Геометрическая задача, связанная с обобщенными биллиардами

Л. Д. Пустыльников*

В работе решается простая геометрическая задача (обобщающая задачу Герона) и даются приложения ее решения к обобщенным биллиардам.

1. Обобщенная задача Герона

Рассмотрим двумерную плоскость с прямоугольными координатами (x, y) и следующую задачу минимизации выпуклой функции одной переменной на полуоси:

$$f(z) = \sqrt{(x_1 - z)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - z)^2 + y_2^2} + kz \to \min,\ z \geqslant 0,\ (k \geqslant 0). \qquad (1)$$

Предполагается, что $y_i > 0$. Задача (1) на всей прямой при $k = 0$ известна, как задача Герона.

Решение $\widehat{z}$ задачи (1) очевидным образом существует (ибо $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$) и единственно (в силу строгой выпуклости f). Из необходимых условий минимума для функций одного переменного, получаем, что если $\widehat{z} = 0$, то $f'(0) \geqslant \geqslant 0$, а если $\widehat{z} > 0$, то $f'(0) = 0$. В силу выпуклости, эти условия и достаточны. Таким образом, если

$$k \geqslant \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2, \qquad (2)$$

то $\widehat{z} = 0$, если же

$$k < \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2, \qquad (3)$$

то $\widehat{z} > 0$, и это число является единственным решением уравнения

$$k = \frac{x_1 - z}{\sqrt{(z - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x_2 - z}{\sqrt{(z - x_2)^2 + y_2^2}} = \cos\psi_2(z) - \cos\psi_1(z). \qquad (4)$$

В (2) и (3) φ_i обозначает полярный угол точки (x_i, y_i) на плоскости с декартовыми координатами x_i, y_i; углы ψ_i изображены на рис. 4, с. 90.

*Работа частично поддержана РФФИ, проект 02–01–01067.

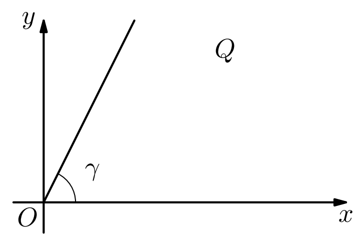

Рис. 1.

Если $k \geqslant 2$, то выполняется неравенство (2) и решением задачи всегда является $\widehat{z} = 0$.

Пусть $0 < k < 2$. Рассмотрим бесконечный сектор Q с вершиной в точке O, имеющий угол γ, $\cos\gamma = k/2$, одна сторона которого есть координатная полуось $x \geqslant 0$, $y = 0$, а другая сторона лежит внутри квадранта $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (рис. 1).

Возможны следующие случаи расположения точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) относительно сектора Q.

1. Точки расположены внутри или на границе сектора Q, причем хотя бы одна лежит внутри сектора. Тогда выполняется неравенство (3), так как $\cos\varphi_i \geqslant k/2$, причем хотя бы одно неравенство — строгое.

2. Точки расположены вне или на границе сектора Q. Тогда выполняется неравенство (2) по аналогичным причинам.

3. Если одна точка лежит внутри сектора, а другая — вне сектора, то может выполняться любое из неравенств (2), (3).

2. Геометрический смысл обобщенной задачи Герона

Напомним известную задачу о переходе через реку. Нужно построить мост через реку с параллельными берегами так, чтобы путь между точками A и B, расположенными по разные стороны реки, был кратчайшим. Мост нужно расположить перпендикулярно берегам. Решение задачи о переходе через реку получается с помощью параллельного переноса, как показано на рис. 2.

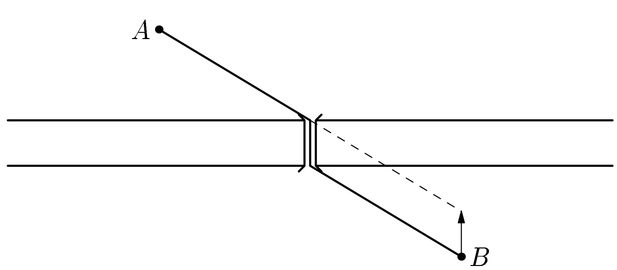

Рис. 2.

