

Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником

Е. Д. Куланин

Покажем, что для любой точки окружности Эйлера произвольного треугольника существует семейство окружностей, проходящих через эту точку, аналогичное «семейству Фейербаха» из одноименной статьи Л. А. Емельянова и Т. Л. Емельяновой в №6 «Математического просвещения».

Гипербола, действительная и мнимая полуоси которой равны, называется *равносторонней*. Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны, поэтому их можно принять за оси прямоугольной системы координат, в которой ее уравнение запишется в виде $xy = k$. Таким образом, обычная школьная гипербола, совпадающая с графиком обратной пропорциональной зависимости $y = k/x$, является равносторонней. Пара перпендикулярных прямых также является равносторонней гиперболой.

Если коника (кривая второго порядка) задана уравнением $Q(x, y) = 0$, где

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

то она является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда $a+c=0$.

Из теоремы о пучке коник, проходящих через четыре точки [4], следует, что в общем случае есть ровно одна равносторонняя гипербола, проходящая через четыре заданные точки.

Исключением являются четверки точек, образованные вершинами треугольника и его ортоцентром, и четверки точек, лежащие на одной прямой. Любая коника, проходящая через вершины треугольника и его ортоцентр, является равносторонней гиперболой. Справедливо и обратное:

Предложение 1. *Ортоцентр любого треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу, лежит на этой же гиперболе.*

Подробнее об этих фактах см. [1, с. 149].

Пусть D — точка в плоскости треугольника ABC , A_1, B_1, C_1 — пересечения прямых DA, DB, DC с прямыми BC, CA, AB соответственно. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 называются *чевианами*. Будем называть треугольник $A_1B_1C_1$ *чевианным треугольником* точки D относительно треугольника ABC , а окружность, описанную около чевианного треугольника, — *чевианной*.

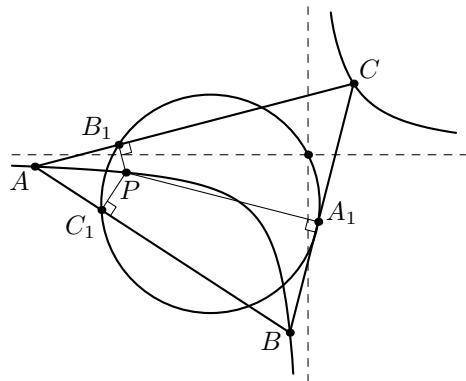


Рис. 1.

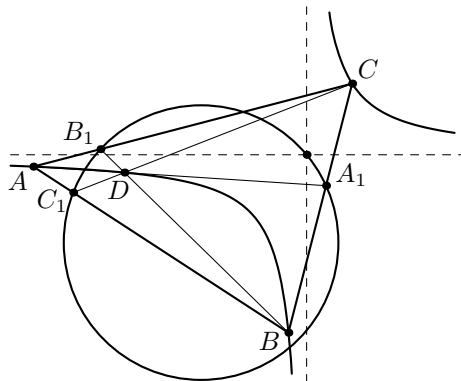


Рис. 2.

Пусть P — точка в плоскости треугольника ABC , A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ называется *педальным треугольником* точки P относительно треугольника ABC . Если точка P совпадает с одной из вершин треугольника ABC , то педальный треугольник этой точки вырождается в высоту, проходящую через эту вершину. Для точек описанной окружности педальный треугольник также вырождается: основания перпендикуляров лежат на одной прямой, которая называется *прямой Симсона*.

Окружность, описанную около педального треугольника, будем называть *педальной*.

Равносторонние гиперболы, описанные около треугольника, оказываются связанными с педальными и чевианными окружностями (см. рис. 1 и рис. 2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть P — произвольная точка равносторонней гиперболы, отличная от точек A, B, C той же гиперболы. Тогда педальная окружность точки P относительно треугольника ABC проходит через центр этой гиперболы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, B, C, D — точки на равносторонней гиперболы. Тогда чевианная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через центр этой гиперболы.

В следующих двух разделах мы докажем теоремы 1 и 2.

1. ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ПЕДАЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом разделе мы доказываем теорему 1. Следующий хорошо известный факт читателю предлагается проверить самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Обозначим через AN_1, BN_2, CN_3 высоты непрямоугольного треугольника ABC . Докажите, что треугольники $AN_2N_3, BN_3N_1, CN_1N_2$

подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $|\cos \angle A|$, $|\cos \angle B|$, $|\cos \angle C|$ соответственно.

ЛЕММА 1. *Центры всех равносторонних гипербол, проходящих через вершины треугольника ABC , лежат на окружности Эйлера (окружности девяти точек) этого треугольника.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство, принадлежащее А. Акопяну.

Пусть D — четвертая (кроме A, B, C) точка пересечения гиперболы и описанной около треугольника ABC окружности, A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC , которые по предложению 1 лежат на той же гиперболе. Обозначим через R радиус описанной около треугольника ABC окружности. Используя упражнение 1, получаем

$$CD' = 2R|\cos \angle BCA| = 2R|\cos \angle BDA| = DC'.$$

Так как $CD' \parallel DC'$, то $CDC'D'$ — параллелограмм, т. е. $C'D' \parallel CD$ и $C'D' = CD$. Следовательно, четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ центрально симметричны. Их центр симметрии является центром гиперболы. При этом он совпадает с серединой отрезка DD' и, значит, лежит на окружности Эйлера треугольника ABC (а также треугольников BCD, CDA и DAB). \square

Из леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любых четырех точек, ни одна из которых не совпадает с ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках, окружности Эйлера четырех треугольников с вершинами в любых трех из этих четырех точек имеют общую точку.*

ЛЕММА 2. *Отрезок, соединяющий середину одной из сторон треугольника с основанием высоты, лежащей на другой его стороне, виден из одной из двух остальных середин сторон под углом, равным тому углу треугольника, на сторонах которого лежат эта последняя середина и основание высоты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отрезок H_2M_1 является медианой прямоугольного треугольника BH_2C , проведенной из вершины прямого угла H_2 (рис. 3), поэтому

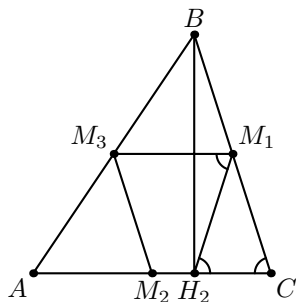


Рис. 3.

