# О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, с фиксированным средним коэффициентом

С. Б. Гашков

Действительным тригонометрическим многочленом степени $n$ называется функция вида

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

где $a_k$, $b_k$ — действительные числа, называемые его коэффициентами, $a_n^2 + b_n^2 > > 0$. Нулевой коэффициент традиционно записывается в виде $a_0/2$. Так как согласно формулам Эйлера $\exp ikx = \cos kx + i \sin kx$, и $a_k \sin kx + b_k \cos kx = = \mathrm{Re}((b_k - ia_k) \exp ikx)$, где Re означает действительную часть комплексного числа, а $i$ — мнимую единицу, то тригонометрический многочлен можно записать в более краткой комплексной форме

$$t_n(x) = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n} c_k \exp ikx,\ c_k = b_k - ia_k,\ k = 1, \ldots, n,\ c_0 = \frac{a_0}{2}$$

(см. [1]). Рассмотрим следующую задачу: среди всех таких тригонометрических многочленов с фиксированным комплексным коэффициентом $c_h$, или, что равносильно, с фиксированными действительными коэффициентами $a_h, b_h$, найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Другими словами, надо найти такой тригонометрический многочлен $t_n(x)$, у которого величина $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |t_n(x)|$ минимальна. Эту величину называют равномерной или чебышёвской нормой и обозначают $\|t_n\|$. Кроме этой нормы, часто используют семейство норм[1)]

$$\|t_n\|_p = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|^p \right)^{1/p},\ p \geqslant 1,$$

а норму $\|t_n\|$ обозначают $\|t_n\|_\infty$ (см. [2]). Эти нормы связаны неравенствами

$$\|t_n\|_1 \leqslant 2^{1-1/p} \|t_n\|_p \leqslant 2\|t_n\|,$$

которые, впрочем, нам далее не понадобятся. Очевидно, что для любого действительного $c$ и любого $p \geqslant 1$, в том числе и $p = \infty$, справедливо равенство $\|ct_n\| = |c|\|t_n\|$. Решение задачи дает

[1)]Можно считать, что интеграл в их определении — это обычный интеграл Римана.

Теорема. *Для любого действительного тригонометрического многочлена* $t_n(x) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n} c_k \exp ikx$ *и* $h \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\|t_n\|_p \geqslant \mu(n,h,p)|c_h|\|\cos\|_p,$$

$$\mu(n,h,p) = \mu(2m+1,1,p) = \frac{m+2}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2m+4}\,,\ m = \left\lfloor \frac{n-h}{2h} \right\rfloor,$$

*где символ* $\lfloor a \rfloor$ *означает целую часть числа* $a$. *При* $p = \infty$ *это неравенство обращается в равенство для многочлена*

$$t_n(x) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m} c_{(2k+1)h} \exp i(2k+1)hx = |c_h| g_{2m+1}(hx+\gamma), \qquad (*)$$

*где* $\gamma = \arg c_h$,

$$g_{2m+1}(x) = C\sum_{k=1}^{m+1} g_{m,k}(x) = \cos x + \sum_{k=1}^{m} b_k \cos(2k+1)x,$$

$$C = \frac{2^{2m+1}}{m+2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2m+4}\,,$$

$$g_{m,k}(x) = h_{m,k}(x) f_{m,k}(x),\ h_{m,k}(x) = \left(\frac{w_m(x)\sin k\alpha}{\cos(x-k\alpha)}\right)^2,$$

$$w_m(x) = \prod_{k=1}^{m+1}\cos(x-k\alpha),$$

$$f_{m,k}(x) = 2\,\mathrm{ctg}\,k\alpha\cos(x-k\alpha) - \sin(x-k\alpha),\ k = 1,\ldots,m+1.$$

*Следовательно, среди всех многочленов* $t_n(x)$ *с фиксированным* $c_h$ *многочлен* $(*)$ *имеет минимальную норму*

$$\|t_n\|_\infty = \frac{m+2}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2m+4}|c_h|.$$

*Этот минимальный многочлен при нечетном* $\lfloor n/h \rfloor$ *определен однозначно, а при четном* $\lfloor n/h \rfloor$ *— неоднозначно.*

При $h = n$ (и вообще при $h > n/3$), очевидно, $m = 0$, и из теоремы следует неравенство $\|t_n\|_\infty \geqslant |c_h|$. Экстремальный многочлен тогда равен $a_h \sin hx + b_h \cos hx$. Это утверждение равносильно известному экстремальному свойству многочленов Чебышёва (см. [1]).

