом

$$S(\bar{V}) - S(V) \geqslant S(\bar{M}) - S(M),$$

причем равенство достигается только если M конгруэнтна V.

Действительно: V получается из $\bar{V}$ добавлением двух круговых сегментов и прямоугольника с одной стороной, равной диаметру $\bar{V}$, и другой, равной $2r_1 \sin(\alpha/2)$. С другой стороны, M получается из $\bar{M}$ добавлением тех же двух сегментов и параллелограмма с одной стороной, не превосходящей диаметра $\bar{V}$ (в силу упражнения 19), и другой стороной, также равной $2r_1 \sin(\alpha/2)$.

Теперь мы получили круговой многоугольник $\bar{M}$ с $n-1$ различными радиусами дуг на границе. По предположению индукции,

$$S(\bar{M}) \geqslant S(\bar{V}).$$

Сложив эти неравенства, получаем

$$S(M) \geqslant S(V).$$

Случай равенства возможен, только если диаметр M равен диаметру V. Значит, в силу упражнения 19, $M \cong V$. □

Следующее доказательство очень похоже на доказательство леммы 10 для случая линзы, но в нём участвует еще один забавный трюк.

Доказательство леммы 16. Пусть M есть круговой многоугольник. Пусть A и B суть точки на границе M, такие, что через них можно провести параллельные прямые так, что вся M будет лежать в полосе между ними. Разрежем M отрезком AB на две части M_- и M_+. Из двух копий M_- составим центрально-симметричную выпуклую фигуру $\widetilde{M_-}$. Аналогично поступим с M_+ и получим фигуру $\widetilde{M}_+$. Давайте обозначим через $\widetilde{V}_+$ и $\widetilde{V}_-$ овалы с границей, стабильно равносоставленной соответственно $\widetilde{M_+}$ и $\widetilde{M_-}$.

Диаметры овалов $\widetilde{V}_+$ и $\widetilde{V}_-$ непрерывно зависят от выбора точек A и B. Таким образом, прокручиванием A и B вокруг M, также как в доказательстве для линзы, можно добиться такого выбора A и B, что диаметры $\widetilde{V}_-$ и $\widetilde{V}_+$ совпадут.

Разрезав $\widetilde{V}_-$ двумя осями симметрии, мы получим четыре четвертинки, конгруэнтные, скажем $\widetilde{V}_{-1/4}$. Аналогично поступим с $\widetilde{V}_-$, получим четыре четвертинки, конгруэнтные $\widetilde{V}_{+1/4}$.

Из двух копий $\widetilde{V}_{-1/4}$ и двух копий $\widetilde{V}_{+1/4}$ можно составить центрально-симметричный круговой многоугольник N, как показано на рис. 7:

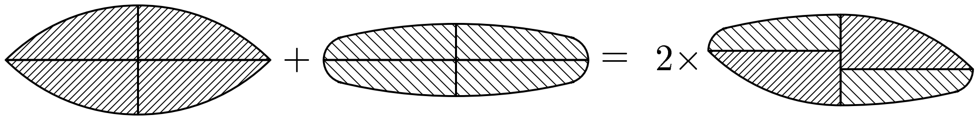

Рис. 7.

Применив лемму 17 к N, получаем:

$$S(M) = S(M_+) + S(M_-) = \frac{1}{2}(S(\widetilde{M}_+) + S(\widetilde{M}_-)) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(S(\widetilde{V}_+) + S(\widetilde{V}_-)) = S(N) \geqslant S(V).$$

Остается проверить, что равенство в обоих этих неравенствах влечет конгруэнтность M и V, что очевидно.

Мы доказали, что любой овальный круговой многоугольник является уникальносоставленной фигурой. Остается еще проверить, что не существует других уникальносоставленных круговых многоугольников. Применив утверждение 5, мы получаем, что каждый круговой многоугольник равносоставлен набору из овала и квадрата. Таким образом, достаточно предъявить две неконгруэнтные выпуклые фигуры, каждая из которых равносоставлена нашему набору из квадрата и овала. Возможность этого построения очевидно следует из теоремы Бойяи – Гервина. □

5. Набросок доказательства общего случая

Это наиболее технический и наименее геометрический раздел статьи. Для его понимания потребуется знание в некотором объеме теории функций вещественного переменного (достаточно первых четырех глав книги [4]), а также элементарных свойств метрики Хаусдорфа (которую мы обозначаем d_H), для компактных подмножеств плоскости (см. например, [8]).

