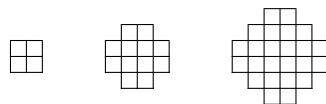


Разбиения на домино

К. П. Кохась*

Мы приведем несколько фактов о разбиении клетчатых фигур на домино и дадим комбинаторные доказательства этих фактов. Больше всего нас интересуют количества разбиений на домино прямоугольников и ацтекских диамантов. Ацтекский диамант ранга n — это «клетчатый ромбик» со стороной n . На рисунке ниже изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3. Ацтекский диамант ранга 4 можно увидеть на рис. 6а, с. 140.



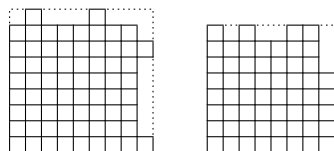
Количество разбиений данной фигуры на домино будем изображать пиктограммой данной фигуры, с символом «#» перед ней. Например, $\# \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = 2$.

Статья написана во многом благодаря XVI Летней конференции турнира городов, где автор представлял задачу о разбиениях клетчатых фигур на домино вместе с С. Берловым, И. Богдановым и К. Куюмжиян, которым он очень благодарен за дружеские советы и ценные замечания.

1. ТЕОРИЯ ДЕТАЛЕЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть n -*деталью* квадрат $n \times n$, у которого, возможно, вырезаны некоторые клетки верхнего или правого края. Пронумеруем строки n -детали числами $1, 2, \dots, n$ снизу вверх, а столбцы — слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца. Будем называть n -деталь *правильной*, если из пары клеток (n, i) и (i, n) при $i < n$ вырезана ровно одна, а также вырезана клетка (n, n) .

На рисунке в качестве примера изображена неправильная 9-деталь и правильная 8-деталь.



*Поддержано грантом НШ-2251.2003.1

Клетки правого столбца и верхней строки квадрата $n \times n$ назовем каемкой. Все клетки каемки, кроме правого верхнего угла (назовем его угловой клеткой), можно разбить на пары симметричных относительно диагонали квадрата.

ТЕОРЕМА 1. *Количество разбиений n -детали на домино нечетно тогда и только тогда, когда деталь — правильная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . База $n = 2$ очевидна. Докажем переход.

Рассмотрим сначала правильную $(n + 1)$ -деталь D . Вырежем из нее доминошки, покрывающие клетки каемки. В результате получится n -деталь, которая будет правильной только в том случае, если каждая из вырезанных доминошек содержала ровно одну клетку каемки. Заметим, что такой способ покрыть клетки каемки детали D доминошками единственен. Итак, среди всех способов покрытия каемки детали D доминошками только один способ приводит (после удаления этих доминошек) к правильной n -детали, а остальные способы приводят к неправильным n -деталю. Применяя предположение индукции, заключаем, что число способов разбить правильную $(n + 1)$ -деталь на домино нечетно.

Пусть теперь D — неправильная $(n + 1)$ -деталь. Из предыдущих рассуждений следует, что количество разбиений $(n + 1)$ -детали на домино нечетно тогда и только тогда, когда удалением доминошек, лежащих *внутри* каемки, из нее можно получить нечетное количество правильных $(n + 1)$ -деталей. Рассмотрим несколько доминошек, целиком лежащих внутри каемки неправильной детали D . Пусть после их удаления из детали D получится правильная. Тогда, так как правильная деталь содержит ровно одну клетку из каждой пары клеток, симметричных относительно диагонали квадрата, каемка детали D содержит клетки, симметричные всем вырезанным из нее доминошкам. Но тогда можно вырезать из каемки D доминошки, симметричные вырезанным в первом способе, и получится *другая* правильная деталь. Таким образом, вырезая из каемки неправильной детали доминошки, можно получить четное количество правильных деталей. Значит, количество разбиений неправильной $(n + 1)$ -детали на домино четно. Индукционный переход доказан. \square

Определение детали и критерий четности числа разбиений детали на домино изобрел Д. В. Карпов в 1997 г. в неопубликованной работе [2] (частично ее результаты опубликованы в [1]). Ему же принадлежит доказательство критерия четности числа разбиений прямоугольника на домино (теорема 2 ниже) с помощью деталей. Сам этот критерий, видимо, стал известен незадолго до работы Д. В. Карпова, например, он упоминается в [10], как проблема, ожидающая комбинаторного доказательства.

ТЕОРЕМА 2. *Количество разбиений прямоугольника $m \times n$ на домино нечетно тогда и только тогда, когда числа $m + 1$ и $n + 1$ взаимно просты.*

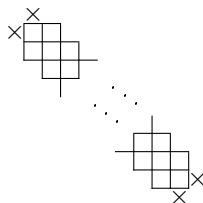
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция, реализующая алгоритм Евклида. Пусть $m > n$. Рассмотрим линию сетки — «ось», которая отсекает от прямоугольника квадрат $n \times n$. Удалим все доминошки, которые она пересекает. Тогда оставшаяся часть квадрата $n \times n$, очевидно, является деталью. Достаточно разобрать

случай, когда эта деталь правильная. В этом случае ось пересекает ровно n доминошек, наша деталь — это прямоугольник $n \times (n - 1)$, а вторая часть — это прямоугольник $(n - n - 1) \times n$, для которого выполнено индукционное предположение. \square

2. ТЕОРИЯ «ФЛИПОВ»

Мы начнем с несложной леммы.

ЛЕММА 1 (О ДИАГОНАЛИ). Пусть дана фигура, которая содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, как показано на рисунке, причем клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре.