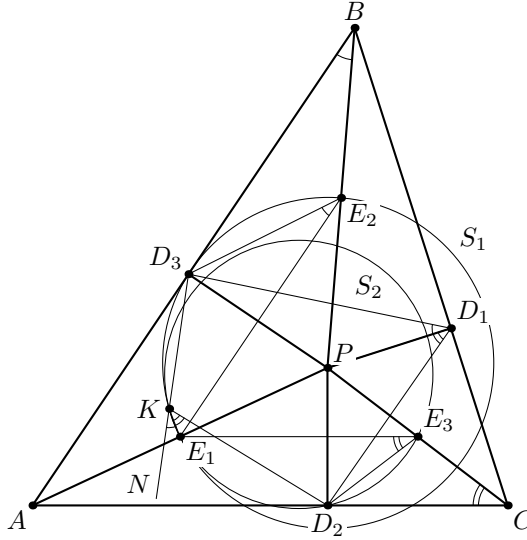


Рис. 4.

$H_2M_1 = CM_1$ и $\angle M_1H_2C = \angle M_1CH_2$, но $M_1M_3 \parallel AC$ как средняя линия треугольника ABC , откуда получаем $\angle M_3M_1H_2 = \angle M_1H_2C = \angle M_1CH_2 = \angle ACB$, что и требовалось. \square

ТЕОРЕМА 3. Пусть P — точка, отличная от центра описанной окружности и ортоцентра треугольника ABC . Тогда педальная окружность точки P проходит через точку пересечения окружностей Эйлера треугольников APB , BPC , CPA .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через E_1, E_2, E_3 середины отрезков AP, BP, CP , а через D_1, D_2, D_3 — проекции точки P на стороны BC, CA, AB соответственно (рис. 4). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей Эйлера S_1 и S_2 треугольников APB и APC (отличная от E_1). Поскольку у четырех окружностей Эйлера, о которых идет речь в теореме, согласно следствию 1 есть общая точка, то это точка K . Поэтому достаточно показать, что точка K лежит на описанной окружности $D_1D_2D_3$. Рассмотрим угол NKD_2 , смежный с углом D_2KD_3 , и докажем, что $\angle NKD_2 = \angle D_2D_1D_3$. Тогда

$$\angle D_2D_1D_3 + \angle D_2KD_3 = \angle D_2D_1D_3 + 180^\circ - \angle NKD_2 = 180^\circ,$$

а это и означает, что точки K, D_1, D_2, D_3 лежат на одной окружности. Действительно, $\angle NKD_2 = \angle NKE_1 + \angle E_1KD_2$, но $\angle NKE_1 = \angle D_3E_2E_1$, поскольку четырехугольник $D_3E_2E_1K$ вписан в окружность S_1 , а $\angle E_1KD_2 = \angle E_1E_3D_2$, как вписанные, опирающиеся на дугу E_1D_2 окружности S_2 . В свою очередь по лемме 2 имеем $\angle D_3E_2E_1 = \angle ABP = \angle D_3BP$, $\angle E_1E_3D_2 = \angle ACP = \angle D_2CP$. Так как $\angle PD_1B = \angle PD_3B = 90^\circ$, то около четырехугольника D_1BD_3P можно описать окружность, откуда получаем, что $\angle D_3BP = \angle D_3D_1P$. Аналогично,

$\angle D_2CP = \angle D_2D_1P$. Итак,

$$\begin{aligned}\angle NKD_2 &= \angle NKE_1 + \angle E_1KD_2 = \angle D_3E_2E_1 + \angle E_1E_3D_2 = \\ &= \angle D_3BP + \angle D_2CP = \angle D_3D_1P + \angle D_2D_1P = \angle D_2D_1D_3,\end{aligned}$$

что и требовалось. Другие случаи взаимного расположения точек A, B, C и P рассматриваются аналогично. \square

Так как точка пересечения окружностей Эйлера треугольников ABC, BPC, CPA совпадает с центром равносторонней гиперболы, проведенной через точки A, B, C, P , то из теоремы 3 вытекает теорема 1.

Отметим еще одно следствие теорем 1 и 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Одна из точек пересечения чевианной и pedalной окружностей произвольной точки P , отличной от вершин треугольника ABC , лежит на окружности Эйлера этого треугольника.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем через точки A, B, C и P равностороннюю гиперболу Γ_P . Тогда по теореме 2 чевианная окружность точки P проходит через центр K гиперболы Γ_P , лежащий на окружности Эйлера треугольника ABC , а согласно теореме 1 pedalная окружность точки P также проходит через центр K этой гиперболы. \square

2. ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ЧЕВИАННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Автору было известно только аналитическое доказательство теоремы 2. А. Заславскому и А. Акопяну удалось придумать геометрическое доказательство этой теоремы, которое приводится ниже.

ЛЕММА 3. *Пусть даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. A', B', C' — точки пересечения, соответственно, B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 , A_1B_1 и A_2B_2 . Если треугольник $A'B'C'$ перспективен как треугольнику $A_1B_1C_1$, так и треугольнику $A_2B_2C_2$ (с центрами перспективы D_1 и D_2), то точки $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ лежат на одной конике.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ в квадрат. Точка A' лежит на пересечении прямых B_1C_1 и A_1D_1 , точка C' — на пересечении прямых A_1B_1 и D_1C_1 . Поэтому точки A' и C' при этом преобразовании переходят в бесконечно удаленные точки, соответствующие перпендикулярным направлениям, а четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ переходит в прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Кроме того, центром как квадрата, так и прямоугольника будет образ точки B' . Очевидно, что коника, проходящая через вершины квадрата и одну вершину прямоугольника, проходит и через три остальные вершины прямоугольника. \square

ТЕОРЕМА 4. *Пусть дан треугольник ABC и точка P , отличная от его ортоцентра. Тогда центры вписанной и невписанных окружностей чевианного*