Пусть $\alpha\colon [0,T) \to \mathbb{R}^2$ есть граница выпуклой фигуры, параметризованная длиной в направлении против часовой стрелки. У α определена правая производная $\alpha^+(t)$. Определим угол поворота кривой $\varphi(t)$ как угол от $\alpha^+(0)$ до $\alpha^+(t)$ (измеряемый от 0 до 2π против часовой стрелки). Из выпуклости α следует, что $\varphi(t)$ монотонно возрастающая функция. Это дает возможность определить «верхнюю кривизну» $k(t)$ как верхний предел

$$k(t_0) = \overline{\lim_{t\to t_0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

Так как возрастающая функция имеет производную в почти всех точках, мы получаем, что $k(t)$ конечна для почти всех t.

Определим «нижний радиус кривизны» через $R(t) = 1/k(t)$ (считая $0 = 1/\infty$). Это дает возможность обобщить определение овала (определение 14) на случай произвольной выпуклой фигуры F. Следует только поменять пункт *г*) на следующий:

г̌) *нижний радиус кривизны кривой, ограничивающей F, монотонно возрастают от A до B.*

Это свойство можно переформулировать так: если вы едете на машине от A до B по границе F, то вам придется всё время крутить руль только вправо. Ваши колёса всё время будут повернуты влево, иначе F была бы не выпуклой, но сам руль вам придется крутить вправо, уменьшая угол между передними и задними колесами.

В случае, когда граница F — гладкая кривая, условие *г̌*) совпадает с монотонным возрастанием обычного радиуса кривизны от A до B.

Мы, наконец, готовы сформулировать главный результат этой статьи:

Теорема 20. *Выпуклая фигура уникальносоставлена тогда и только тогда, когда она овальна.*

В доказательстве нам потребуется понятие «профиль выпуклой фигуры». Пусть F есть выпуклая фигура. Обозначим через $\rho_F(r)$ угловую меру участка границы F с нижним радиусом кривизны $\leqslant r$. Функция $\rho_F\colon \mathbb{R}_+ \to [0, 2\pi]$ называется профилем фигуры F.

Например, профиль круга радиуса R есть

$$\rho_K(r) = \begin{bmatrix} 0 & \text{если} & r < R \\ 2\pi & \text{если} & r \geqslant R, \end{bmatrix}$$

а профиль любого многоугольника тождественно равен 2π.

В случае круговых многоугольников профиль границы есть ступенчатая функция. Равенство профилей границ круговых многоугольников равносильно стабильной равносоставленности их границ. В общем случае это уже не так. Тем не менее, «равенство профилей» выпуклых фигур работает почти так же, как «стабильная равносоставленность границ», т. е. верен следующий аналог утверждения 1:

Утверждение 21. *Следующие два свойства пары выпуклых фигур F и G равносильны:*

(*а*) *F и G имеют равные профили границ и равную площадь,*

(*б*) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара фигур F' и G', ε-близких по Хаусдорфу соответственно к F и G и таких, что $F \sim G'$ и $G \sim F'$.*

Кроме того, легко видеть, что в классе выпуклых фигур с равным профилем (не равным тождественно 2π) найдется единственный, с точностью до конгруэнтности, овал.

Также как в случае круговых многоугольников, теорема 20 следует из экстремального свойства овалов, аналогичного лемме 16:

Лемма 22. *Если выпуклая фигура F имеет профиль, равный профилю овала V, то $S(F) \geqslant S(V)$. Более того, если $S(F) = S(V)$, то $F \cong V$.*

Набросок доказательства. Произвольную выпуклую фигуру F можно приблизить последовательностью круговых многоугольников M_i, так что профили M_i сходятся к профилю F. (Это почти равносильно тому, что измеримую функцию на отрезке можно приблизить (по мере) ступенчатой функцией.)

Пусть V_i обозначают овалы, соответствующие M_i. Нетрудно видеть, что V_i сходятся по Хаусдорфу к некоторому овалу V. Более того, полученный овал V имеет тот же профиль, что F. Из леммы 16 получаем $S(V_i) \leqslant S(M_i)$ и, перейдя к пределу, $S(V) \leqslant S(F)$. Остается только показать, что в случае равенства V и F конгруэнтны. Для этого надо слегка уточнить лемму 16:

Лемма 23. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если M есть круговой многоугольник, и V есть соответствующий ему овал, то $d_H(V, M) > \varepsilon h$ влечет $S(M) - S(V) > \delta h^2$, где h обозначает ширину овала V.*

Доказательство состоит из той же последовательности шагов, что и доказательство сильного варианта леммы 3. □

6. Продвинутые упражнения

1. Аффинная уникальносоставленность. Понятие равносоставленности можно также рассматривать для различных групп преобразований плоскости, как, например, для группы параллельных переносов или группы подобий. Довольно интересным случаем является группа $SL(2, \mathbb{R})$ эквиаффинных преобразований, т.е. аффинных преобразований, сохраняющих площадь. В этом случае, такими аффинно-уникальносоставленными фигурами являются только эллипсы.