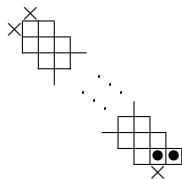
Тогда количество разбиений такой фигуры на доминошки четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Докажем, что найдется квадрат 2×2 , состоящий из двух доминошек замощения и содержащий две клетки этого диагонального ряда (переставляя доминошки в таком квадрате, мы легко разобьем множество разбиений на пары). Действительно, если такого квадрата не найдется, то, просматривая этот ряд клеток, начиная с верхнего левого угла, мы видим, что каждая очередная доминошка, накрывающая диагональную клетку, должна накрывать также либо клетку справа, либо клетку снизу. Дойдя до правого нижнего угла, получаем противоречие. \square

В качестве приложения докажем, например, что количество разбиений квадрата $2n \times 2n$ на домино делится на 4. Действительно, отметим в каждом разбиении на домино самый нижний диагональный квадрат 2×2 . Для каждого возможного положения диагонального квадрата, количество разбиений, содержащих как раз на этом месте отмеченный диагональный квадрат 2×2 , четно — осевая симметрия относительно всё той же диагонали разбивает множество таких разбиений на пары. Кроме того мы можем выбирать, каким из двух способов разбит на доминошки диагональный квадрат. Поэтому общее число разбиений делится на 4.

Докажем еще одну полезную лемму.

ЛЕММА 2 (О ПОЛУДИАГОНАЛИ). Пусть дана фигура, которая содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, показанных на рисунке, причем клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре.



Если удалить из такой фигуры доминошку, помеченную жирными кружочками, то у оставшейся фигуры количество разбиений на домино будет иметь ту же четность, что и у исходной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Рассуждая как и в лемме о диагонали, мы либо найдем диагональный квадрат 2×2 (множество разбиений, содержащих такой квадрат, автоматически распадается на пары), либо убедимся, что последняя доминошка в этом ряду как раз покрывает две отмеченные клетки. \square

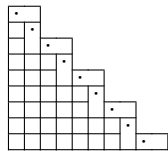
Лемма 2 представляет собой с виду бесхитростный, но довольно мощный инструмент для изучения четности количества разбиений на домино.

ЛЕММА 3 ([10]). Пусть дана последовательность клетчатых фигур

$$H_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad H_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad H_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$$

Фигура H_n получается из H_{n-1} добавлением слева вертикального прямоугольника $2 \times (2n-1)$. Тогда все фигуры H_n разбиваются на домино нечетным числом способов.

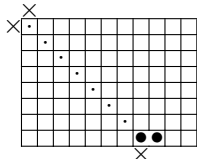
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диагональ, идущую из левого верхнего угла фигуры. Рассуждая как в лемме о полудиагонали, мы можем последовательно удалить из фигуры (снизу вверх) все изображенные доминошки.



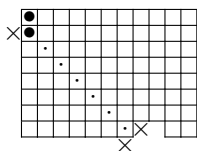
В этом случае незамошенная часть есть перевернутая фигура H_{n-1} и утверждение следует по индукции. \square

С помощью леммы 2 мы можем дать еще одно доказательство теоремы 2.

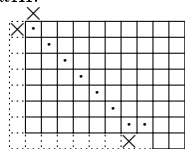
ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Индукция, реализующая алгоритм Евклида. Рассмотрим диагональный ряд клеток, выходящий из угла. По лемме о полудиагонали, достаточно ограничиться изучением четности количества разбиений, содержащих отмеченную доминошку.



Теперь мы можем взять диагональный ряд клеток снизу от только что рассмотренного и, просматривая его снизу вверх, снова применить лемму о полудиagonали.



Продолжая опускать рассматриваемую диагональ, не изменяя четности числа разбиений, мы сможем убрать все клетки первого столбца, а также все клетки нижней строки, лежащие левее отмеченной доминошки. После этого опять можно применить лемму о полудиagonали.



Продолжая дальше, мы уберем клетки второго столбца и второй строки (лежащие левее найденной доминошки). Действуя таким образом, мы уберем в конце концов из нашего прямоугольника $m \times n$ прямоугольную часть размера $(n+1) \times n$. Осталась часть $(m-n-1) \times n$, которая удовлетворяет предположению индукции. \square

Аналогично можно доказать и теорему 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дано два разбиения на домино некоторой фигуры. Допустим, что доминошки, накрывающие некоторую клетку A этой фигуры, не совпадают. *Цепочкой с началом в клетке $A_1 = A$* назовем последовательность доминошек $D_1 = \{A_1, A_2\}$, $E_1 = \{A_2, A_3\}$, $D_2 = \{A_3, A_4\}$, $E_2 = \{A_4, A_5\}$, ..., где доминошки D_1, D_2, \dots принадлежат первому разбиению, а доминошки E_1, E_2, \dots — второму. Эта цепочка естественным образом продолжается до тех пор, пока в ней снова не встретится клетка A_1 .

Можно также рассматривать цепочки, построенные по разбиениям на домино двух пересекающихся фигур. В этом случае цепочка может оборваться, когда мы выйдем за пределы одной из фигур.

Диагональной прямой будем называть прямую с угловым коэффициентом 1, проходящую через центры клеток.

ЛЕММА 4. Пусть дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой. Тогда, если на оси симметрии лежит $2n$ клеток фигуры, то число разбиений на доминошки такой фигуры делится на 2^n .

Отметим, что если на оси симметрии фигуры лежит нечетное число клеток, то и вся фигура состоит из нечетного числа клеток и ее нельзя разрезать на домино.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диагональную ось симметрии фигуры будем в дальнейшем называть просто осью, а осевую симметрию относительно оси — просто

симметрией. Раскрасим клетки диагонали попеременно в черный и белый цвета. Пусть A — одна из черных клеток. Возьмем произвольное разбиение. Найдем в нём «минимальное» множество доминошек, содержащее клетку A и при этом симметричное относительно оси. Это множество можно построить следующим образом. Рассмотрим исходное разбиение, разбиение симметричное ему относительно оси, и построим по этим разбиениям цепочку с началом в клетке A . Нетрудно сообразить, что, кроме клетки A , эта цепочка имеет еще ровно одну клетку, лежащую на оси, причем эта клетка белая (в противном случае построенная цепочка доминошек охватывает симметричную область, разбитую на доминошки, но при этом содержащую нечетное число клеток). Ясно, что если в качестве A взять другую черную клетку оси, то полученное множество не будет пересекаться с построенным ранее. Значит, мы можем построить n непересекающихся множеств, далее так и будем называть их минимальными. Доминошки, не принадлежащие ни одному из этих множеств, будем называть стабильными.