В книге С. Н. Бернштейна [3] доказано неравенство $\|t_n\|_\infty \geqslant \frac{\pi}{4}|c_h|$, и показано, что оно является асимптотически точным.

В [4] в случае $p = \infty$, опираясь на метод, развитый в [5], было получено точное неравенство.

Далее приводится элементарное доказательство этой теоремы, использующее только простейшие свойства комплексных чисел (краткое изложение см. [6]).

Сначала сведем общий случай к случаю $h = 1$, рассматривая вместо многочлена $t_n(x)$ многочлен

$$\frac{1}{2h}\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l t_n\left(x+\frac{\pi l}{h}\right)=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m}c_{h(2k+1)}\exp i(2k+1)hx.$$

Для доказательства этого тождества достаточно, меняя порядок суммирования, заметить, что

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l t_n\left(x+\frac{\pi l}{h}\right)=\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right)=$$

$$=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right).$$

Теперь при $k$, кратном $h$, в силу равенства $\exp(\pi kli/h)=(-1)^{kl/h}$ имеем

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right)=c_k\exp ikx\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l\exp\left(\frac{\pi kli}{h}\right)=2hc_k\exp ikx,$$

если $k/h$ нечетно, и

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right)=0,$$

если $k/h$ четно, а при $k$, не кратном $h$, применяя формулу суммирования геометрической прогрессии, имеем

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l\exp\left(\frac{\pi kli}{h}\right)=\sum_{l=0}^{2h-1}(-1)^l\exp\left(\frac{\pi kli}{h}\right)=\frac{\exp 2\pi ki-1}{-\exp(\pi ki/h)-1}=0.$$

Воспользовавшись выпуклостью нормы, т. е. неравенством[2)]

$$\|\alpha f+\beta g\|_p\leqslant|\alpha|\cdot\|f\|_p+|\beta|\cdot\|g\|_p,$$

и свойствами $\|f(x+a)\|_p=\|f(x)\|_p$, $\|f(rx)\|_p=\|f(x)\|_p$ (инвариантности нормы относительно сдвига[3)] на произвольное число $a$ и растяжения[4)] с целым коэффициентом $r$), имеем при $m=\left\lfloor\dfrac{n-h}{2h}\right\rfloor$

$$\|t_n\|_p=\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{2h}\left\|t_n\left(x+\frac{\pi k}{h}\right)\right\|_p\geqslant\left\|\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{2h}t_n\left(x+\frac{\pi k}{h}\right)\right\|_p=$$

$$=\left\|\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m}c_{h(2k+1)}\exp i(2k+1)hx\right\|_p=\left\|\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m}c_{h(2k+1)}\exp i(2k+1)x\right\|_p.$$

---

[2)] Это свойство при $p=\infty$ и $p=1$ вытекает из неравенства $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, а при конечных $p>1$ — из неравенства Минковского (см.[2]).

[3)] Для $2\pi$-периодических функций это очевидно при $p=\infty$, а при конечных $p$ вытекает из периодичности и свойства аддитивности интеграла.

[4)] Это очевидно при $p=\infty$, а при конечных $p$ доказывается линейной заменой переменных с учетом периодичности и свойства аддитивности интеграла.

Из этого неравенства следует, что неравенство теоремы достаточно доказать при $h = 1$ для многочленов вида $t_n(x) = \mathrm{Re}\sum\limits_{k=0}^{m} c_{2k+1}\exp i(2k+1)x$, $n = 2m+1$. Хотя это не приводит к каким либо упрощениям, заметим, что взяв вместо $t_n(x)$ многочлен $t_n(x+\gamma)$, где $\mathrm{Re}\, c_1 \exp i\gamma = |c_1|$, легко свести задачу к случаю, когда многочлен имеет вид $t_n(x) = |c_1|\cos x + \mathrm{Re}\sum\limits_{k=1}^{m} c_{2k+1}\exp i(2k+1)x$, а взяв вместо $t_n(x)$ многочлен $(t_n(x) + t_n(-x))/2$, можно далее считать, что $t_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_{2k+1}\cos(2k+1)x$. Тогда для таких многочленов достаточно доказать неравенство

$$\|t_n\|_p \geqslant |b_1|\frac{m+2}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2m+4}\|\cos\|_p.$$

Положим для краткости $\alpha = \pi/(m+2)$. Доказательство теперь умещается в две строчки

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2m+4}\|t_n\|_p = \sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha\;\left\|t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\|_\infty \geqslant$$
$$\geqslant \left\|\sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha\; t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\|_p = |b_1|\frac{m+2}{2}\|\cos\|_p,$$

если воспользоваться указанными выше свойствами нормы и тождествами

$$\sum_{k=1}^{m+1}|\sin k\alpha| = \sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2m+4}\,,$$
$$\sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha\; t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = b_1\frac{m+2}{2}\cos x.$$

Первое из них, очевидно, следует из известного тождества[5)] (см., например, [7, зад. 225] или [1])

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

при подстановке $n = m+1, x = \pi/(n+1)$. Для доказательства второго заменим $t_n\left(x + l\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ на

$$\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\exp i(2k+1)\left(x + l\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

[5)] Для его доказательства достаточно умножить обе его части на $\sin(x/2)$ и применить к каждому слагаемому формулу $\sin kx\sin(x/2) = \cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x$.

изменим в полученной двойной сумме порядок суммирования

$$\sum_{l=1}^{m+1}\sin l\alpha\ \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\exp i(2k+1)\left(x+l\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\sum_{l=1}^{m+1}\sin l\alpha\exp i(2k+1)\left(x+l\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\exp i(2k+1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sum_{l=1}^{m+1}\sin l\alpha\ \exp i(2k+1)l\alpha,$$

и применим тождества $\operatorname{Re}(i\exp i(x-\pi/2))=-\sin(x-\pi/2)=\cos x$,

$$\sum_{l=0}^{m+1}\sin l\alpha\exp i(2k+1)l\alpha=\left[\begin{array}{ll}0, & m\geqslant k\geqslant 1,\\ \dfrac{m+2}{2}i, & k=0.\end{array}\right.$$

Для доказательства второго из них $\sin l\alpha$ заменяем на $\dfrac{\exp il\alpha-\exp(-il\alpha)}{2i}$, левую часть тождества преобразуем к виду

$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{l=0}^{m+1}\exp i(2k+2)l\alpha-\sum_{l=0}^{m+1}\exp i2kl\alpha\right),$$

и применяем в очередной раз формулу суммирования геометрической прогрессии

$$\sum_{l=0}^{m+1}\exp i2kl\alpha=\left[\begin{array}{ll}0, & m+1\geqslant k\geqslant 1,\\ m+2, & k=0.\end{array}\right.$$

Доказательство равенства $\|g_{2m+1}\|_\infty=\dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$ более громоздко.

Сначала проверим тождество $g_{2m+1}(x+\pi)=-g_{2m+1}(x)$. Так как в силу формул $\sin(x+\pi)=-\sin x,\cos(x+\pi)=-\cos x$, очевидно

$$f_{m,k}(x+\pi)=-f_{m,k}(x), w_m(x+\pi)=(-1)^{m+1}w_m(x),$$

то

$$h_{m,k}(x+\pi)=\left(\frac{w_m(x+\pi)\sin k\alpha}{\cos(x+\pi-k\alpha)}\right)^2=h_{m,k}(x),$$

откуда $g_{m,k}k(x+\pi)=h_{m,k}(x+\pi)f_{m,k}(x+\pi)=-g_{m,k}k(x)$, и, следовательно, $g_{2m+1}(x+\pi)=-g_{2m+1}(x)$.

Проверим, что $g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=\dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$, $k=1,\ldots,m+1$. Так как $h_{m,k}$ вместе с $w_m$ очевидно имеет двукратные корни $l\alpha-\pi/2, 1\leqslant l\leqslant m+1, l\neq k$, то и $g_{m,k}$ тоже имеет те же двукратные корни[6]. Поэтому $g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=$

[6] Корень функции двукратен, если он является также корнем ее производной. Все корни функции $f(x)$ будут двукратными корнями функции $f^2(x)g(x)$, так как $(f^2(x)g(x))'=$ $=2f(x)f'(x)g(x)+f^2(x)g'(x)=f(x)(2f'(x)g(x)+f(x)g'(x))$.

$= Cg_{m,k}(k\alpha-\pi/2)$. Так как $f_{m,k}(k\alpha-\pi/2)=1$, $\sin l\alpha=\sin(m+2-l)\alpha$, то

$$g_{m,k}(k\alpha-\pi/2)=h_{m,k}(k\alpha-\pi/2)=$$
$$=\sin^2 k\alpha\prod_{l=1,l\neq k}^{m+1}\cos^2(k\alpha-\pi/2-l\alpha)=\sin^2 k\alpha\prod_{l=1,l\neq k}^{m+1}\sin^2(l-k)\alpha=$$
$$=\prod_{l=1}^{k}\sin^2 l\alpha\prod_{l=k+1}^{m+1}\sin^2(l-k)\alpha=\prod_{l=1}^{k}\sin^2 l\alpha\prod_{l=1}^{m+1-k}\sin^2 l\alpha,$$

откуда, переставляя порядок сомножителей в последнем произведении, имеем

$$g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=\prod_{l=1}^{m+1}\sin^2 l\alpha,\quad k=1,\dots,m+1.$$

Из известного тождества

$$\prod_{l=1}^{n-1}\sin\frac{l\pi}{n}=n2^{-n+1}$$

(см., например, [7, зад. 232]) следует, что

$$g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=(m+2)^2 2^{-2m-2}C=\frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4},\quad k=1,\dots,m+1.$$

Проверим, что $g'_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=0$, $k=1,\dots,m+1$. Так как $g_{m,k}$ имеет двукратные корни $l\alpha-\pi/2, 1\leqslant l\leqslant m+1, l\neq k$, то $g'_{m,k}(l\alpha-\pi/2)=0$, $1\leqslant l\leqslant$ $\leqslant m+1$, $l\neq k$, поэтому $g'_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=Cg'_{m,k}(k\alpha-\pi/2)$, $k=1,\dots,m+1$. Так как

$$f_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=1, f'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-2\operatorname{ctg}k\alpha\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{ctg}k\alpha,$$
$$h_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=g_{2m+1}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2 k\alpha\left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right)^2\Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2}=$$
$$=(m+2)^2 2^{-2m-2},\quad k=1,\dots,m+1,$$
$$h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2 k\alpha\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2}\left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha}\right)'\Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2},$$

то, согласно формуле Лейбница[7]) и тождеству $\operatorname{ctg}x=-\operatorname{tg}(x-\pi/2)$, имеем

$$\left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right)'\Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2}=\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1}-\operatorname{tg}(x-l\alpha)\right)\Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2}=$$
$$=\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\Bigg|_{x=k\alpha-\pi/2}\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1}-\operatorname{tg}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}-l\alpha\right)\right)=$$

[7]) Имеется в виду следующая ее форма $(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1\cdot\ldots\cdot f_n(f'_1/f_1+\ldots+f'_n/f_n)$, пригодная, если $f_i\neq 0, i=1,\dots,n$.

$$= \left.\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right|_{x=k\alpha-\pi/2}\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1}\operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right),$$

откуда следует, что

$$h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2 k\alpha\left.\left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha}\right)^2\right|_{x=k\alpha-\pi/2}\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1}\operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right) =$$

$$= (m+2)^2 2^{-2m-1}\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1}\operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right),$$

следовательно

$$g'_{m,k}(k\alpha-\pi/2) =$$

$$= h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)f_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+h_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)f'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+2h_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}k\alpha =$$

$$= (m+2)^2 2^{-2m-1}\left(\operatorname{ctg}k\alpha+\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1}\operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right).$$

Сумму в скобках можно, сокращая равные слагаемые, записать в виде

$$\sum_{l=1}^{k}\operatorname{ctg}l\alpha-\sum_{l=1}^{m-k+1}\operatorname{ctg}l\alpha = \pm\sum_{l=s+1}^{m+1-s}\operatorname{ctg}l\alpha,\quad s=\min(k,m+1-k).$$

Заметив, что $\operatorname{ctg}l\alpha = -\operatorname{ctg}(m+2-l)\alpha$, $\operatorname{ctg}(m+2)\alpha/2 = 0$, отсюда имеем $g'_{2m+1}(k\alpha-\pi/2) = Cg'_{m,k}(k\alpha-\pi/2) = 0$, $k=1,\dots,m+1$.

Проверим, что многочлен $g_{2m+1}(x)$ имеет локальные экстремумы в точках $k\alpha+\sigma\pi/2$, $\sigma=\pm1$, $k=1,\dots,m+1$. Сначала оценим число корней у производной $g'_{2m+1}(x)$ на интервале $[-\pi/2,3\pi/2)$. Из равенства $g_{2m+1}(x+\pi) = -g_{2m+1}(x)$ следует, что $g'_{2m+1}(k\alpha+\pi/2) = -g'_{2m+1}(k\alpha-\pi/2) = 0$, $k=1,\dots,m+1$, т. е. производная имеет еще $m+1$ корней на интервале $[\pi/2,3\pi/2)$. Так как $g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2) = -g_{2m+1}(k\alpha+\pi/2) = \frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}$, $k=1,\dots,m+1$, то функция $g_{2m+1}(x)$ на концах каждого из отрезков $[k\alpha+\sigma\pi/2,(k+1)\alpha+\sigma\pi/2]$, $\sigma=\pm1$, $k=1,\dots m$ принимает равные значения, поэтому согласно теореме Ролля[8] ее производная имеет хотя бы один корень на каждом из этих $2m$ отрезков, поэтому общее число ее корней на интервале $[-\pi/2,3\pi/2)$ не меньше $4m+2$. Поэтому, согласно известной теореме об оценке числа корней тригонометрического многочлена[9] (см., например, [1]) многочлен $g'_{2m+1}$ имеет на интервале $[-\pi/2,3\pi/2)$ ровно $4m+2$ простых (однократных) корней, перечисленных выше, следовательно $g'_{2m+1}$ не

[8] Если функция дифференцируема на отрезке и принимает равные значения на его концах, то ее производная обращается в нуль в одной из его внутренних точек.

[9] Ненулевой тригонометрический многочлен порядка $n$ имеет на любом интервале $[a,a+2\pi)$ не более $2n$ корней с учетом кратности.

имеет кратных корней. В частности, на интервале $((m+1)\alpha-\pi/2, \alpha+\pi/2)$ производная корней не имеет, значит, она сохраняет постоянный знак, а так как $g_{2m+1}((m+1)\alpha-\pi/2) > 0 > g_{2m+1}(\alpha+\pi/2)$, то она отрицательна и функция $g_{2m+1}$ на этом интервале убывает. Так как производная не имеет кратных корней, то ее знаки между корнями чередуются[10], поэтому слева от корня $(m+1)\alpha-\pi/2$ производная положительна, поэтому согласно известному признаку локального максимума функция $g_{2m+1}(x)$ имеет в точке $(m+1)\alpha-\pi/2$ локальный максимум. Аналогично проверяется, что во всех точках $k\alpha-\pi/2, k=1,\ldots m+1$ многочлен $g_{2m+1}(x)$ имеет локальный максимум, а во всех точках $k\alpha+\pi/2, k=1,\ldots m+1$ — локальный минимум.