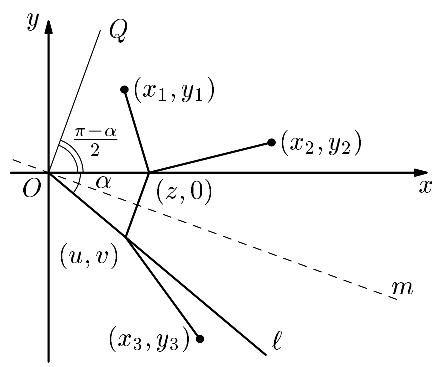

Рис. 3.

При решении задачи о переходе через реку с *непараллельными* берегами появляется обобщенная задача Герона.

Пусть река представляет собой плоский угол величиной α, а мост нужно строить перпендикулярно биссектрисе m этого угла (рис. 3). Введем координаты, как показано на рис. 3: ось абсцисс направим вдоль одного берега реки, река при этом лежит в полуплоскости $y \leqslant 0$. Точки (x_1, y_1) и (x_3, y_3), которые нужно соединить путем, лежат по разные стороны от реки. Точка (x_2, y_2) симметрична точке (x_3, y_3) относительно биссектрисы угла α.

Если конец моста на берегу, проходящем по оси абсцисс, имеет координаты $(z, 0)$, то длина моста равна $2z\sin(\alpha/2)$. Обозначим $k = 2\sin(\alpha/2)$. Получаем, что ответ в задаче о переходе через реку из точки (x_1, y_1) в точку (x_3, y_3) получается из ответа в обобщенной задаче Герона для точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (легко видеть, что первые два слагаемых в (1) — это расстояния между (x_1, y_1) и $(z, 0)$, $(z, 0)$ и (x_3, y_3) соответственно, а третье равно длине моста с концом $(z, 0)$).

Замечание. Построить кратчайшую ломаную циркулем и линейкой в общем случае невозможно ни для обобщенной задачи Герона, ни для задачи о переходе через реку с непараллельными берегами. Однако, для счетного множества пар точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) внутри сектора Q можно с помощью циркуля и линейки найти такую точку $(z, 0)$ на положительной полуоси абсцисс, что z есть минимум в обобщенной задаче Герона. Здесь положение такое же, как в знаменитой задаче о трисекции угла: разделить данный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки. Для произвольного угла это сделать невозмжно, но для счетного множества углов такое построение осуществимо.

3. Обобщенные биллиарды

Классический биллиард — это динамическая система, в которой массивная точка двигается с постоянной скоростью внутри замкнутой области B с кусочно-гладкой границей Γ, а в результате ее отражения от границы нормальная компонента скорости точки меняет знак, сохраняя абсолютную величину, а тангенциальная компонента скорости точки не меняется [6].

Обобщенные биллиарды, рассматриваемые в этой работе, были введены в общем случае в [1], а в случае, когда область есть параллелепипед — в [2]. С физической точки зрения обобщенный биллиард, состоящий из многих частиц, описывает газ в сосуде, который может нагреваться или охлаждаться от стенок сосуда. Поэтому стенки обобщенного биллиарда «дрожат», что описывается функцией $g(\gamma, t)$, определенной на прямом произведении $\Gamma \times \mathbb{R}^1$, ($\mathbb{R}^1$ — прямая линия, $\gamma \in \Gamma$ — точка границы Γ, а величина $t \in \mathbb{R}^1$ обозначает время). Отражение от такой дрожащей стенки происходит согласно следующему закону. Предположим, что траектория точки, которая движется со скоростью v, пересекает Γ в точке $\gamma \in \Gamma$ в момент времени t^*. Тогда в этот момент времени t^* точка приобретает такую скорость v^*, как если бы она подверглась упругому удару с бесконечно тяжелой плоскостью Γ^*, касающейся Γ в точке γ, которая двигается в момент времени t^* вдоль нормали к Γ в точке γ со скоростью $(\partial g/\partial t)(\gamma, t^*)$. Здесь в качестве положительного направления движения плоскости Γ^* выбирается направление внутрь области B.