Заметим теперь, что если любое из n минимальных множеств отразить относительно оси, а остальные доминошки разбиения не трогать, то получится новое разбиение на домино. Тогда мы можем разбить всё множество разбиений на домино на блоки по 2^n штук — для каждого разбиения возьмем все его стабильные доминошки, а оставшуюся часть фигуры замостим, пользуясь для каждого из n минимальных множеств выбором — отражать его относительно оси или оставить как есть. Вместе с каждым из 2^n вариантов этого выбора мы получим свое разбиение на домино — всего 2^n штук. \square

Следующая лемма уточняет только что доказанный результат, привнося некоторую структуру во множество разбиений на домино. Для ацтекского диаманта это утверждение доказано в [13] (некомбинаторно), а для произвольной фигуры — в [5] (мы приводим здесь это доказательство).

ЛЕММА 5. *Пусть дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой, и пусть на оси симметрии лежит $2n$ клеток фигуры. Отметим n из этих клеток через одну и поместим в отмеченные клетки произвольным образом числа 0 и 1. Рассмотрим такие разбиения фигуры на домино, которые согласованы со сделанной разметкой следующим образом: в них для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой, вторая клетка доминошки расположена правее или ниже, если эта цифра — 0, и левее или выше — если 1. Тогда для каждой расстановки в отмеченных клетках нулей и единиц количество согласованных с ней разбиений фигуры на домино одно и то же (т. е. не зависит от расстановки).*

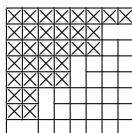
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всю техническую работу мы уже проделали в доказательстве предыдущей леммы. Будем считать, что клетки диагонали попеременно раскрашены в черный и белый цвета и что числа 0 и 1 расставляются на черных клетках. Рассмотрим любую черную клетку. Пусть на ней стоит, например, число 0. Возьмем произвольное разбиение на доминошки, согласованное с разметкой. Наша черная клетка принадлежит минимальному симметричному множеству в этом разбиении. Если симметрично отразить это множество, получится новое разбиение, согласованное с новой разметкой — той, которая

в наблюдаемой черной клетке содержит 1, а в остальных черных клетках — то же, что было до симметрии. Пользуясь такими симметриями, мы сможем построить взаимно однозначное соответствие между любыми двумя множествами согласованных разбиений. \square

Теперь мы можем доказать основную теорему о разбиении квадрата на домино. Эта теорема сначала была доказана некомбинаторными методами (с использованием формулы (1) на с. 129) (см. [8]). Комбинаторное доказательство, приводимое ниже, принадлежит Л. Пачтеру [10].

ТЕОРЕМА 3. *Количество разбиений квадрата $2n \times 2n$ на домино — число вида $2^n(2k+1)^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться разметкой из утверждения леммы 5. Тогда мы можем ограничиться подсчетом разбиений, в которых доминошки, закрывающие отмеченные клетки, закрывают также клетку либо справа, либо снизу от отмеченной, — такие разбиения назовем редуцированными. Вот пример расположения доминошек, накрывающих размеченные клетки в редуцированном разбиении.



Очевидно, количество редуцированных разбиений квадрата на домино в 2^n раз меньше количества всех разбиений.

Если в шахматной раскраске рассматриваемая диагональ состоит из черных клеток, то область над диагональю содержит белых клеток на n больше, чем черных. Поэтому при дальнейшем разбиении на домино все остальные клетки диагонали накрыты доминошками из верхней части. Таким образом, после разбиения на доминошки весь квадрат будет разбит на две части — клетки одной из них помечены крестиками, клетки другой — не помечены. Каждая из этих частей есть в точности фигура H_n из леммы 3. И тем самым количество редуцированных разбиений на доминошки всего квадрата равно $(\# H_n)^2$, а количество всех разбиений — $2^n (\# H_n)^2$. Осталось вспомнить, что по утверждению леммы 3 число $\# H_n$ нечетно. \square

3. АЦТЕКСКИЕ ДИАМАНТЫ

Мы начнем этот раздел с доказательства одного соотношения (теорема 2.1 из [9]), которое обладает несомненной притягательностью и направляет мысли в нужную сторону.

ЛЕММА 6. *Количество разбиений на домино прямоугольника $2n \times 2m$ и фигур, получающихся удалением из него двух или четырех угловых клеток, связаны соотношением*

$$\# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение на домино всего прямоугольника и еще одно разбиение на домино прямоугольника без углов. Возьмем одну из угловых клеток и построим цепочку с началом в этой клетке. Эта цепочка клеток может закончиться только угловой клеткой на стороне, прилегающей к начальной угловой клетке. Аналогичная цепочка, построенная из противоположного угла, закончится в четвертой угловой клетке и не будет пересекаться с первой цепочкой. Сдвинув доминошки в первой цепочке (в обоих разбиениях), мы получим из исходной пары разбиений пару разбиений одного из типов в правой части.

Аналогично определяется обратное отображение. Рассмотрим, например, разбиение на домино всего прямоугольника без двух верхних углов и разбиение на домино прямоугольника без двух нижних углов. Построим цепочку доминошек, начинающуюся в нижней левой угловой клетке (пусть эта клетка черного цвета). Докажем, что эта цепочка может закончиться только в правом нижнем углу. Действительно, она не может закончиться в правом верхнем углу, поскольку тогда другая цепочка (из левого верхнего угла) вообще не сможет нигде закончиться — цепочки не могут пересекаться, а путь к правому нижнему углу «отрезан» первой цепочкой. Также не может наша цепочка клеток закончиться в левом верхнем углу. Действительно, если бы это произошло, то левый верхний угол (белая клетка) был бы второй клеткой в последней доминошке цепочки. Но в нашей цепочке только у доминошек из первого разбиения «вторая» клетка — белая (а у доминошек второго разбиения «вторая» клетка — черная). Но левая верхняя угловая клетка не принадлежит первому разбиению.

Итак, построенная цепочка клеток заканчивается в правом нижнем углу. Аналогично, цепочка клеток, построенная из верхней левой угловой клетки, заканчивается в правом верхнем углу. Поменяв в первой цепочке доминошки, принадлежащие первому разбиению, и доминошки, принадлежащие второму, получим разбиение полного прямоугольника и разбиение прямоугольника без четырех углов. Это и есть требуемое обратное соответствие. Следовательно, построенное отображение является взаимно однозначным. \square

ЛЕММА 7. Пусть дана произвольная связная (ходом ладьи) клетчатая фигура D . И пусть при обходе ее границы встречаются (не обязательно подряд) клетки a, b, c, d , причем в шахматной раскраске клетки a и c черные, а клетки b и d — белые. Тогда

$$\begin{aligned} \#(D)\#(D \setminus \{a, b, c, d\}) &= \\ &= \#(D \setminus \{a, b\})\#(D \setminus \{c, d\}) + \#(D \setminus \{a, d\})\#(D \setminus \{b, c\}). \end{aligned} \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству предыдущей леммы.

Обозначим через T_n количество разбиений ацтекского диаманта ранга n на домино.

Аналогично $\#D \setminus \{a, b, c, d\} = \#T_{n-1}$. Следовательно, соотношение (3), которое мы доказываем, есть в данном случае в точности соотношение (1) из леммы 7. \square

Прежде чем приводить второе доказательство теоремы 4, мы в качестве подготовки рассмотрим его «одномерную» версию, а заодно узнаем некоторые подробности о функциональных соотношениях.

Рассмотрим числовой треугольник Проппа [11]

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & & c & & e & & g & & \dots \\
 & b & & d & & f & & \dots & \\
 & & h & & k & & \dots & & \\
 & & & \ell & & \dots & & & \\
 & & & & \dots & & & &
 \end{array} \quad (4)$$

образованный по правилу: для любых четырех чисел, образующих «ромбик», выполнено соотношение

$$x \begin{smallmatrix} w \\ z \end{smallmatrix} y \quad wz = xy + 1. \quad (5)$$

Например, пусть первая строка этого треугольника состоит из единиц, а вторая — из двоек. Тогда очевидно, что при всех n числа в n -й строке одинаковы, обозначим их f_{2n-2} , и выполнено соотношение

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1. \quad (6)$$

Отсюда $f_0 = 1$, $f_2 = 2$, $f_4 = 5$, $f_6 = 13$, ... Узнаете? Это числа Фибоначчи.

ЛЕММА 8. Числа Фибоначчи удовлетворяют соотношению (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. В самом деле, число Фибоначчи f_n — это количество разбиений прямоугольника $2 \times n$ на домино, потому что эти количества подчинены очевидному рекуррентному соотношению

$$\# \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \square + \# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

А тогда выполнение тождества (6) для чисел Фибоначчи сразу следует из тождества (1): достаточно в лемме 7 в качестве фигуры D взять доску $2 \times (2n+2)$ и рассмотреть клетки, указанные на рисунке.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & & & & d & \\ \hline b & & & & c & \\ \hline \end{array} \quad \square$$

Мы дадим другое, еще более доминошное доказательство этой формулы.

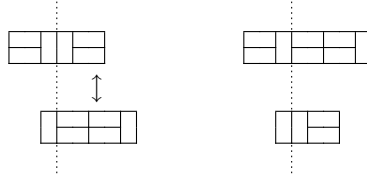
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Рассмотрим всевозможные (упорядоченные) пары разбиений прямоугольника $2 \times 2n$ на домино, а также пары, состоящие из разбиения прямоугольника $2 \times (2n+2)$ и разбиения прямоугольника $2 \times (2n-2)$. Пример таких пар и удобный способ взаиморасположения элементов пары показаны на рисунке.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

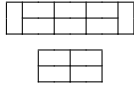
Опишем взаимно однозначное соответствие между этими множествами пар. При этом нам потребуется добавить в первое множество один лишний элемент.

Соответствие устроено очень просто. Если в нижнем прямоугольнике первой пары есть «шов», отрезающий правый блок 2×2 (т. е. если этот блок замощен двумя целыми доминошками), мы передвинем этот блок вверх, «приклеив» к верхнему прямоугольнику. Этот случай изображен выше.

Если же шва нет, т. е. продолжение вниз правой стороны верхнего прямоугольника разрезает в нём какую-то доминошку, мы будем просматривать все вертикальные линии справа налево в верхнем прямоугольнике до тех пор, пока не найдем такой шов, продолжение которого вниз образует шов и в нижнем прямоугольнике. Нетрудно проверить, что такой шов обязательно найдется (в крайнем случае он может проходить по левой стороне нижнего прямоугольника). Найдя шов, мы отрезаем по нему части прямоугольников, расположенные правее, и меняем их местами.



Ясно, что построенное соответствие разным парам замощений прямоугольников $2 \times 2n$ сопоставляет разные пары замощений прямоугольников $2 \times (2n + 2)$ и $2 \times (2n - 2)$, поскольку очевидно, как устроено обратное соответствие: мы просматриваем нижний прямоугольник $2 \times (2n - 2)$, начиная с правой стороны и двигаясь влево, в поисках первого же шва, который разрезает оба прямоугольника, после чего меняем местами отрезанные части. Этого шва не существует лишь в единственном случае, показанном на рисунке.



Для этого случая потребуется в первое множество добавить лишний элемент. \square

Вот замечательное утверждение из [11]. Снова рассмотрим треугольник Проппа (4). Будем считать, что элементы первых двух строк — это независимые переменные, а элементы всех остальных строк — это рациональные функции от них, заданные при помощи соотношения (5). Нетрудно подсчитать, например, что элемент ℓ в треугольнике (4) имеет вид

$$\ell = \frac{hk+1}{d} = \frac{\frac{bd+1}{c} \cdot \frac{df+1}{e} + 1}{d} = bc^{-1}de^{-1}f + c^{-1}e^{-1}f + c^{-1}d^{-1}e^{-1} + bc^{-1}e^{-1} + d^{-1}. \quad (7)$$

Теперь выпишем все разбиения прямоугольника 2×4 на домино и проделаем следующие действия:

1) добавим к каждой короткой стороне прямоугольника горизонтальный отрезок;

2) для каждого узла клетчатой бумаги, находящегося на средней линии прямоугольника, напомним его редуцированную валентность: количество единичных отрезков разбиения, сходящихся в этом узле, минус 3;

3) возьмем полученные упорядоченные наборы из 5 чисел в качестве показателей степеней у переменных b, c, d, e, f в произведении $b^*c^*d^*e^*f^*$.

1 -1 1 -1 1	0 -1 0 -1 1	0 -1 -1 -1 0	1 -1 0 -1 0	0 0 -1 0 0
$bc^{-1}de^{-1}f$	$c^{-1}e^{-1}f$	$c^{-1}d^{-1}e^{-1}$	$bc^{-1}e^{-1}$	d^{-1}

Сравните то, что получилось, с правой частью (7).

ЛЕММА 9. *Наблюдения, сделанные выше, являются общим фактом, а именно:*

1) *рациональные функции из треугольника (4) суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени ± 1 или 0. Все одночлены входят в сумму с коэффициентом 1.*

2) *Одночлены, составляющие функцию из $(n+2)$ -й строки, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями прямоугольника $2 \times 2n$ на доминошки по описанному выше алгоритму.*

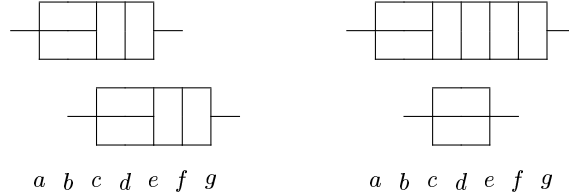
Это совершенно удивительный факт. Глядя на соотношение (5), у нас нет оснований думать, что оно не приводит к появлению громоздких рациональных дробей, а алгоритм построения одночленов по разбиениям на домино вообще выглядит как мистика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функциональный треугольник,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda & & b & & d & & f & & \dots \\
 & a & & c & & e & & g & & \dots \\
 & & h & & k & & \ell & & \dots \\
 & & & p & & q & & \dots \\
 & & & & r & & \dots
 \end{array}$$

состоящий из рациональных функций от переменных $a, b, c, d, e, f, g, \dots$, заданных не при помощи соотношения (5), а с помощью описанного выше комбинаторного алгоритма. Мы ограничимся рассмотрением частного случая $n = 4$. Докажем, что выполнено соотношение «ромбика» $kr = pq + 1$. Для этого воспользуемся взаимно однозначным соответствием из второго доказательства леммы 8. Каждая функция в этом соотношении — сумма одночленов, соответствующих разбиениям определенных прямоугольников на домино. Чтобы получить произведение kr , мы можем перебрать все пары разбиений на домино прямоугольников 2×4 , для каждой такой пары перемножить соответственные одночлены, а потом сложить все, что получилось. Аналогично можно получить произведение pq . Отметим, что при таком вычислении мы должны брать переменные, составляющие одночлены, в соответствии с положением перемножаемых функций в треуголь-

нике. На рисунке снизу приведены примеры пар разбиений, а снизу подписаны переменные, «отвечающие» за каждую вертикаль.



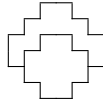
Заметим теперь, что взаимно однозначное соответствие из леммы 8 сопоставляет друг другу пары разбиений, порождающие равные одночлены. Это очевидно: при соответствии мы всего лишь меняем местами по вертикали (!) куски разбиений; при этом суммы редуцированных валентностей контролируемых узлов на одной вертикали не меняются (в том числе, на шве), а только этим и определяются степени переменных в одночлене.

Полное доказательство проводится по индукции. Приведенное рассуждение обосновывает индукционный переход. \square

4. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ АЦТЕКСКОМ ДИАМАНТЕ

Теперь мы дадим второе доказательство теоремы 4, опять проверяя соотношение (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рассмотрим ацтекский диамант ранга $n + 1$. Удаляя два диагональных ряда клеток, идущих вдоль его правой верхней и левой верхней сторон, мы можем получить из него ацтекский поддиамант ранга n .



Назовем этот поддиамант ранга n *нижним*. Аналогично можно получить *верхний*, *левый* и *правый* поддиаманты. Пересечением этих поддиамантов является *центральный* поддиамант ранга $n - 1$.

Рассмотрим множество A , состоящее из пар независимых разбиений ацтекского диаманта ранга n и его центрального поддиаманта ранга $n - 2$. Рассмотрим множество B , которое содержит пары, состоящие из независимых разбиений верхнего и нижнего поддиамантов ацтекского диаманта ранга n , а также пары, состоящие из независимых разбиений левого и правого поддиамантов. Утверждение теоремы сразу следует из следующей леммы.

ЛЕММА 10. *Существует взаимно однозначное соответствие между множествами A и B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение из множества A в множество B . Возьмем элемент множества A , т. е. разбиение ацтекского диаманта ранга n и

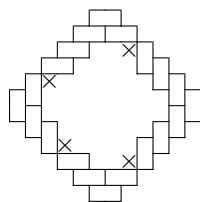
разбиение его центрального поддиаманта ранга $n - 2$. Рассмотрим сначала случай, когда к левой или правой «вершине» диаманта (для определенности — к левой) прилегает блок разбиения вида $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$. В этом случае все доминошки, прилегающие к левому краю диаманта, расположены горизонтально. Тогда построим следующую пару разбиений левого и правого поддиамантов. Отодвинем в сторону все доминошки, прилегающие к левому краю, а самую верхнюю и самую нижнюю из них вообще удалим. У нас останется разбиение правого поддиаманта ранга $n - 1$. А отодвинутый фрагмент объединим с центральным поддиамантом ранга $n - 2$, получится разбиение левого поддиаманта ранга $n - 1$.

$$\text{Diamond} + \square = \text{Diamond} + \text{Diamond} \quad (8)$$

Аналогично определим отображение в случае, когда к верхней или нижней вершине большого диаманта прилегает блок $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$.

В общем случае, который детально описан ниже, отображение устроено так: удалим две доминошки, прилегающие к двум противоположным вершинам большого диаманта (скажем, к левой и правой; при этом выбор между левой–правой и верхней–нижней вершинами зависит от исходных разбиений), наложим диамант и его центральный поддиамант друг на друга и разрежем оба диаманта на две части (условно говоря, верхнюю и нижнюю) таким образом, чтобы разрез проходил только по сторонам доминошек в обоих разбиениях, после чего объединим нижнюю часть большого диаманта с верхней частью маленького (получится разбиение нижнего поддиаманта) и верхнюю часть большого диаманта с нижней частью маленького (получится разбиение верхнего поддиаманта).

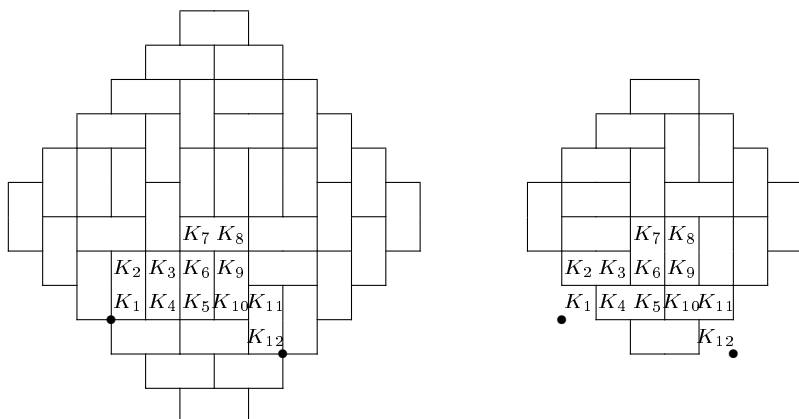
Перейдем к деталям, ну то есть не к деталям, конечно, а к подробностям. Допустим, что разбиение большого диаманта не относится к уже разобранному типу, т. е. сверху и снизу расположены горизонтальные, а слева и справа — вертикальные доминошки. В этом случае на каждой стороне



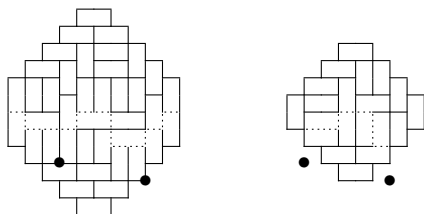
диаманта можно указать *разделяющую* клетку, такую что по одну сторону от нее доминошки ориентированы горизонтально, а по другую сторону — вертикально. На рисунке эти клетки помечены крестиками.

Пусть K_1 — любая из разделяющих клеток. Построим цепочку доминошек, начинающуюся с клетки K_1 . Эта цепочка клеток закончится, когда в ней встретится еще одна разделяющая клетка, скажем, K_m . Клетки K_1 и K_m не могут находиться на противоположных сторонах диаманта, что легко видеть, например, из соображений шахматной раскраски. Таким образом, мы построили цепочку клеток, соединяющую разделяющие клетки на двух соседних сторонах большого диаманта, пусть для определенности это левая и правая нижние стороны. Тогда очевидно, что верхняя граница построенного множества клеток есть ломаная, которая не рассекает ни одной доминошки в обоих разбиениях и при этом делит малый диамант на две части.

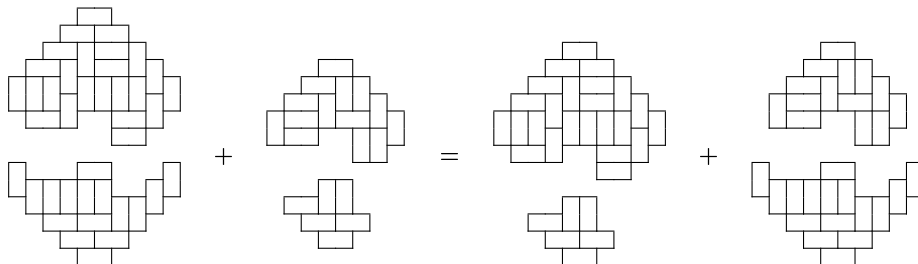
Разрезом малого диаманта назовем часть этой ломаной, лежащую внутри малого диаманта.



Уберем из большого диаманта самую левую и самую правую доминошки. Дополним разрез малого диаманта *подходящими отрезками границы малого диаманта*, чтобы получился разрез большого диаманта слева направо.



Заметим, что одновременно с этим разрезом не может существовать разреза большого диаманта, идущего сверху вниз, поскольку такой разрез пересекал бы построенную цепочку клеток K_i и, следовательно, разрезал бы доминошку в одном из разбиений. С другой стороны, разрезов, идущих слева направо, может быть несколько. Для однозначности конструкции выберем среди них самый низкий. Теперь мы можем разрезать оба диаманта и поменять отрезанные нижние части. Мы получим разбиения верхнего и нижнего диамантов.



Итак, мы описали отображение из множества A в множество B . Очевидно, что это отображение сопоставляет разным элементам множества A разные

элементы множества B . Оно является взаимно однозначным, поскольку нетрудно сообразить, как устроено обратное отображение. Оно устроено так. Для произвольной пары разбиений, скажем, левого и правого поддиамантов рассмотрим малый диамант, являющийся их пересечением.

Если к нижней вершине нижнего поддиаманта прилегает блок $\square\square$, мы имеем дело со случаем, обратным к случаю (8). Если же такого блока нет, начнем строить цепочку клеток, аналогичную цепочке K_i . Первым разбиением будем называть разбиение нижнего диаманта, вторым — верхнего. Рассмотрим разделяющие клетки, прилегающие к нижним сторонам нижнего диаманта (если все доминошки, прилегающие к нижнему краю, ориентированы горизонтально, разделяющей назовем верхнюю из двух клеток в самом левом и в самом правом ряду), пусть K_1 — разделяющая клетка на левой нижней стороне, и пусть она будет черного цвета (при шахматной раскраске). Цепочка клеток с началом K_1 закончится, когда на очередном шаге мы окажемся вне пересечения первого и второго диамантов, причем последняя клетка в этой цепочке будет «второй» клеткой последней доминошки. Если эта доминошка из второго разбиения, то ее вторая клетка черная, и значит, мы оказались на противоположной стороне объединения диамантов. Этого не может быть, поскольку область снизу от построенной цепочки содержит нечетное число клеток, хотя при этом разбиении на доминошки первым способом. Следовательно, эта доминошка из первого разбиения и привела она нас на разделяющую клетку правой нижней стороны, что, собственно, и требуется. Дальше режем, переставляем и готово. Лемма доказана. \square

Из доказанной леммы 10 можно получить простое комбинаторное доказательство утверждения, обобщающего лемму 9, о пирамиде из функций, заданной при помощи соотношения октаэдра, и связи этих функций с разбиениями ацтекского диаманта (так называемый эффект лорановости, см. [11], [7]). Еще одно элементарное доказательство теоремы об ацтекском диаманте, основанное на рассмотрении взвешенных сумм и остроумной индукции, можно прочесть в [12].

5. ПОДСЧЕТ КОЛИЧЕСТВА РАЗБИЕНИЙ НА ДОМИНО

Покажем, как, используя полученные результаты, можно подсчитать количество разбиений клетчатой фигуры на домино [3]. Нам все-таки придется перейти на двойственный язык графов и совершенных паросочетаний. Двойственный граф ацтекского диаманта изображен на рис. 6б, с. 140 (нам не потребуется раскраска вершин и ориентация ребер этого графа, показанные на этом рисунке). Рассмотрим сначала вопрос о подсчете взвешенных сумм паросочетаний для ацтекского диаманта. Это следующая задача. Пусть в двойственном графе для ацтекского диаманта каждому ребру сопоставлено некоторое число — «вес». Весом совершенного паросочетания назовем произведение весов всех входящих в него ребер. Сумму весов всех возможных паросочетаний ацтекского диаманта ранга n обозначим через W_n и будем называть взвешенной суммой паросочетаний.

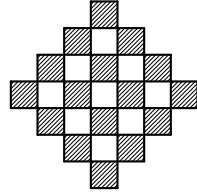
Например, если все веса равны 1, то $W_n = T_n$. А если вес какого-то ребра равен нулю, то мы можем воспринимать это как запрет на участие этого ребра в паросочетаниях. Утверждение теоремы 4 и тождество (3) мгновенно обобщаются на случай взвешенных паросочетаний.

ТЕОРЕМА 5. Пусть дан двойственный граф ацтекского алмаза ранга n . Аналогично определению 3 рассмотрим верхний, нижний, левый, правый и центральный подалмазы, обозначим соответственно через $W_u, W_d, W_\ell, W_r, W_c$ взвешенные суммы паросочетаний для этих подалмазов. Пусть u, d, ℓ, r — веса соответственно самого верхнего, самого нижнего, самого левого, самого правого ребра в исходном графе. Тогда выполнено соотношение.

$$W_n W_c = \ell \cdot r \cdot W_u \cdot W_d + u \cdot d \cdot W_\ell \cdot W_r. \quad (9)$$

Доказательство этой теоремы получается аналогично второму доказательству теоремы 4, если вместе с перекладыванием частей в биекции из леммы 10 рассматривать также произведения весов доминошек, составляющих эти части.

Будем теперь считать, что веса ребер принимают только значения 0 и 1. Тогда подсчет взвешенной суммы паросочетаний ацтекского алмаза можно организовать следующим образом. Для каждой закрашенной на рисунке клетки подсчитаем сумму произведений весов ее горизонтальных ребер и вертикальных ребер.



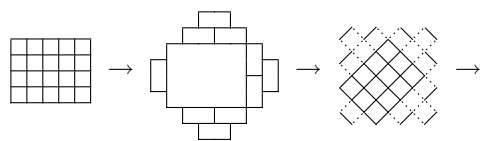
Повернем алмаз на 45° и запишем все подсчитанные числа в виде матрицы $n \times n$, обозначим ее $A^{(n)}$. Введем также вспомогательную матрицу $A^{(n+1)}$, у которой все элементы равны единице. Далее вычислим последовательно матрицы $A^{(n-1)}, \dots, A^{(1)}$ по следующему правилу. Матрица $A^{(k)}$ имеет размер $k \times k$ и вычисляется по матрицам $A^{(k+1)}$ и $A^{(k+2)}$ при помощи соотношений

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{A_{ij}^{(k+1)} A_{i+1, j+1}^{(k+1)} + A_{i+1, j}^{(k+1)} A_{i, j+1}^{(k+1)}}{A_{i+1, j+1}^{(k+2)}}.$$

Тогда матрица $A^{(1)}$ содержит единственное число, которое и есть искомая взвешенная сумма. Приведенное правило прямо следует из рекуррентного соотношения (9) по индукции.

Рассмотрим теперь произвольную доску. Поместим ее в ацтекский алмаз, так, чтобы дополнение этой доски до всего алмаза можно было замостить домино. Фиксируем замощение дополнения фигуры. В двойственном графе ацтекского алмаза рёбрам, принадлежащим двойственному графу доски, сопоставим вес 1. Кроме того сопоставим вес 1 рёбрам, изображающим доминошки

из дополнения доски. Всем остальным рёбрам сопоставим вес 0. Выполнив описанную выше процедуру, мы найдем количество разбиений доски на доминошки. Единственное, что требуется для корректности работы этого алгоритма, — это чтобы «внутренние» элементы матрицы $A^{(n)}$ были не равны 0. Например, для прямоугольника 4×5 получаем



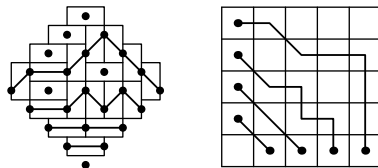
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 42 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow 95.$$

6. ЕЩЕ ОДНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ АЗТЕКСКОМ ДИАМАНТЕ

В заключение мы приведем еще одно доказательство теоремы о диаманте¹⁾, основанное на остроумной переформулировке, которая оставляет надежду найти «совсем уж элементарное» доказательство. В [14] похожая переформулировка применяется к прямоугольным доскам.

Из шахматной доски $(n+1) \times (n+1)$ вырезана клетка a_1 . На всех остальных клетках вертикали a стоят «хромые» шахматные короли. За один ход хромой король может сдвинуться вправо, вниз или вправо-вниз на одну клетку. Тогда существует $2^{n(n+1)/2}$ непересекающихся наборов маршрутов, двигаясь по которым, все n королей могут перейти на клетки нижней горизонтали (порядок ходов несущественен, важен только вид траекторий).

Намек на то, как это относится к диамантам, приведён на картинке.



Для того чтобы найти количество наборов маршрутов воспользуемся следующей теоремой Карлина – Мак-Грегора – Линдстрома (см. [4]).

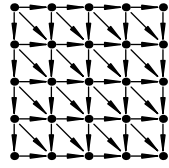
¹⁾Пока статья готовилась к печати, в сети появилось аналогичное доказательство, см. Sen-Peng Eu, Tung Shan Fu. *A simple proof of Aztec diamond theorem*. <http://www.arxiv.org/math.CO/0412041>.

ТЕОРЕМА. Пусть дан ациклический ориентированный граф, имеющий n входов и n выходов, пронумерованных числами от 1 до n , причем в любом наборе из n непересекающихся маршрутов, ведущих от входов к выходам, каждый маршрут соединяет вход и выход с одним и тем же номером. Обозначим через A_{km} число путей, ведущих от k -го входа к m -му выходу. Тогда число наборов из n непересекающихся маршрутов, ведущих от входов к выходам, равно $\det A$.

Вычислим матрицу, описывающую движение королей. Граф возможных перемещений королей изображен ниже. Мы можем считать, что на удаленной угловой клетке доски также стоит король, которому просто не нужно двигаться. Тогда элементы матрицы $A^{(n)} = (A_{km})$ (напомним, что это матрица $(n+1) \times (n+1)$) можно вычислять последовательно по правилу, сходному с правилом вычисления биномиальных коэффициентов в треугольнике Паскаля:

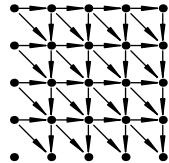
$$A_{km} = A_{k-1,m} + A_{k,m-1} + A_{k-1,m-1}.$$

Так, для доски 5×5 имеем



$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix}$$

Заметим, что то же самое количество маршрутов мы получим, если опять уберем углового короля и запретим движение королей вдоль первой вертикали и вдоль первой горизонтали. Рассмотрим матрицу $B^{(n)}$, описывающую движение королей в этой ситуации.



$$B^{(5)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 2 & 10 & 26 & 50 \\ 2 & 14 & 50 & 126 \end{pmatrix}$$

Как видим, $B^{(5)} = 2A^{(4)}$.

ЛЕММА 11. Обозначим b_{pq} — количество способов, которыми тромой король может пройти с клетки $(1, p)$ на клетку $(q, 1)$, не заходя по пути на нижние $p-1$ клеток первой вертикали (т. е. на клетки $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, p-1)$) и на левые $q-1$ клеток первой горизонтали; а через a_{pq} — количество всех способов, которыми тромой король может пройти с клетки $(1, p)$ на клетку $(q, 1)$. Тогда

$$b_{pq} = 2a_{p-1, q-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим маршруты короля на доске $p \times q$ из левого верхнего угла в правый нижний, при которых он не заходит на первую вертикаль и первую горизонталь. Если первый ход короля — горизонтальный, то король может $a_{p-1, q-1}$ способами добраться к клетке над правым нижним углом и далее сделать ход вниз. Если же первый ход — диагональный, то и после этого король

имеет $a_{p-1}q-1$ вариантов движения к правому нижнему углу. Некоторые из них, правда, приводят его на первую горизонталь (и у этих маршрутов последний ход горизонтальный) — так изменим эти маршруты, передвинув всю их среднюю часть на одну клетку вверх и заменив самый первый (диагональный) ход на горизонтальный, а самый последний (горизонтальный) ход на диагональный. Нетрудно видеть, что это биекция. \square

Числа a_{pq}, b_{pq} — это матричные элементы матриц $A^{(n)}, B^{(n)}$. Из леммы следует, что $B^{(n)} = 2A^{(n-1)}$. А так как величины $\det B^{(n)}$ и $\det A^{(n)}$ выражают одно и то же количество наборов маршрутов, мы получаем рекуррентное соотношение

$$\det A^{(n)} = 2^n \cdot \det A^{(n-1)},$$

из которого сразу следует утверждение теоремы о диаманте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. *Петербургские математические олимпиады*. СПб: Лань, 2003. Задача 97.109.
- [2] Карпов Д. В. *О четности количества разбиений на прямоугольники 1×2* . Не опубликовано. 1997.
- [3] Bass T., Charles K.
<http://www.math.wisc.edu/~propp/reach/charles/octagon.pdf>
- [4] Benjamin A. T., Cameron N. T. *Counting on determinants*.
www.math.hmc.edu/benjamin/papers/determinants.pdf
- [5] Ciucu M. *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry* // J. Combin. Theory Ser. A. V. 77. 1997. No. 1. P. 67–97.
- [6] Elkies N., Kuperbeg G., Larsen M., Propp J. *Alternating sign matrices and domino tilings* // J. of Comb. 1992. V. 1. P. 111–132.
- [7] Fomin S., Zelevinsky A. *The Laurent Phenomenon*.
<http://www.arxiv.org/math.CO/0104241>
- [8] John P., Sachs P., Zarnitz H. *Domino covers in square chessboards* // Zastosowania Matematyki (Applicationes Mathematicae) XIX, 3–4, 1987. P. 635–641.
- [9] Kuo E. *Application of graphical condensation for enumerating matchings* // Theoret. Comp. Sci. V. 319. 2004. P. 29–57.
<http://www.arxiv.org/math.CO/0304090>.
- [10] Pachter L. *Combinatorial approaches and conjectures for 2-disability problems concerning domino tilings of polyminoes* // Electron. J. Combin. V. 4. 1997. R29.
- [11] Propp J. *Frieze-ing and condensation*.
<http://www.math.wisc.edu/~propp/bilinear/domino>

- [12] Propp J. *Generalized domino shuffling*.
<http://www.arxiv.org/math.CO/0111034>
- [13] Propp J., Stanley R. *Domino tilings with barriers* // J. Combin. Theory Ser. A. V. 87, No.2 347–356 (1999).
<http://www.arxiv.org/math.CO/9801067>
- [14] Strehl V. *Counting domino tilings of rectangles via Resultants* // Advances in Appl. Math. 2001. Vol. 27. No. 2–3. P. 597–626.