Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. По веточке ползет червячок со скоростью 1 мм/с, а веточка, в свою очередь, растет со скоростью 1 м/с. Сможет ли червячок проползти всю веточку? (Веточка растет равномерно, так что ее середина удаляется от концов со скоростью 0.5 м/с.) (*А. Д. Сахаров*)

2. Дано n магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и 1 пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот.) (*А. К. Ковальджи*)

3. Узлы k-мерной целочисленной решетки раскрашены в l цветов. Докажите, что найдется прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям решетки, с вершинами одного цвета. Постарайтесь получить оценки на размер области решетки, где можно наверняка найти параллепипед, в зависимости от k и l. (*А. Я. Белов*)

4. Дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{[k/2]}$ при $k > 1$. Докажите, что ни один ее член не делится на 4. (*М. Л. Концевич*)

5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? (*Фольклор*)

6. Рассмотрим всевозможные однокруговые турниры n шахматистов. Для каждого турнира найдем количества $s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n$ очков, набранных игроками, и возьмем в n-мерном пространстве точку с координатами $(s_1, \ldots, s_n)$.

Доказать, что выпуклая оболочка этих точек является $(n-1)$-мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным соответствующему кубу, а его вершины соответствуют турнирам, в которых в любой паре участников набравший больше очков выигрывает в личной встрече.

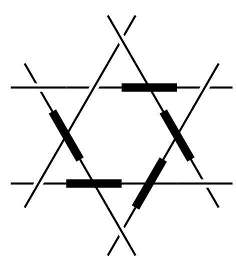
(*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

7. Обозначим через P множество натуральных чисел вида n^k, где $n > 1$, $k > 1$. Найти сумму обратных величин всех чисел из P, уменьшенных на единицу, т. е.

$$\sum_{x \in P} \frac{1}{x-1}\,.$$

(*Л. Эйлер*)

8. Может ли фигура, указанная на рисунке, изображать несколько попарно скрещивающихся прямых, спроецированных на плоскость?



(*А. Б. Скопенков*)

9. Сколько синтаксически правильных выражений из n символов можно составить, если использовать только символы двух переменных X и Y, открывающую (и закрывающую) скобки, запятую (**,**), символ двуместной функции g и символ одноместной функции f?

   Синтаксически правильные выражения определяются индуктивно: X, Y — синтаксически правильные выражения, любое синтаксически правильное выражение имеет вид $f(A)$ или $g(A, B)$, где A, B — синтаксически правильные выражения меньшей длины. (*Фольклор*)

10. При каких α, β, γ существует непрерывная функция, определенная на отрезке длины γ, интеграл от которой по любому отрезку длины α положителен, а по любому отрезку длины β — отрицателен? (*П. Самовол*)

11. Треугольник с углами α, β, γ разбивается биссектрисой одного из углов на две части, одна из которых выбрасывается. С оставшимся треугольником производится та же процедура и т. д. Для каких значений α, β, γ может получиться треугольник, подобный исходному? (*А. Белов, А. И. Галочкин*)