треугольника P относительно ABC лежат на равносторонней гиперболе, проходящей через A, B, C, P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A'B'C'$ — чевианный треугольник точки P , I — центр его вписанной окружности, I_1, I_2, I_3 — центры внеписанных окружностей. Тогда треугольники ABC и $I_1I_2I_3$ удовлетворяют условиям леммы — они перспективны треугольнику $A'B'C'$ с центрами перспективы P и I соответственно. Следовательно, точки $A, B, C, P, I_1, I_2, I_3, I$ лежат на одной конике. Эта коника является равносторонней гиперболой, поскольку I — ортоцентр треугольника $I_1I_2I_3$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По теореме 4 центры внеписанных окружностей чевианного треугольника I_1, I_2, I_3 лежат на гиперболе. Так как чевианная окружность является окружностью Эйлера треугольника $I_1I_2I_3$ (вершины чевианного треугольника — основания высот треугольника $I_1I_2I_3$), то по лемме 1 она проходит через центр гиперболы. \square

3. ЕЩЕ РАЗ О СЕМЕЙСТВЕ ФЕЙЕРБАХА

Покажем теперь, как из теоремы 2 следует результат о «семействе Фейербаха», полученный Л. Емельяновым и Т. Емельяновой. Проведем через вершины A, B, C треугольника ABC и центр I вписанной в него окружности равностороннюю гиперболу Γ_L . Обозначим через J точку Жергонна, а через N — точку Нагеля, т. е. точку пересечения чевиан, основаниями которых служат точки касания внеписанных окружностей со сторонами (а не с продолжениями сторон) треугольника ABC . Напомним, что для точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, выражение $(AC/BC) : (AD/BD)$ называется двойным отношением и обозначается $(ABCD)$. При этом отношение AC/BC считается положительным, если точка C лежит на отрезке AB , и отрицательным в противном случае. Говорят, что точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, если их двойное отношение равно -1 . Проведем из вершины A треугольника ABC биссектрисы AL и AL_1 внутреннего и внешнего углов при вершине A соответственно. Тогда точки B, C, L, L_1 образуют гармоническую четверку. В самом деле, по свойствам биссектрис внутреннего и внешнего угла треугольника $BL/LC = AB/AC$, $BL_1/L_1C = -AB/AC$, откуда $(ABCD) = -1$.

Пусть I — центр вписанной, а I_a — центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC , L — основание биссектрисы AL , I'_a, I' и A' — прямоугольные проекции точек I_a, I, A на сторону BC . В треугольнике ABL отрезки AI и AI_a являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине A , поэтому четверка A, L, I, I_a — гармоническая. Так как при параллельном проектировании двойное отношение сохраняется, то точки A', L, I', I'_a также образуют гармоническую четверку, а соответствующие лучи AA', AL, AI', AI'_a — гармонический пучок. Ясно, что на сторонах CA и AB треугольника ABC располагаются еще две аналогичные гармонические четверки, которым соответствуют гармонические пучки лучей, исходящих из вершин B и C . Это означает, что ортоцентр H и точки I, J, N проектируются из каждой

вершины треугольника ABC четырьмя лучами, образующими гармонический пучок. Поэтому точки H, I, J, N лежат на кривой второго порядка, проходящей через вершины треугольника ABC .

Но любая кривая второго порядка, которая проходит через вершины треугольника и его ортоцентр, является равносторонней гиперболой, т. е. совпадает в данном случае с гиперболой Γ_I . Таким образом, мы доказали, что точки J и N лежат на гиперболы Γ_I . Тогда описанная окружность чевианного треугольника точки J , совпадающая с вписанной окружностью треугольника ABC , проходит по теореме 2 через центр гиперболы Γ_I , лежащий согласно лемме 1 на окружности Эйлера треугольника ABC . Но по теореме Фейербаха вписанная окружность касается окружности Эйлера, т. е. имеет с ней единственную общую точку F , поэтому центр гиперболы Γ_I совпадает с точкой Фейербаха F .

Итак, описанная окружность чевианного треугольника любой точки, лежащей на Γ_I , проходит через точку F . В частности, окружность, описанная около оснований биссектрис треугольника ABC , проходит через F . Поскольку точка Нагеля N лежит на Γ_I , то точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника ABC и точка F также лежат на одной окружности, которую мы будем обозначать через S_I .

ЛЕММА 4. *Рассмотрим треугольник ABC , вписанный в равностороннюю гиперболу Γ . Пусть X — точка пересечения касательных к гиперболы Γ , проведенных в вершинах A и C треугольника ABC , Y — в вершинах A и B , и Z — в вершинах A и B ; P — произвольная точка гиперболы Γ , отличная от A, B, C ; $P_1 = AP \cap BC$, $P_2 = BP \cap AC$, $P_3 = CP \cap AB$. Тогда прямые P_2P_3 , P_3P_1 , P_1P_2 проходят через точки X, Y, Z соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вырожденный вписанный шестиугольник $BVACCP$. Тогда $X = BV \cap CC$, $P_3 = VA \cap CP$, $P_2 = AC \cap PB$ и по теореме Паскаля точки X, P_3, P_2 лежат на одной прямой. Аналогично показывается, что прямые P_3P_1 и P_1P_2 проходят через точки Y и Z соответственно. \square

Так как ортоцентр треугольника ABC лежит на любой равносторонней гиперболы, описанной около треугольника ABC , то прямые, содержащие стороны его ортоцентрического треугольника, проходят через точки X, Y, Z . Другими словами, точки X, Y, Z лежат на прямых, содержащих стороны ортоцентрического треугольника и для их определения достаточно найти точки пересечения прямых, содержащих стороны чевианного треугольника точки P , с соответствующими прямыми, содержащими стороны ортоцентрического треугольника ABC .

Легко видеть, что в случае $\Gamma = \Gamma_I$ точки X, Y, Z совпадают с полюсами A_{00}, B_{00}, C_{00} из статьи Емельяновых.

