Тождества Рамануджана

В. В. Прасолов

В этой статье мы расскажем о двух замечательных тождествах Рамануджана (1887–1920)

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}\,,$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}\,.$$

При их доказательстве мы в основном следуем статье [1]. Ключевой момент в этом доказательстве — тот факт, что участвующие в тождествах Рамануджана косинусы являются корнями некоторых кубических многочленов. Этот факт тесно связан с многочленами Чебышёва.

Многочлены Чебышёва определяются следующим образом. Легко проверить, что $\cos n\varphi$ полиномиально выражается через $\cos\varphi$, т. е. существует такой многочлен $T_n(x)$, что $T_n(x)=\cos n\varphi$ при $x=\cos\varphi$. Действительно, формула

$$\cos(n+1)\varphi+\cos(n-1)\varphi=2\cos\varphi\cos n\varphi$$

показывает, что

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

Многочлены $T_n(x)$, определенные этим рекуррентным соотношением и начальными условиями $T_0(x)=1$ и $T_1(x)=x$, обладают нужным свойством. Эти многочлены $T_n(x)$ называют *многочленами Чебышёва*.

Нам понадобятся многочлены Чебышёва $T_n(x)$ при $n\leqslant 5$. Несложные вычисления показывают, что $T_1(x)=x$, $T_2(x)=2x^2-1$, $T_3(x)=4x^3-3x$, $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$, $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$. Наш интерес к ним вызван следующим утверждением.

Утверждение 1. *а) Пусть $n=2k+1$. Тогда число $\cos(2l\pi/n)$ для любого целого l является корнем многочлена $T_{k+1}(x)-T_k(x)$.*

б) Пусть $n=2k$. Тогда число $\cos(2l\pi/n)$ для любого целого l является корнем многочлена $T_{k+1}(x)-T_{k-1}(x)$.

Доказательство. а) Пусть $n=2k+1$ и $\varphi=2l\pi/n$. Тогда

$$T_{k+1}(\cos\varphi)-T_k(\cos\varphi)=\cos(k+1)\varphi-\cos k\varphi.$$

При этом $(k+1)\varphi+k\varphi=(2k+1)\varphi=2l\pi$. Значит, $\cos(k+1)\varphi=\cos k\varphi$.

б) Пусть $n = 2k$ и $\varphi = 2l\pi/n$. Тогда

$$T_{k+1}(\cos\varphi) - T_{k-1}(\cos\varphi) = \cos(k+1)\varphi - \cos(k-1)\varphi.$$

При этом $(k+1)\varphi + (k-1)\varphi = 2k\varphi = 2l\pi$. Значит, $\cos(k+1)\varphi = \cos(k-1)\varphi$.

Вычислим многочлены $T_{k+1}(x) - T_k(x)$ при $k \leqslant 4$. В результате получим $T_2 - T_1 = 2x^2 - x - 1$, $T_3 - T_2 = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, $T_4 - T_3 = 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1$, $T_5 - T_4 = 16x^5 - 8x^4 - 20x^3 + 8x^2 + 5x - 1$. Основываясь на этих вычислениях, несложно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. а) *Числа* $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ *и* $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ *являются корнями многочлена* $4x^2 + 2x - 1$.

б) Числа $\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}$ *и* $\cos\dfrac{6\pi}{7}$ *являются корнями многочлена* $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.

в) Числа $\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\cos\dfrac{4\pi}{9}$ *и* $\cos\dfrac{8\pi}{9}$ *являются корнями многочлена* $8x^3 - 6x + 1$.

Доказательство. а) Согласно утверждению 1 числа $\cos 0 = 1$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ являются корнями многочлена $T_3 - T_2$. Поделив этот многочлен на $x - 1$, получим требуемый многочлен.

б) Числа 1, $\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{6\pi}{7}$ являются корнями многочлена $T_4 - T_3$. Поделив этот многочлен на $x - 1$, получим требуемый многочлен.

в) Числа 1, $\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\cos\dfrac{4\pi}{9}$, $\cos\dfrac{6\pi}{9} = -\dfrac{1}{2}$ и $\cos\dfrac{8\pi}{9}$ являются корнями многочлена $T_5 - T_4$. Поделив этот многочлен на $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$, получим требуемый многочлен.

Теперь нам нужны некоторые свойства кубических многочленов, относящиеся к сумме кубических корней из нулей кубического многочлена.

