По мотивам задачника «Математического просвещения»

Теорема о блохе и кузнечике

А. А. Заславский А. В. Спивак

Эта заметка посвящена решению задачи 8.5 из задачника «Математического просвещения». Напомним ее формулировку.

> Для иррационального числа $\alpha > 1$ обозначим $N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in N\}$. Для каких натуральных k найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, такие, что множества $N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_k)$ образуют разбиение натурального ряда.

Сразу приведем ответ: $k = 2$. Существование искомых чисел для $k = 2$ вытекает из *теоремы о блохе и кузнечике*, доказанной известным физиком и математиком лордом Рэлеем.

Теорема. Множества $N(\alpha)$, $N(\beta)$ задают разбиение натурального ряда тогда и только тогда, когда числа α и β удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \tag{1}$$

Необходимость условия (1) почти очевидна. Действительно, для любого n количество элементов множества $N(\alpha)$, не превосходящих n, равно $\left[\frac{n+1}{\alpha}\right]$. Предположим, что $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$. Тогда при $n \to \infty$

$$\left[\frac{n+1}{\alpha}\right] + \left[\frac{n+1}{\beta}\right] - n > n\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1\right) - 1 \to \infty,$$

т. е. существует бесконечно много чисел, входящих как в $N(\alpha)$, так и в $N(\beta)$. Аналогично, при $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$ существует бесконечно много чисел, не входящих ни в одно из двух множеств.

Докажем достаточность условия (1). Предположим сначала, что некоторое число $n \in N(\alpha) \cap N(\beta)$. Это означает, что найдутся натуральные x, y, такие, что $[x\alpha] = [y\beta] = n$, т. е. выполнены неравенства

$$\begin{cases} n < x\alpha < n+1, \\ n < y\beta < n+1. \end{cases}$$

Преобразовав эту систему к виду

$$\begin{cases} \dfrac{x}{n+1} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{x}{n}, \\ \dfrac{y}{n+1} < \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{y}{n} \end{cases}$$

и сложив неравенства, получим

$$\frac{x+y}{n+1} < 1 < \frac{x+y}{n},$$

или $n < x+y < n+1$, что невозможно, так как $x, y \in N$.

Аналогично, если некоторое $n \notin N(\alpha) \cup N(\beta)$, то найдутся x, y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x\alpha < n, \\ (x+1)\alpha > n+1, \\ y\beta < n, \\ (y+1)\beta > n+1, \end{cases}$$

из которой после преобразований вытекает $n-1 < x+y < n$.

Теорема Рэлея имеет очевидное

Следствие. Если числа α и β удовлетворяют равенству

$$\frac{m}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = 1 \tag{2}$$

для некоторых натуральных m и n, то $N(\alpha) \cap N(\beta) = \varnothing$.

Действительно, числа $\alpha' = \alpha/m$, $\beta' = \beta/n$ удовлетворяют (1), следовательно, $N(\alpha') \cap N(\beta') = \varnothing$, но $N(\alpha) \subset N(\alpha')$, $N(\beta) \subset N(\beta')$.

Основной нашей целью будет доказательство обратного утверждения: для любых α, β, таких, что $N(\alpha) \cap N(\beta) = \varnothing$, найдутся натуральные m, n, удовлетворяющие равенству (2).

Пусть γ — число, дополнительное к α $\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\gamma} = 1\right)$. Тогда по теореме Рэлея для любого натурального n между $[n\beta]$ и $[(n+1)\beta]$ найдется число, кратное γ, т. е. $\{[n\beta]/\gamma\} > 1 - 1/\gamma$ или

$$\{n\beta/\gamma\} - \{n\beta\}/\gamma \in (1 - 1/\gamma, 1) \pmod 1. \tag{3}$$

Рассмотрим тор $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$ и будем отмечать на нем точки вида $Z_n = (\{n\beta/\gamma\}, \{n\beta\})$. В силу (3) все Z_n лежат вне параллелограмма P, ограниченного прямыми $y = 0$, $y = 1$, $y = \gamma x$, $y - 1 = \gamma(x-1)$. Заполним экземплярами тора всю плоскость, тогда все точки Z_n попадут на прямую $y = \dfrac{\{\beta\}}{\{\beta/\gamma\}}x$. Если угловой коэффициент этой прямой иррационален, точки Z_n всюду плотно заполняют тор, и (3) не выполняется. Действительно, в этом случае числа $\{\beta/\gamma\}$, $\{\beta\}$ и 1 попарно несоизмеримы, и по теореме об обмотке трехмерного тора множество точек вида $(\{\beta/\gamma t\}, \{\beta t\}, \{t\}), t \in R$ плотно в торе $0 \leqslant x, y, z < 1$. Соответственно, точки Z_n всюду плотно заполняют грань этого тора $z = 0$. Аналогично доказывается, что если угловой коэффициент рационален, но прямая пересекает какой-нибудь из параллелограммов P, (3) также не может выполняться. Из рис. 1 видно, что для того, чтобы прямая не пересекала P, она должна пройти через какую-то из точек $(m, m-1)$, где $m > (m-1)\gamma$.

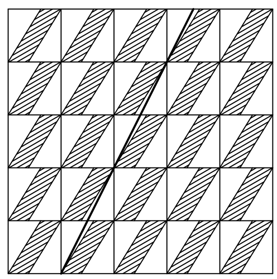

Рис. 1.

Таким образом, имеем $\{(m-1)\beta\} = \{m\beta/\gamma\}$ или $(m-1)\beta = m\beta/\gamma + n$, что равносильно искомому утверждению.

Теперь уже совсем просто установить, что $k = 2$ единственный ответ к задаче 8.5. Действительно, предположим, что натуральный ряд можно разбить на $k > 2$ множеств вида $N(\alpha)$. Тогда существуют три числа α, β, γ, такие, что множества $N(\alpha)$, $N(\beta)$, $N(\gamma)$ попарно не пересекаются, и по доказанному утверждению найдутся натуральные m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, такие, что выполнены равенства

$$\begin{cases} \dfrac{m_3}{\beta} + \dfrac{n_2}{\gamma} = 1, \\ \dfrac{n_3}{\alpha} + \dfrac{m_1}{\gamma} = 1, \\ \dfrac{m_2}{\alpha} + \dfrac{n_1}{\beta} = 1. \end{cases}$$

Эти равенства можно рассматривать, как систему линейных уравнений относительно $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$. Поскольку определитель системы равен $m_1m_2m_3 + n_1n_2n_3 > 0$, она должна иметь единственное, и причем рациональное, решение, что невозможно.

Из приведённого рассуждения следует также, что никакое множество $N(\alpha)$ не может быть разбито на 2 или больше множеств такого же вида.

А. А. Заславский, ЦЭМИ РАН,
email: zaslavsky@mccme.ru
А. В. Спивак, гимназия №1543,
email: spivak@mccme.ru