Если скорость v^*, которую точка приобрела в результате указанного закона отражения, направлена внутрь области B, то после момента времени t^* точка оставит Γ и будет двигаться внутри B до ближайшей точки пересечения с Γ. Если же скорость v^* направлена во вне области B, то после момента времени t^* точка остается неподвижной на Γ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\tilde{t} > t^*$ взаимодействие с плоскостью Γ^* не заставит точку изменить направление нормальной составляющей ее скорости. Последний случай возможен, если функция $(\partial g/\partial t)(\gamma, t)$ при $t = \tilde{t}$ увеличивается скачком:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(\gamma, t)\bigg|_{\tilde{t}+0} - \frac{\partial g}{\partial t}(\gamma, t)\bigg|_{\tilde{t}-0} > 0.$$

В частном случае, когда скорость $(\partial g/\partial t)(\gamma, t^*)$ движения плоскости Γ^* равна 0, обобщенный биллиард сводится к классическому биллиарду, в котором нормальная составляющая скорости точки в момент времени $t = t^*$ только меняет свое направление, но ее абсолютная величина до удара такая же, как и после удара.

В определении обобщенных биллиардов упругий удар точки и плоскости Γ^* может рассматриваться как в рамках классической (ньютоновской) механики, так и в рамках релятивистской механики (теории относительности). В первом случае мы будем называть обобщенные биллиарды — ньютоновскими, а во втором случае — релятивистскими. Для классических биллиардов Биркгофа нет никакой разницы между этими двумя случаями: это одна и та же динамическая система. Для обобщенных же биллиардов существует огромная и принципиальная разница между этими случаями: обобщенный ньютоновский биллиард — это консервативная динамическая система, то есть существует мера, эквивалентная фазовому объему, которая инвариантна относительно динамики биллиарда (см. [2]), в то время, как обобщенный релятивистский биллиард — это диссипативная система, то есть такой инвариантной меры не существует.

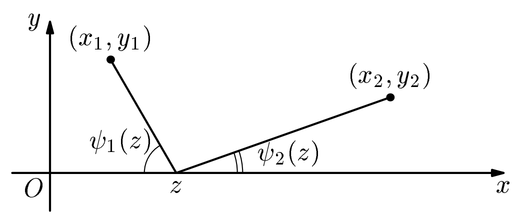

Рис. 4.

Эта принципиальная разница приводит в частности к тому, что в ньютоновском случае энтропия Гиббса — постоянная, тогда как в релятивистском случае энтропия Гиббса и термодинамическая энтропия (то есть энтропия, построенная относительно фазового объема) при общих естественных условиях начинает возрастать ([2]). Обобщенные релятивистские биллиарды были изучены в работах [1]–[5], а обобщенные ньютоновские биллиарды — в работах [1] и [2].

4. Основной закон и экстремальное свойство обобщенных ньютоновских биллиардов

Покажем связь обобщенной задачи Герона с обобщенными ньютоновскими биллиардами.

Предположим, что область B, в которой двигается материальная точка, есть полуплоскость $y \geqslant 0$ плоскости с прямоугольными координатами x, y, и, поэтому граница Γ области B есть ось $y = 0$. Предположим также, что действие границы Γ задается функцией $g(z, t)$, где z — координата точки $(z, 0) \in \Gamma$, t — время (см. п. 3).

Биллиардные траектории классического биллиарда обладают экстремальным свойством: кусок биллиардной траектории, соединяющий точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и проходящий через границу, является кратчайшей двузвенной ломаной, соединяющей точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и проходящей через границу.

Аналогичное экстремальное свойство можно сформулировать и для обобщенных биллиардов.

Рассмотрим кусок биллиардной траектории, проходящей через точку $(c, 0)$, начало которой есть точка (x_1, y_1), а конец — точка (x_2, y_2) (рис. 4). Предположим также, что $x_1 < x_2$, $(c, 0)$ — единственная точка границы, расположенная на траектории между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), вектор скорости в точке (x_1, y_1) есть (u_1, v_1), а вектор скорости в точке (x_2, y_2) есть (u_2, v_2). Тогда согласно законам классической механики предположения об упругости удара точки с бесконечно тяжелой стенкой, заданной уравнением $y = 0$, и о том, что действие этой стенки на точку направлено вдоль нормали к самой стенке, приводят к следующим равенствам:

$$u_1 = u_2, \quad v_2 = -v_1 + 2\frac{\partial g}{\partial t}(c, t), \tag{5}$$

где t — момент времени, в котором точка находится в положении $(c, 0)$.