ЛЕММА 5. *Если равносторонние гиперболы, описанные около треугольника ABC , имеют общий центр, то они совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — точка, симметричная одной из вершин треугольника ABC относительно общего центра гипербол и отличная от ортоцентра ABC . Тогда равносторонние гиперболы Γ_1 и Γ_2 имеют 4 общие точки A, B ,

C, D , ни одна из которых не является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных, и поэтому совпадают. \square

ТЕОРЕМА 5. Пусть P — точка, отличная от вершин A, B, C треугольника ABC ; AP_1, BP_2, CP_3 — чевианы, пересекающиеся в точке P ; H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC ; $X = P_2P_3 \cap H_2H_3$, $Y = P_1P_3 \cap H_1H_3$, $Z = P_1P_2 \cap H_1H_2$; Γ_P — равносторонняя гипербола, проведенная через точки A, B, C, P ; AT_1, BT_2, CT_3 — чевианы, пересекающиеся в точке T , причем прямые T_2T_3, T_1T_3, T_1T_2 проходят через точки X, Y, Z соответственно. Тогда точка T лежит на гиперболе Γ_P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем через точки A, B, C, T равностороннюю гиперболу Γ_T . По лемме 4 точки X, Y, Z совпадают с точками пересечения соответствующих касательных к гиперболам Γ_P и Γ_T в вершинах A, B, C треугольника ABC , т.е. гиперболы Γ_P и Γ_T имеют общие касательные в точках A, B, C . Обозначим через M_1, M_2, M_3 середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC . Тогда прямые M_1X, M_2Y, M_3Z пересекаются в центре гипербол Γ_P и Γ_T . Так как гиперболы Γ_P и Γ_T имеют общий центр, то по лемме 5 они совпадают. Таким образом, точка T лежит на гиперболе Γ_P . \square

СЛЕДСТВИЕ 3. В случае, когда точка P из теоремы 5 совпадает с центром I вписанной окружности треугольника ABC , все точки T , удовлетворяющие условию теоремы 5, лежат на равносторонней гиперболе Γ_I с центром в точке Фейербаха F треугольника ABC .

Заметим, что в следствии 3 говорится о тех точках T , описанная окружность чевианного треугольника которых принадлежит «семейству Фейербаха» из статьи Емельяновых.

Обозначим через I_a, I_b, I_c центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA, AB треугольника ABC , а через F_a, F_b, F_c — точки касания вневписанных окружностей с центрами I_a, I_b, I_c с окружностью Эйлера треугольника ABC .

СЛЕДСТВИЕ 4. Если точка P из теоремы 5 совпадает соответственно с точками I_a, I_b, I_c , то все точки T , удовлетворяющие условиям теоремы 5, лежат соответственно на равносторонних гиперболах $\Gamma_{I_a}, \Gamma_{I_b}, \Gamma_{I_c}$ с центрами в точках F_a, F_b, F_c .

Пусть A_a, B_a, C_a — точки касания вневписанной окружности с центром I_a треугольника ABC с прямыми BC, CA, AB соответственно. Аналогично определим A_b, B_b, C_b и A_c, B_c, C_c , и пусть A_I, B_I, C_I — точки касания вписанной окружности I с этими же прямыми в той же последовательности. Как было показано выше, точки A_a, B_b, C_c и F лежат на одной окружности S_I .

ЗАДАЧА 1. Докажите, что каждая из следующих трех четверок точек: A_I, B_c, C_b, F_a ; A_c, B_I, C_a, F_b ; A_b, B_a, C_I, F_c лежит на одной окружности.

Обозначим эти окружности через S_a, S_b, S_c соответственно. Будем в дальнейшем называть окружности S_I, S_a, S_b, S_c окружностями четырех точек треугольника ABC . Из полученных результатов следует

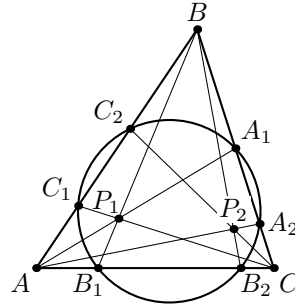


Рис. 5.

ТЕОРЕМА 6. Шестнадцать точек касания вписанной и трех внеписанных окружностей треугольника с прямыми, содержащими стороны этого треугольника, и его окружностью Эйлера лежат на четырех других окружностях по четыре точки на каждой окружности.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что каждая из следующих шести четверок точек: A_a, A_I, F_a, F ; A_b, A_c, F_b, F_c ; B_b, B_I, F_b, F ; B_c, B_a, F_c, F_a ; C_c, C_I, F_c, F ; C_a, C_b, F_a, F_b лежит на одной окружности.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что точки касания вписанной и трех внеписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью Эйлера лежат на двух окружностях, по восемь точек на каждой окружности, причем центры этих окружностей совпадают с серединами полуокружностей, на которые делит гипотенуза описанную окружность этого треугольника.

4. ТЕОРЕМА ФЕЙЕРБАХА И ЧЕВИАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

При доказательстве того, что центр гиперболы Γ_I совпадает с точкой Фейербаха F , мы использовали теорему Фейербаха. Покажем, что на самом деле теорему Фейербаха можно вывести из теоремы 2. Для этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 6. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC , A_2, B_2, C_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 5). Тогда отрезки AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, т. е. также являются чевианами треугольника ABC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC , то по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1, \quad (1)$$

и, так как произведения секущих, проведенных к окружности из одной точки,

на их внешние части равны, то $AC_2 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AB_1$, $BA_2 \cdot BA_1 = BC_2 \cdot BC_1$, $CB_2 \cdot CB_1 = CA_2 \cdot CA_1$. Перемножив почленно эти равенства, получим

$$AC_2 \cdot AC_1 \cdot BA_2 \cdot BA_1 \cdot CB_2 \cdot CB_1 = AB_2 \cdot AB_1 \cdot BC_2 \cdot BC_1 \cdot CA_2 \cdot CA_1$$

или

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1,$$

т. е. по теореме, обратной теореме Чебы, отрезки AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке. \square

Итак, в общем случае чевианная окружность треугольника является чевианной окружностью двух точек. Через вершины треугольника и каждую из этих точек можно провести единственную равностороннюю гиперболу. Согласно теореме 2 общая чевианная окружность этих точек проходит через центры проведенных гипербол, лежащие на окружности Эйлера треугольника, и поэтому имеет с окружностью Эйлера две общие точки.

Поскольку вписанная и три внеписанные окружности являются чевианными окружностями одной точки, то каждая из этих окружностей имеет с окружностью Эйлера треугольника единственную общую точку, т. е. касается окружности Эйлера.

5. ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

Прямые, проходящие через вершину данного угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла, называются *изогональными относительно этого угла*.

ТЕОРЕМА 7. Пусть P — точка, не лежащая на описанной окружности треугольника ABC . Тогда прямые, изогональные соответственно прямым PA , PB , PC относительно углов A , B , C этого треугольника, пересекаются в одной точке P' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_1B_1C_1$ — педальный треугольник точки P , не лежащей на описанной окружности треугольника ABC (рис. 6), P_1 , P_2 , P_3 — точки, симметричные P относительно середин сторон B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 соответственно. Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ гомотетичен серединному треугольнику треугольника $A_1B_1C_1$ с центром гомотетии в точке P и коэффициентом гомотетии, равным 2. Следовательно треугольник $P_1P_2P_3$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$, причем стороны этих треугольников соответственно параллельны. Далее, поскольку четырехугольники $PB_1P_1C_1$, $PC_1P_2A_1$, $PA_1P_3B_1$ являются параллелограммами, то P_1 , P_2 , P_3 — ортоцентры треугольников AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 соответственно (рис. 7). Поэтому $AP_1 \perp B_1C_1$, $BP_2 \perp C_1A_1$, $CP_3 \perp A_1B_1$. Но $B_1C_1 \parallel P_2P_3$, $C_1A_1 \parallel P_1P_3$, $A_1B_1 \parallel P_1P_2$, откуда вытекает, что $AP_1 \perp P_2P_3$, $BP_2 \perp P_1P_3$, $CP_3 \perp P_1P_2$. Таким образом, прямые AP_1 , BP_2 , CP_3 содержат

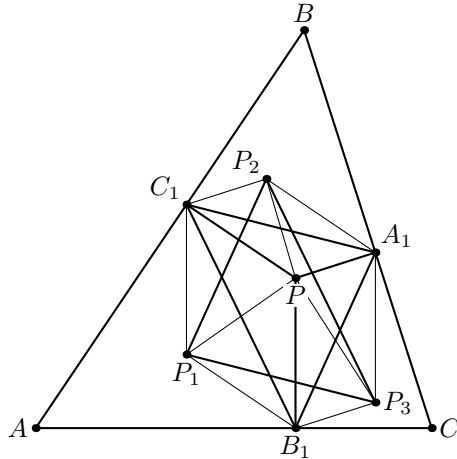


Рис. 6.

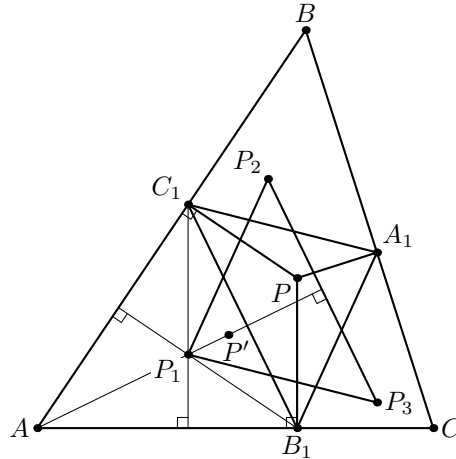


Рис. 7.

высоты треугольника $P_1P_2P_3$ и, следовательно, пересекаются в точке P' — ортоцентре треугольника $P_1P_2P_3$. Поскольку $\angle PA_1B = \angle PC_1B = 90^\circ$, то BP — диаметр описанной окружности треугольника BC_1A_1 , а, как легко убедиться, прямые, содержащие высоту и диаметр описанной окружности треугольника и выходящие из вершины одного и того же угла треугольника, изогональны относительно этого угла. Естественно, что то же самое справедливо для углов A и C треугольника ABC . \square

Точки P и P' называются *изогонально сопряженными* точками относительно треугольника ABC или просто *изогональными* точками. Точки описанной окружности треугольника оказываются изогонально сопряженными бесконечно удаленным точкам.

ТЕОРЕМА 8. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Тогда прямые, изогональные прямым PA , PB , PC относительно углов A , B , C , параллельны. Верно и обратное: прямые, изогональные параллельным прямым, проходящим через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через AP_1 , BP_2 , CP_3 прямые, изогональные прямым AP , BP , CP соответственно (см. рис. 8). Изогональность влечет равенства углов

$$\angle CAP = \angle BAP_1, \quad \angle CBP = \angle ABP_2, \quad \angle BCP = \angle ACP_3, \quad \angle BAP = \angle CAP_1.$$

Углы $\angle CAP$ и $\angle CBP$ опираются на дугу PC и потому равны. Аналогично, $\angle BAP = \angle BCP$. Поэтому $\angle P_2BA = \angle P_1AB$, $\angle P_1AC = \angle P_3CA$, что и означает параллельность прямых AP_1 , BP_2 , CP_3 .

Доказательство обратного утверждения аналогично. \square

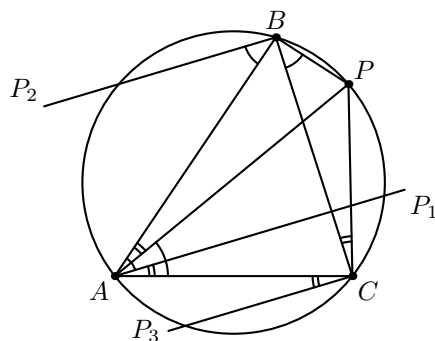


Рис. 8.

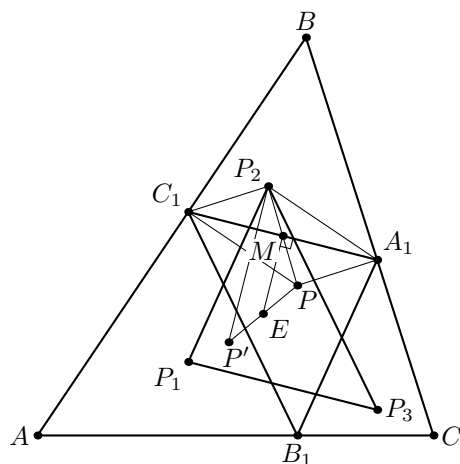


Рис. 9.

ТЕОРЕМА 9. Пусть P и P' — точки, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC , а $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ — педальные треугольники этих точек. Тогда вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ лежат на одной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что точка E — середина отрезка PP' — является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку $(P')' = P$, то отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Используем те же обозначения, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Обозначим через M середину A_1C_1 . Так как четырехугольник $PA_1P_2C_1$ — параллелограмм (см. рис. 9), то M — середина отрезка PP_2 , но $P_2P' \perp P_1P_3$ и $P_1P_3 \parallel A_1C_1$, поэтому серединный перпендикуляр к A_1C_1 совпадает со средней линией треугольника $P'PP_2$, т. е. точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1C_1 .

Аналогично показывается, что E лежит на серединных перпендикулярах к A_1B_1 и B_1C_1 и, таким образом, совпадает с центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. \square

Легко видеть, что центр O описанной окружности треугольника и точка H пересечения его высот изогонально сопряжены. Поэтому из теоремы 9 получаем, что середины сторон произвольного треугольника и основания его высот лежат на одной окружности (окружности Эйлера).

Подобные треугольники AH_2H_3 , BH_3H_1 , CH_1H_2 являются уменьшенными копиями треугольника ABC (см. упр. 1), поэтому можно рассматривать точки, одинаково расположенные относительно треугольников ABC , AH_2H_3 , BH_3H_1 , CH_1H_2 .

ТЕОРЕМА 10. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на стороны (или продолжения сторон) BC, CA, AB треугольника ABC ; P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные P относительно середин сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$; H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC . Тогда точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при симметрии относительно биссектрисы угла B треугольник BH_3H_1 переходит в треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии равным $\cos \angle ABC = \cos \beta$, то одинаково расположенные точки треугольников ABC и BH_3H_1 лежат на прямых, изогональных относительно угла B . Ранее было показано (см. доказательство теоремы 7), что прямые BP и BP_2 изогональны, а P_2 — ортоцентр треугольника BC_1A_1 . С другой стороны, PB — диаметр описанной окружности треугольника BC_1A_1 . Применяя результат упражнения 1 к треугольнику BC_1A_1 , приходим к выводу, что BP_2 — диаметр окружности, описанной около треугольника, подобного BC_1A_1 с коэффициентом подобия $\cos \beta$. Значит, $PB = BP_2 \cos \beta$, и точки P и P_2 одинаково расположены относительно треугольников ABC и BH_3H_1 . \square

Комбинируя предыдущие теоремы, получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC ; точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$ соответственно. Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ равен педальному треугольнику $A_1B_1C_1$ точки P относительно треугольника ABC , причем стороны треугольников $P_1P_2P_3$ и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны.

Перейдем к доказательству следующего важного утверждения.

ТЕОРЕМА 11. Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC , не лежащая на его описанной окружности; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H ; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH ; P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P относительно треугольников $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC$ соответственно. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC ,

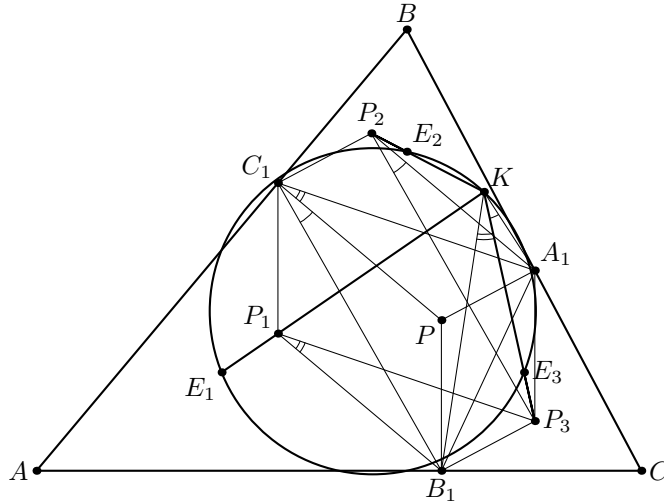


Рис. 10.

через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O . Точки E_1, E_2, E_3 являются центрами описанных окружностей треугольников $T_1 = AH_2H_3, T_2 = BH_3H_1, T_3 = CH_1H_2$ соответственно. Поэтому прямые E_iP_i одинаково расположены с прямой OP относительно треугольников T_i, ABC соответственно. Значит, они изогональны прямым ℓ_i , проходящим через E_i параллельно OP . (Напомним, что подобие, совмещающее треугольники ABC и, скажем, T_1 , является композицией гомотетии с центром в A и отражения относительно биссектрисы угла A .) По теореме 8 получаем, что прямые E_iP_i проходят через точку K на описанной окружности треугольника $E_1E_2E_3$, т. е. на окружности Эйлера треугольника ABC .

Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC , $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$. Так как P_2 и P_3 — ортоцентры треугольников A_1BC_1 и B_1CA_1 (см. теорему 10 и доказательство теоремы 7), то $\angle P_2A_1P_3 = 180^\circ - \angle P_2A_1B - \angle P_3A_1C = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$. Далее, $\angle P_2KP_3 = \angle E_2KE_3 = 180^\circ - \alpha = \angle P_2A_1P_3$ (напомним, что треугольник $E_1E_2E_3$ гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии H , поэтому $\angle E_2E_1E_3 = \angle BAC = \alpha$). Из равенства углов P_2KP_3 и $P_2A_1P_3$ следует, что точки P_2, K, A_1, P_3 лежат на одной окружности. Аналогично показывается, что точки P_3, B_1, P_1, K также лежат на одной окружности.