Утверждение 3. *Пусть* x_1, x_2 *и* x_3 — *корни многочлена* $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. *Тогда уравнение для* $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$ *имеет вид*

$$y^3 + 3(a_1 + 6\sqrt[3]{a_3})y^2 + 3(a_1^2 + 3a_1\sqrt[3]{a_3} + 9\sqrt[3]{a_3^2} - 9a_2)y + (a_1 - 3\sqrt[3]{a_3})^3 = 0.$$

Доказательство. Будем предполагать, что фиксированы значения кубических корней $\sqrt[3]{x_1}$, $\sqrt[3]{x_2}$, $\sqrt[3]{x_3}$ и, например, $\sqrt[3]{x_1x_2} = \sqrt[3]{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_2}$ для этих фиксированных значений. Рассмотрим наряду с y вспомогательную переменную $z = \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_1x_3} + \sqrt[3]{x_2x_3}$. Воспользуемся тождеством

$$(b_1 + b_2 + b_3)^3 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + 3(b_1 + b_2 + b_3)(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) - 3b_1b_2b_3,$$

чтобы вычислить y и z:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 + x_3 + 3\sqrt[3]{yz} - 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = -a_1 + 3\sqrt[3]{yz} - 3\sqrt[3]{a_3}\,, \\ z &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 3\sqrt[3]{yz}\sqrt[3]{x_1x_2x_3} - 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} = \\ &= a_2 - 3\sqrt[3]{yz}\sqrt[3]{a_3} - 3\sqrt[3]{a_3^2}\,. \end{aligned}$$

Домножим первое равенство на $\sqrt[3]{a_3}$ и сложим его со вторым равенством. В результате получим $z = a_2 - (y + a_1)\sqrt[3]{a_3}$. Подставив это выражение в первое равенство, получим

$$y + a_1 - 3\sqrt[3]{a_3} = 3\sqrt[3]{y\bigl(a_2 - (y + a_1)\sqrt[3]{a_3}\bigr)}.$$

Возводя это равенство в куб, получаем требуемое.

Замечание. В действительности мы получаем три уравнения для трех различных значений $\sqrt[3]{a_3}$. Таким образом, получаем 9 значений для $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$, что соответствует различным наборам значений для x_1, x_2 и x_3.

Утверждение 4. *Если $a_1^2 = a_2$, то корни кубического уравнения*

$$x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

вычисляются по формуле $x = \sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1$.

Доказательство. Сделаем замену $x = y - a_1$. В результате исходное уравнение перепишется в виде

$$y^3 + 3(a_2 - a_1^2)y + 2a_1^2 - 3a_1a_2 + a_3 = 0.$$

При условии $a_1^2 = a_2$ получаем $y^3 = a_1^3 - a_3$, т. е. $y = \sqrt[3]{a_1^3 - a_3}$. Таким образом, $x = \sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1$. Здесь подразумевается, что кубический корень принимает три значения, которые получаются друг из друга умножением на кубический корень из единицы.

Утверждение 5. *а) Пусть x_1, x_2 и x_3 — корни многочлена $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$. Тогда коэффициенты уравнения для $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$ удовлетворяют соотношению из утверждения 4.*

б) Аналогичное утверждение справедливо для корней многочлена $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$.

Доказательство. Если x_1, x_2 и x_3 — корни многочлена $x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$, то для $y = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})^3$ получаем уравнение $y^3 + 3a_1y^2 + 3a_2y + a_3 = 0$, где $a_1 = A_1 + 6\sqrt[3]{A_3}$, $a_2 = A_1^2 + 3A_1\sqrt[3]{A_3} + 9\sqrt[3]{A_3^2} - 9A_2$ и $a_3 = (A_1 - 3\sqrt[3]{A_3})^3$ (утверждение 3). Соотношение из утверждения 4 имеет вид $a_1^2 = a_2$, т. е. $3\sqrt[3]{A_3^2} + A_1\sqrt[3]{A_3} + A_2 = 0$. Для данных уравнений это соотношение легко проверяется.

Теперь уже легко доказать тождества Рамануджана

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}\,,$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}}\,.$$

Напомним, что $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{7}$ — корни многочлена $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$, а $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$ — корни многочлена $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ (утверждение 2). Поэтому рассматриваемые суммы трех кубических корней равны кубическим корням из $\sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1$. Для первого уравнения получаем $a_1 = A_1 + 6\sqrt[3]{A_3} = \frac{1}{2} + 6\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{5}{2}$ и $a_3 = (A_1 - 3\sqrt[3]{A_3})^3 = \left(\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^3 = 8$, поэтому $\sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1 = \frac{-\sqrt[3]{189} + 5}{2} = \frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}$. Для второго уравнения $a_1 = 3$ и $a_3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$, поэтому $\sqrt[3]{a_1^3 - a_3} - a_1 = \sqrt[3]{27 + \frac{27}{8}} - 3 = \frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}$.

Список литературы

[1] Шевелев В. С. *Три формулы Рамануджана* // Квант, 1988. №6. С. 52–55.

Прасолов Виктор Васильевич. Независимый московский университет.
E-mail: `prasolov@mccme.ru`
Homepage: `www.mccme.ru/prasolov`