В частном случае, когда $u_1 = u_2 = 1$, второе равенство в (5) приводит к следующему равенству:

$$\operatorname{tg}\psi_2(c) - \operatorname{tg}\psi_1(c) = H(c,t), \tag{6}$$

где

$$H(c,t) = 2\frac{\partial g}{\partial t}(c,t), \tag{7}$$

а $\psi_1(c)$, $\psi_2(c)$ — абсолютные величины углов, показанных на рис. 4.

Введем функцию $G(z)$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\frac{dG}{dz}(z) = \cos\psi_2(z) - \cos\psi_1(z). \tag{8}$$

Из (6) получаем уравнение на $G(z)$:

$$\frac{dG}{dz}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{z - x_1} + H(z, z - x_1)\right)^2}} - \frac{z - x_1}{\sqrt{(x_1 - z)^2 + y_1^2}}\,, \tag{9}$$

где $H(z,t)$ — функция, введенная в (7).

Обозначим через $\rho\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$ евклидово расстояние между точками (x_1,y_1) и (x_2,y_2). Как известно, необходимым условием экстремума функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является равенство нулю производной f'. Отсюда получаем искомое экстремальное свойство обобщенного биллиарда: кусок биллиардной траектории, проходящий через границу, пересекает границу в точке, в которой обращается в 0 производная функции

$$F(z) = \rho\{(x_1,y_1),(z,0)\} + \rho\{(x_2,y_2),(z,0)\} + G(z). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь в качестве функций $G(z)$ и $F(z)$ в (10) соответственно функции $G(z) = kz$ и $F(z) = f(z)$, где $f(z)$ — функция, введенная в (1). Предположим также, что $0 \leqslant k < 2$, а точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) расположены внутри или на границе сектора Q, изображенного на рис. 1. Тогда можно утверждать, что (10) достигает минимума в точке c, такой что ломаная, соединяющая точки (x_1,y_1), $(c,0)$, (x_2,y_2), является куском обобщенной биллиардной траектории.

Функции G и H связаны сложным соотношением (9). Предлагаем читателю подумать над следующими задачами.

Задача 1. Пусть $G(z) = kz$. Существует ли такая функция $H(z,t)$, что уравнение (9) выполняется для всех точек (x_1,y_1) верхней полуплоскости?

Задача 2. Для обобщенного биллиарда функция $H(z,t)$ пропорциональна скорости дрожания стенки. Поэтому естественно наложить на $H(z,t)$ дополнительное условие — функция $g(z,t)$, определенная как

$$g(z,t) = \int_0^t H(z,t)\,dt,$$

ограничена как функция от двух аргументов. Существует ли $H(z,t)$, удовлетворяющая условию предыдущей задачи и этому дополнительному условию?

Список литературы

[1] Пустыльников Л. Д. *Закон возрастания энтропии и обобщенные биллиарды* // УМН, 1999. Т. 54, №3. С. 180–181.

[2] Пустыльников Л. Д. *Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми* // УМН, 1995. Т. 50, №3ю С. 143–186.

[3] Deryabin M.V., Pustyl'nikov L.D. *On Generalized Relativistic Billiards in External Force Fields* // Letters in Math. Physics, 2003. Vol. 63. P. 195–207.

[4] Deryabin M.V., Pustyl'nikov L.D. *Generalized Relativistic Billiards* // Regular and Chaotic Dynamics, 2003. Vol. 8, no 3. P. 283–296.

[5] Deryabin M.V., Pustyl'nikov L.D. *Exponential Attractors in Generalized Relativistic Billiards* // Communications in Math. Physiscs, 2004. Vol. 248, no.3. P. 527–552.

[6] Birkhoff G. *Dynamical Systems*. Amer. Math. Soc., New York, 1927.

[7] Радемахер Г., Теплиц О. *Числа и фигуры.* М. 1962.

[8] Пустыльников Л. Д. *Об одной геометрической задаче, связанной с обобщенными биллиардами* // Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, №12. 2004. 23 с.

Результаты этой работы содержатся в [8].

Выражаю благодарность М. В. Дерябину и М. Н. Вялому за очень ценные полезные обсуждения.

Л. Д. Пустыльников, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша.