

Неравенство Фейера–Эгервари–Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов

С. Б. Гашков

Действительным тригонометрическим многочленом степени n называется функция вида

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

где a_k, b_k — действительные числа, называемые его коэффициентами, $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Нулевой коэффициент традиционно записывается в виде $a_0/2$. Так как согласно формулам Эйлера $\exp ikx = \cos kx + i \sin kx$, и $a_k \sin kx + b_k \cos kx = \operatorname{Re}((b_k - ia_k) \exp ikx)$, где Re означает действительную часть комплексного числа, i — мнимую единицу, то тригонометрический многочлен можно записать в более краткой комплексной форме

$$t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx, \quad c_k = b_k - ia_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Действительный тригонометрический многочлен $t_n(x)$ называется неотрицательным, если для любого действительного x значение $t_n(x) \geq 0$. Для его коэффициентов справедливо неравенство Фейера–Эгервари–Сасса (см. [1–3])

$$|c_h| \leq 2|c_0| \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor + 2} = |a_0| \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor + 2}, \quad h = 1, \dots, n,$$

где символ $\lfloor a \rfloor$ означает целую часть числа a . Это неравенство имеет применения в теории приближений (см. [4]). Доказывается оно в [2–4] применением представления неотрицательного тригонометрического многочлена $t_n(x)$ в форме Фейера [1]

$$t_n(x) = \left| \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right|^2$$

и последующим решением полученной экстремальной задачи, либо с помощью одной матричной задачи о собственных значениях ([2, 3]), либо применением метода множителей Лагранжа ([4]).

Далее мы приведем два простых и элементарных доказательства этого неравенства, использующие только простейшие свойства комплексных чисел (краткое изложение см. [5]).

Сначала сведем общий случай к случаю $h = 1$, рассматривая вместо многочлена $t_n(x)$ его усреднение, а именно многочлен

$$\frac{1}{h} \sum_{l=1}^h t_n \left(\frac{x + 2\pi l}{h} \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\lfloor n/h \rfloor} c_{hk} \exp ikx.$$

Для доказательства этого тождества достаточно, меняя порядок суммирования, заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^h t_n \left(\frac{x + 2\pi l}{h} \right) &= \sum_{l=1}^h \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k \exp \left(\frac{ik(x + 2\pi l)}{h} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^h c_k \exp \left(\frac{ik(x + 2\pi l)}{h} \right), \end{aligned}$$

где при k , кратном h , в силу равенства $\exp(2\pi k l i / h) = \exp 2\pi m i = 1$ имеем

$$\sum_{l=1}^h c_k \exp \left(\frac{ik(x + 2\pi l)}{h} \right) = c_k \exp \left(\frac{ikx}{h} \right) \sum_{l=1}^h \exp \left(\frac{2\pi k l i}{h} \right) = c_k h \exp \left(\frac{ikx}{h} \right),$$

а при k не кратном h , применяя формулу суммирования геометрической прогрессии, имеем

$$\sum_{l=1}^h \exp \left(\frac{2\pi k l i}{h} \right) = \sum_{l=0}^{h-1} \exp \left(\frac{2\pi k l i}{h} \right) = \frac{\exp 2\pi k i - 1}{\exp(2\pi k i / h) - 1} = 0.$$

Так как усредненный многочлен очевидно неотрицателен, применяя к нему частный случай $h = 1$ доказываемого неравенства, получаем общий случай этого неравенства. Поэтому далее остается доказать для неотрицательного тригонометрического многочлена $t_n(x)$ неравенство

$$|c_1| \leq |a_0| \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Применяя к $t_n(x)$ указанное выше усреднение при $h = n + 1$, замечаем, что

$$\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} t_n \left(\frac{x + 2\pi l}{n+1} \right) = c_0 = \frac{a_0}{2} \geq 0,$$

причем равенство возможно лишь когда $t_n(x)$ тождественно равно нулю, т. е. когда $c_k = 0, k = 0, \dots, n$, поэтому указанное неравенство можно переписать в виде

$$|c_1| \leq a_0 \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Выберем x_0 так, чтобы $c_1 \exp ix_0 = |c_1|$ и вместо $t_n(x)$ возьмем неотрицательный тригонометрический многочлен $(t_n(x_0 + x) + t_n(x_0 - x)) / (2a_0)$, тогда из равенства

$$\frac{t_n(x_0 + x) + t_n(x_0 - x)}{2a_0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a_0} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n c_k \exp(ik(x_0 + x)) + \sum_{k=0}^n c_k \exp(ik(x_0 - x)) \right) = \\
&= \frac{1}{2a_0} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(c_k (\exp(ik(x + x_0)) + \exp(ik(x_0 - x)))) = \\
&= \frac{1}{2a_0} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(c_k \exp(ikx_0) (\exp ikx + \exp(-ikx))) = \\
&= \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(c_k \exp(ikx_0)) \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{|c_1|}{a_0} \cos x + \sum_{k=2}^n d_k \cos kx
\end{aligned}$$

следует, что $t_n(x)$ становится четным действительным тригонометрическим многочленом, и для доказательства общего неравенства Фейера–Эгервари–Сасса достаточно доказать для неотрицательного четного многочлена $t_n(x) = 1/2 + \sum_{k=1}^n b_k \cos kx$ неравенство $|b_1| \leq \cos \pi/(n+2)$. Согласно теореме Фейера [1] (см. также [3])

$$t_n(x) = \left| \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right|^2,$$

где $y_k, k = 0, \dots, n$ — действительные числа. Так как комплексно-сопряженное число к $\sum_{k=0}^n y_k \exp ikx$ есть $\sum_{k=0}^n y_k \exp(-ikx)$, то

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right|^2 &= \left(\sum_{k=0}^n y_k \exp ikx \right) \left(\sum_{k=0}^n y_k \exp(-ikx) \right) = \\
&= \sum_{k=0}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^n (\exp ikx + \exp(-ikx)) \sum_{l=k}^n y_l y_{l-k} = \\
&= \sum_{k=0}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^n (2 \cos kx) \sum_{l=k}^n y_l y_{l-k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k \cos kx,
\end{aligned}$$

откуда, приравнявая коэффициенты в обеих частях равенства, имеем

$$\sum_{k=0}^n y_k^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1} = \frac{b_1}{2}.$$

Положим для краткости

$$\alpha = \frac{\pi}{n+2}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

тогда

$$\sigma_k^2 + \sigma_{k-1}^{-2} = \frac{\sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha} = 2 \cos \alpha = \sigma_1^2,$$

поэтому справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^n y_k^2 - \frac{1}{\cos \alpha} \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \sum_{k=1}^n \left(\sigma_k y_{k-1} - \frac{y_k}{\sigma_k} \right)^2,$$

в котором легко убедиться раскрытием скобок. Из тождества, очевидно, следует нужное нам неравенство

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^n y_k^2 \geq \frac{1}{\cos \alpha} \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1} = \frac{b_1}{2 \cos \alpha}.$$

В равенство оно обращается лишь когда $\sigma_k y_{k-1} = y_k / \sigma_k$, т. е. когда

$$\frac{y_k}{y_{k-1}} = \sigma_k^2 = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha},$$

другими словами, при условии коллинеарности векторов

$$(y_0, \dots, y_n), (\sin \alpha, \dots, \sin(n+1)\alpha).$$

Можно проверить, что тригонометрический многочлен

$$\frac{1}{n+2} \left| \sum_{k=0}^n \sin((k+1)\alpha) \exp(ikx) \right|^2 = \sum_{k=0}^n b_k \cos kx, \quad b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \cos \alpha,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 k\alpha = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos 2k\alpha}{2} = \frac{n+2}{2}$$

в силу тождества

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos 2k\alpha = \sum_{k=0}^{n+1} \cos 2k\alpha = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n+1} \exp 2k\alpha = \operatorname{Re} \frac{\exp(2(n+2)\alpha) - 1}{\exp(2\alpha) - 1} = 0.$$

Заметим еще, что доказанное неравенство

$$\left(\cos \frac{\pi}{n+2} \right) \sum_{k=0}^n y_k^2 \geq \sum_{k=1}^n y_k y_{k-1}$$

равносильно неравенству Фана–Таусски–Тодда

$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k^2 \leq \frac{1}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} (y_k - y_{k-1})^2,$$

где $y_0 = y_{n+1} = 0$, которое является дискретным аналогом неравенства Виртингера (см. [6]).

Покажем теперь, как можно доказать неравенство, не пользуясь теоремой Фейера. Для этого достаточно подобрать положительные коэффициенты β_k , $k = 0, \dots, n-1$, так, чтобы для любого комплексного тригонометрического многочлена $t_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \exp ikx$ выполнялось при $\alpha = \pi/(n+2)$ и некотором

действительном γ тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \beta_l t_n(x + 2l\alpha) = 1 + \frac{c_1 \exp(i(x + \gamma))}{\cos \alpha}.$$

Тогда для действительного тригонометрического многочлена будет выполняться тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \beta_l t_n(x + 2l\alpha) = 1 + \frac{\operatorname{Re}(c_1 \exp i\gamma \exp ix)}{\cos \alpha}.$$

Если применить его к неотрицательному тригонометрическому многочлену, то двучлен $1 + \operatorname{Re}(c_1 \exp i(x + \gamma))/\cos \alpha$ также будет неотрицательным. Выберем действительное x^* так, чтобы $\operatorname{Re}(c_1 \exp i(x^* + \gamma)) = -|c_1|$. Тогда

$$1 + \frac{\operatorname{Re} c_1 \exp(i(x^* + \gamma))}{\cos \alpha} = 1 - \frac{|c_1|}{\cos \alpha} \geq 0,$$

откуда и следует нужное нам неравенство $|c_1| \leq \cos \alpha$.

Остается выбрать коэффициенты и доказать тождество. Рассмотрим числовую последовательность γ_k , определяемую начальными условиями $\gamma_{-1} = 0$, $\gamma_0 = 1$ и рекуррентными соотношениями $\gamma_{k-1} + \gamma_{k+1} - 2\gamma_k \cos 2\alpha = 1$, $\alpha = \pi/(n+2)$. Очевидно $\gamma_1 = 1 + 2\cos 2\alpha \geq 0$. Решая рекуррентное соотношение, можно найти, что

$$\begin{aligned} \gamma_k &= A \sin 2k\alpha + B \cos 2k\alpha + C, \\ A &= \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha}, \quad C = \frac{1}{2 - 2\cos 2\alpha}, \quad B = 1 - 2C. \end{aligned}$$

Но проще непосредственно проверить, пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \sin 2(k-1)\alpha + \sin 2(k+1)\alpha &= 2 \sin 2k\alpha \cos 2\alpha, \\ \cos 2(k-1)\alpha + \cos 2(k+1)\alpha &= 2 \cos 2k\alpha \cos 2\alpha, \\ \gamma_0 &= B + C = 1, \end{aligned}$$

$$\gamma_{-1} = -\frac{1}{2} - \cos 2\alpha + (1 - C) \cos 2\alpha + C = -\frac{1}{2} + C(1 - \cos 2\alpha) = 0,$$

что так определенная последовательность удовлетворяет указанным выше начальным условиям и рекуррентным соотношениям. Очевидно в силу периодичности, что $\gamma_{n+1} = \gamma_{-1} = 0$, $\gamma_{n+2} = \gamma_0 = 1$, откуда с помощью рекуррентной формулы находим, что $\gamma_n = 0$, $\gamma_{n-1} = 1$, поэтому в силу равенств $\gamma_{-1} = \gamma_n$, $\gamma_0 = \gamma_{n-1}$ и симметричности рекуррентного соотношения относительно замены k на $n-1-k$ имеем равенство $\gamma_k = \gamma_{n-1-k}$, $k = 0, \dots, n-1$. Так как $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 \geq 0$, то при $n \leq 3$ очевидно $\gamma_k \geq 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Проверим это при $n \geq 4$. Так как при $0 \leq k \leq (n-1)/2$ очевидно $0 \leq 2k\alpha < \pi$, $0 \leq 2\alpha \leq \pi/3$, $\sin 2k\alpha > 0$, $\cos 2\alpha \geq 1/2$, поэтому $A \geq 0$, $C \geq 1$, $B \leq 0$, следовательно $A \sin 2k\alpha \geq 0$, и в силу монотонности $C + B \cos 2k\alpha \geq C + B = 1$, откуда имеем $\gamma_k \geq 1$, $k = 0, \dots, n-1$ при $n \geq 4$. Рассмотрим многочлен

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k z^k.$$

Непосредственно из рекуррентных соотношений следует, что

$$(z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1)p(z) = z^{n+1} + \dots + z + 1,$$

так как $\gamma_n = \gamma_{n+1} = \gamma_{-1} = \gamma_{-2} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{z^{n+1} + \dots + z + 1}{z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1} = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1)} = \\ &= \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2\alpha i)(z - \exp(-2\alpha i))}, \end{aligned}$$

а так как

$$z^{n+2} - 1 = \prod_{k=0}^{n+1} (z - \exp 2k\alpha i),$$

то

$$p(z) = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2\alpha i)(z - \exp(-2\alpha i))} = \prod_{k=2}^n (z - \exp 2k\alpha i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k &= p(1) = \frac{n+2}{2-2\cos 2\alpha} = \frac{n+2}{4\sin^2 \alpha}, \\ \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i \right| &= |p(\exp 2\alpha i)| = \\ &= \left| \prod_{k=2}^n (\exp 2\alpha i - \exp 2k\alpha i) \right| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \exp 2k\alpha i) \right|, \end{aligned}$$

а так как

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \exp 2k\alpha i) &= \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2n\alpha i)(z - \exp 2(n+1)\alpha i)} = \\ &= \frac{z^{n+1} + \dots + z + 1}{(z - \exp 2n\alpha i)(z - \exp 2(n+1)\alpha i)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i \right| &= \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \exp 2k\alpha i) \right| = \\ &= \left| \frac{n+2}{(1 - \exp 2n\alpha i)(1 - \exp 2(n+1)\alpha i)} \right| = \frac{n+2}{8\sin^2 \alpha \cos \alpha} \end{aligned}$$

в силу равенств

$$\begin{aligned} |(\exp 2\alpha i - 1)| &= \sqrt{(\cos 2\alpha - 1)^2 + \sin^2 2\alpha} = \sqrt{4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{4\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 2|\sin \alpha|, \\ |(1 - \exp 2n\alpha i)(1 - \exp 2(n+1)\alpha i)| &= |(\exp 4\alpha i - 1)(\exp 2\alpha i - 1)| = \end{aligned}$$

$$= 4 \sin 2\alpha \sin \alpha = 8 \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

откуда следует, что при некотором действительном γ

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i = \frac{(n+2) \exp i\gamma}{8 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Далее, при $l = 2, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2lk\alpha i &= p(\exp 2l\alpha i) = \\ &= \frac{(\exp 2l\alpha i)^{n+2} - 1}{(\exp 2l\alpha i - 1)(\exp 2l\alpha i - \exp 2\alpha i)(\exp 2l\alpha i - \exp(-2\alpha i))} = 0, \end{aligned}$$

и поэтому для комплексного тригонометрического многочлена $t_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l t_n(x + 2l\alpha) &= \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \sum_{k=0}^n c_k \exp ik(x + 2l\alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \exp ikx \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \exp 2kl\alpha i = \frac{n+2}{4 \sin^2 \alpha} \left(c_0 + \frac{c_1 \exp i(x + \gamma)}{2 \cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

Полагая $\beta_k = 8\gamma_k \sin^2 \alpha / (n+2)$, получаем обещанное тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k t_n(x + 2k\alpha) = 2c_0 + \frac{c_1 \exp(i\gamma) \exp(ix)}{\cos \alpha}, \quad \beta_k > 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fejer L. *Ueber trigonometrische Polynome* // J. fuer die reine und angew. Math., 1915. Bd. 146. S. 53–82.
- [2] Egervary E., Szasz O. *Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome* // Math. Zeitschr., 1928. Bd. 27. S. 641–652.
- [3] Поля Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*. М.: Наука, 1978.
- [4] Тихомиров В. М. *Некоторые вопросы теории приближений*. М.: Изд. МГУ, 1976.
- [5] Гашков С. Б. *О некоторых частных случаях задачи Владимира Маркова в метрике L_p* // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. М.: Изд. МГУ, 1987. С. 79–82.
- [6] Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства*. М.: Мир, 1965.