Для решения этого упражнения вам понадобится понятие «аффинной длины», (см., например, книгу Фейеша Тота [9].)

2. Уникальносоставленные наборы фигур. Уникальносоставленность можно обобщить на наборы из n выпуклых фигур: *набор из n выпуклых фигур называется уникальносоставленным, если из равносоставленности этого набора второму набору из n выпуклых фигур следует, что каждая из фигур первого набора конгруэнтна одной из фигур второго.*

Набор из n выпуклых фигур уникальносоставлен тогда и только тогда, когда он состоит из конгруэнтных между собой овалов.

3. Уникальносоставленные тела.

а) Докажите, что для любого выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$ найдется произвольно близкое (в метрике Хаусдорфа) уникальносоставленное выпуклое тело.

б) Попробуйте найти точный смысл слов «почти все» и доказать, что «почти все выпуклые тела в трехмерном пространстве являются уникальносоставленными». Для этого вам придется узнать, что такое категория Бэра; это можно сделать, почитав книжку [5].

4. Равносоставленность неограниченных фигур. Эту задачу предложил нам А. В. Гиль.

Равносоставленность можно определить для неограниченных фигур, допуская разрезания вдоль конечного числа лучей и отрезков прямых.

а) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Бойяи – Гервина для *бесконечных многоугольников*, т. е. для фигур, ограниченных конечным числом лучей и отрезков. Иначе говоря, найдите необходимое и достаточное условие равносоставленности двух бесконечных многоугольников.

б) Докажите, что если бесконечная выпуклая фигура F уникальносоставлена, то из каждой ее точки исходит ровно один луч, целиком содержащийся в F.

в) Опишите все бесконечные уникальносоставленные выпуклые фигуры.

Авторы выражают благодарность А. В. Гилю, обратившему их внимание на класс задач, связанных с равносоставленностью неограниченных фигур, и Ф. В. Петрову за полезные обсуждения и редактирование окончательного варианта текста.

Список литературы

[1] Болтянский В. Г. *Третья проблема Гильберта.* М.: Наука, 1977.

[2] Болтянский В. Г. *Равновеликие и равносоставленные фигуры.* М.: Гостехиздат, 1956. «Популярные лекции по математике», вып. 22.

[3] Болтянский В. Г., Савин А. П. *Соображения непрерывности и крах гипотезы Борсука* // Квант №3, 1994, с. 3–7.

[4] Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974.

[5] Окстоби Дж. *Мера и категория.* М.: Мир, 1974.

[6] Петрунин А. М., Рукшин С. Е. *Уникальносоставленные выпуклые фигуры* // IX Всесоюзная геометрическая конференция. Кишинев: Штиинца, 1988. С. 242–243.

[7] Петрунин А. М., Рукшин С. Е. *О равносоставленности круговых многоугольников* // Задачи геометрии в целом для погруженных многообразий. СПб: РГПУ, 1991. С. 111–118.

[8] Скворцов В. А. *Примеры метрических пространств*. М.: МЦНМО, 2002. Библиотека «Математическое просвещение», вып. 16.

[9] Фейеш Тот Л. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*. М.: Физматлит, 1958.

[10] Ященко И. В. *Парадоксы теории множеств*. М.: МЦНМО, 2002. Библиотека «Математическое просвещение», вып. 20.

[11] Banach S., Tarski A. *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* // Fundamenta Mathematicae, 1924. Vol. 6. P. 244–277.

[12] Dubins L., Hirsch M., Karush J. *Scissor congruence* // Israel J. Math., 1963. Vol. 1. P. 239–247.

[13] Rukshin S. *Some remarks about Hilbert' third problem and equidecomposable convex figures* // Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de Roumanie, 1998. Vol. 41(89), No 4. P. 285–288.

А. М. Петрунин, Penn State University, USA

С. Е. Рукшин, РГПУ им. Герцена, Городской математический центр для одаренных школьников, Санкт-Петербург
E-mail: `serger@twell.ru`