Теперь можно найти угол B_1KA_1 : $\angle B_1KA_1 = \angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1$, но $\angle B_1KP_3 = \angle B_1P_1P_3$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу P_3A_1 окружности $B_1P_1KP_3$, а $\angle P_3KA_1 = \angle P_3P_2A_1$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу P_3A_1 окружности $A_1P_3P_2K$. Как известно из доказательства теоремы 7,

четырехугольники $P_1C_1PB_1$, $P_1C_1A_1P_3$, $B_1C_1P_2P_3$, $C_1P_2A_1P$ являются параллелограммами, поэтому $\angle B_1P_1P_3 = \angle PC_1A_1$ и $\angle P_3P_2A_1 = \angle B_1C_1P$ как углы с соответственно параллельными сторонами.

Итак, окончательно получаем $\angle B_1KA_1 = \angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1 = \angle B_1P_1P_3 + \angle P_3P_2A_1 = \angle PC_1A_1 + \angle B_1C_1P = \angle B_1C_1A_1$, т. е. $\angle B_1KA_1 = \angle B_1C_1A_1$ и поэтому точка K лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство существенным образом опирается на рис. 10. Точки K и C_1 могут находиться по разные стороны от прямой A_1B_1 . В этом случае аналогичными рассуждениями можно доказать, что $\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1KB_1 = 180^\circ$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорему 11 можно переформулировать следующим образом: Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC ; $АН_1$, $АН_2$, $АН_3$ — его высоты, пересекающиеся в точке H ; E_1 , E_2 , E_3 — середины отрезков $АН$, $ВН$, $СН$; O — центр описанной окружности треугольника ABC ; ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 — прямые, параллельные прямой OP и проходящие через точки E_1 , E_2 , E_3 соответственно; ℓ'_1 , ℓ'_2 , ℓ'_3 — прямые, изогональные ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 относительно треугольника $E_1E_2E_3$. Тогда прямые ℓ'_1 , ℓ'_2 , ℓ'_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC , через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC .

УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите теорему 11 для тупоугольного и прямоугольного треугольников.

Поскольку для всех точек P , лежащих на фиксированной прямой, проходящей через центр O описанной окружности треугольника ABC , точка K окружности Эйлера этого треугольника будет одной и той же, то из теоремы 11 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть ℓ — прямая, проходящая через центр O описанной окружности треугольника ABC . Тогда описанные окружности педальных треугольников всех точек P , лежащих на прямой ℓ , имеют общую точку K , принадлежащую окружности Эйлера треугольника ABC .

Из доказательства теоремы 11 следует также, что различным прямым, проходящим через центр описанной окружности, будут соответствовать различные точки окружности Эйлера.

6. ТЕОРЕМА ФЕЙЕРБАХА И ПЕДАЛЬНЫЕ ОКРУЖНОСТИ

Как уже говорилось, педальные треугольники точки P и изогонально сопряженной ей точки P' имеют общую описанную окружность (теорема 9). Из этого факта и теоремы 11 следует, что эта описанная окружность пересекает окружность Эйлера треугольника ABC в двух точках K и K' , причем K — это точка пересечения прямых E_1P_1 , E_2P_2 , E_3P_3 , а K' — точка пересечения прямых $E_1P'_1$, $E_2P'_2$, $E_3P'_3$ (P_1 , P_2 , P_3 — точки, одинаково расположенные с P , а P'_1 , P'_2 , P'_3 — с P' относительно треугольников $АН_2Н_3$, $ВН_3Н_1$, $СН_1Н_2$, ABC).

Если прямая PP' проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC , то, как ясно из сказанного выше, точки пересечения K и K' общей

описанной окружности педальных треугольников изогонально сопряженных точек P и P' будут совпадать, т. е. описанная окружность педальных треугольников точек P и P' будет касаться окружности Эйлера треугольника ABC . Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть P и P' — изогональные относительно треугольника ABC точки такие, что прямая PP' проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC . Тогда общая педальная окружность точек P и P' касается окружности Эйлера треугольника ABC .

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, тогда педальная окружность точки I совпадает со вписанной окружностью этого треугольника. Поскольку точка I изогонально сопряжена самой себе, то из наших рассуждений следует, что вписанная окружность треугольника касается окружности Эйлера этого треугольника (предположение о наличии второй точки пересечения вписанной окружности с окружностью Эйлера приводит к противоречию, так как в этом случае должна существовать точка I , изогонально сопряженная с I и отличная от I).

Аналогично, центры внеписанных окружностей I_a , I_b , I_c являются изогонально самосопряженными точками и поэтому внеписанные окружности также касаются окружности Эйлера данного треугольника.

Итак, нами доказана еще раз теорема Фейербаха.

Геометрическое место точек P таких, что прямая PP' , где P' — точка, изогональная P , проходит через центр описанной окружности треугольника, называется кубикой Мак-Кэя этого треугольника ([5, с.575]). Поэтому обобщение теоремы Фейербаха можно сформулировать следующим образом: педальная окружность любой точки кубики Мак-Кэя данного треугольника касается окружности Эйлера этого треугольника.

7. ИЗОГОНАЛЬНЫЙ ОБРАЗ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Вспомнив, что изогональные точки P и P' имеют общую педальную окружность (теорема 9), и учитывая следствие 6 и теорему 1, получим еще одно утверждение.

ТЕОРЕМА 12. Изогональным образом прямой ℓ , проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC и не содержащей его вершин, является равносторонняя гипербола, описанная около этого треугольника, причем асимптотами этой гиперболы являются прямые Симсона точек пересечения прямой ℓ с описанной окружностью треугольника ABC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку P на прямой ℓ и изогонально сопряженную ей точку P' . Проведем через P' , A , B , C равностороннюю гиперболу Γ . Центр этой гиперболы лежит на окружности Эйлера и на общей педальной окружности точек P и P' . У этих двух окружностей есть, вообще говоря, две

общие точки, одна из которых, назовем ее K , лежит на всех педальных окружностях точек прямой OP , а вторая (K') — на всех педальных окружностях точек прямой OP' . Центр гиперболы Γ совпадает с K (если двигать точку по гиперболе, то K' будет меняться).

Повторив это рассуждение для любой другой точки P на прямой ℓ и применив лемму 5, получаем утверждение теоремы. \square

СЛЕДСТВИЕ 8. *Геометрическим местом точек P , педальная окружность которых проходит через точку K окружности Эйлера треугольника ABC , является объединение равносторонней гиперболы с центром в точке K , описанной около треугольника ABC , но без точек A, B, C , и прямой ℓ , изогональной этой гиперболе.*

Из следствия 8 вытекает, что к «семейству Фейербаха» из статьи Емельяновых можно добавить семейство педальных окружностей точек P , лежащих либо на равносторонней гиперболе Γ_I , проходящей через центр I вписанной окружности треугольника ABC и имеющей своим центром точку Фейербаха F , либо на прямой OI , где O — центр описанной окружности треугольника ABC . Аналогичные факты справедливы и для других точек Фейербаха F_a, F_b, F_c (точки касания со вневписанными окружностями).

На равносторонней гиперболе Γ_I , описанной около ABC , лежат, кроме вершин A, B, C , центр вписанной окружности I , точка Жергонна J , точка Нагеля N и естественно ортоцентр H . Выбирая любые 4 точки из указанных 7 (кроме тривиальной комбинации A, B, C, H) и рассматривая чевианные и педальные окружности одной из этих 4 точек по отношению к треугольнику с вершинами в трех остальных, получим с учетом следствия 2, что эти окружности пройдут через точку Фейербаха F , совпадающую с центром гиперболы Γ_I . Аналогичные факты справедливы и для остальных точек Фейербаха F_a, F_b, F_c .

Рассмотрим теперь равностороннюю гиперболу Γ_O , являющуюся изогональным образом прямой Эйлера OH треугольника ABC . Эта гипербола проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC и точку L , изогональную точке пересечения медиан треугольника ABC . Как известно (см. [5, 7]), точка L называется точкой Лемуана. Для нахождения центра этой гиперболы используем следующую теорему В. Тебо из сборника «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly» [2, с.81].

ТЕОРЕМА. *Пусть AN_1, BN_2, CN_3 — высоты треугольника ABC . Тогда прямые Эйлера треугольников $AN_2N_3, BN_3N_1, CN_1N_2$ пересекаются в такой точке T окружности Эйлера треугольника ABC , для которой один из отрезков TN_1, TN_2, TN_3 равен сумме двух остальных.*

Обобщение теоремы Тебо приведено в [3].

Будем называть точку пересечения прямых Эйлера треугольников $AN_2N_3, BN_3N_1, CN_1N_2$ точкой Тебо треугольника ABC . Из следствия 6 вытекает, что описанные окружности педальных треугольников всех точек P , лежащих на прямой Эйлера, проходят через точку Тебо треугольника ABC , так что она является центром гиперболы Γ_O . Так как точка пересечения медиан G

треугольника лежит на его прямой Эйлера, то описанная окружность педального треугольника точки G проходит через точку Тебо этого треугольника.

Чевианные и педальные окружности всех точек, лежащих на Γ_O , а также педальные окружности всех точек, лежащих на прямой Эйлера OH треугольника ABC , проходят через точку Тебо. На гиперболе Γ_O лежат точки A, B, C, H, O, L . Поэтому, в частности, чевианная окружность точки O , а также чевианная и педальная окружности точки Лемуана L проходят через точку Тебо. Если начертить равностороннюю гиперболу и из любой ее точки как из центра провести окружность, пересекающую эту гиперболу в четырех точках, то для полученных четырех треугольников с вершинами в указанных точках центр гиперболы будет точкой Тебо.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Аналогия между педальными и чевианными треугольниками, которая прослеживается в приведённых выше результатах, не имеет удовлетворительного объяснения. Дело усугубляется еще и тем, что эта аналогия неполна. В частности, вопрос о касании чевианных окружностей с окружностью Эйлера оказывается намного сложнее вопроса о касании педальных окружностей и окружности Эйлера. В последнем случае ответ дает кубика Мак-Кэя. Аналогичное множество для чевианных окружностей устроено гораздо сложнее.

Геометрическое место точек P , чевианная окружность которых проходит через точку K окружности Эйлера ABC , состоит из равносторонней гиперболы Γ с центром в точке K , из которой удалены точки A, B, C , и некоторой кривой L , которую описывает вторая точка P' с той же самой чевианной окружностью, что и P (см. лемму 6), в то время как точка P пробегает гиперболу Γ . Назовем эту кривую L *чевианным образом гиперболы*.

Вопрос о существовании чевианных окружностей, касающихся окружности Эйлера треугольника ABC , сводится к вопросу о существовании равносторонних гипербол, описанных около треугольника ABC и проходящих через обе точки P и P' , т. е. о пересечении гиперболы и ее чевианного образа.

Обозначим через M множество точек, чевианная окружность каждой из которых касается окружности Эйлера данного треугольника. Это множество непусто для любого треугольника, поскольку центры вписанной и невписанных окружностей принадлежат M . С другой стороны, компьютерные эксперименты показывают, что существуют треугольники, множество M которых содержит некоторые дополнительные точки.

Результаты компьютерных экспериментов приводят также к предположению, что если M является кривой, то ее асимптоты — прямые, содержащие медианы треугольника ABC .

Автор выражает благодарность М. Н. Вялому за улучшение изложения и структуры статьи, а также А. Заславскому и А. Акоюну — за предоставленное ими геометрическое доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Глаголев Н. А. *Проективная геометрия*. М.: Высшая школа, 1963.
- [2] *Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly»*. М.: Мир, 1977.
- [3] Куланин Е. Д. *О прямых Эйлера и окружности девяти точек* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №43, 2000.
- [4] Прасолов В. В. *Теорема о пучке коник, проходящих через четыре точки* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 1. 1997. С. 109–114.
- [5] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. М.: МНЦМО, 2001.
- [6] Куланин Е. Д. *Об одном свойстве точек Фейербаха* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №10, 1997.
- [7] Зетель С. И. *Новая геометрия треугольника*. М.: Учпедгиз, 1940.