Проверим, что $g_{2m+1}(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Так как $C > 0$, то достаточно проверить, что $g_{m,k}(x)+g_{m,m+2-k}(x) \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant (m+2)/2$, откуда следует неравенство

$$g_{2m+1}(x) = C((g_{m,1}(x)+g_{m,m+1}(x)) + (g_{m,2}(x)+g_{m,m}(x)) + \ldots) \geqslant 0.$$

Так как $\cos(x-(m+2-k)\alpha) = -\cos(x+k\alpha)$, то

$$g_{m,k}(x)+g_{m,m+2-k}(x) = \\ = \left(\frac{w_m(x)\sin k\alpha}{\cos(x-k\alpha)\cos(x+k\alpha)}\right)^2 (\cos^2(x+k\alpha)f_{m,k}(x) + \cos^2(x-k\alpha)f_{m,m+2-k}(x)).$$

Для проверки неотрицательности второго сомножителя, в силу тождеств $\sin(x-(m+2-k)\alpha) = -\sin(x+k\alpha)$, $\operatorname{ctg}(m+2-k)\alpha = -\operatorname{ctg} k\alpha$, равного, очевидно,

$$\cos^2(x+k\alpha)(2\operatorname{ctg} k\alpha\cos(x-k\alpha) - \sin(x-k\alpha)) + \\ + \cos^2(x-k\alpha)(2\operatorname{ctg} k\alpha\cos(x+k\alpha) + \sin(x+k\alpha)),$$

пользуясь тригонометрическими теоремами сложения, преобразуем его к виду[11]

$$2\cos x\sin k\alpha(\cos^2 x(2\operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1) + \sin^2 k\alpha).$$

Так как $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, а линейная функция достигает экстремумов на концах отрезка, то при $k=1,\ldots,m+1$

$$\cos^2 x(2\operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1) + \sin^2 k\alpha) \geqslant \min(\sin^2 k\alpha, 2\operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1 + \sin^2 k\alpha).$$

Остается заметить, что в силу тождества

$$\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{ctg}^2 x(1-\sin^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x$$

при $k=1,\ldots,m+1$, очевидно,

$$2\operatorname{ctg}^2 k\alpha - 1 + \sin^2 k\alpha = 2\operatorname{ctg}^2 k\alpha - \cos^2 k\alpha = \operatorname{ctg}^2 k\alpha(1+\cos^2 k\alpha)) \geqslant 0.$$

Так как $\sin k\alpha > 0, k=1,\ldots,m+1$, то тем самым доказано, что знак функции $g_{2m+1}(x)$ совпадает со знаком $\cos x$.

---

[10] Если бы она сохраняла знак на интервале, содержащем три соседних корня, то в среднем из них производная была бы равна нулю, т. е. он был бы двукратным корнем, что невозможно.

[11] Проверка предоставляется читателю. Для удобства можно обозначить $\cos k\alpha$ через $c$, а $\sin k\alpha$ через $s$.

Докажем теперь, что найденные ее экстремумы — глобальные. Между соседними локальными максимумами расположены локальные минимумы, а так как $g_{2m+1}(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, то на этом отрезке локальные максимумы будут очевидно и глобальными максимумами. В силу равенства $g_{2m+1}(x+\pi) = -g_{2m+1}(x)$ на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ функция $g_{2m+1}$ неположительна, поэтому в точках $k\alpha+\pi/2, k = 1, \ldots m+1$ она имеет глобальные минимумы. Следовательно, равенство

$$\|g_{2m+1}\|_\infty = g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}\,,\ \ k = 1, \ldots, m+1,$$

доказано.

Докажем теперь, что $g_{2m+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cos(2k+1)x$. Так как в силу ее периодичности

$$g_{2m+1}\left(-k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left((m+2-k)\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left(k\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2} - k\alpha\right),\ \ 1 \leqslant k \leqslant \frac{m+2}{2}\,,$$

то функции $g_{2m+1}(x)$ и $g_{2m+1}(-x)$ имеют $2m+2$ общих максимума и минимума на интервале $[-\pi, \pi)$, значит их разность имеет в точках $\pm k\alpha + \pm\pi/2$, $1 \leqslant k \leqslant (m+2)/2$ двукратные корни[12)], суммарная кратность которых равна $4m+4$, т. е. больше $4m+2$, поэтому согласно теореме о числе корней тригонометрического многочлена разность $g_{2m+1}(x) - g_{2m+1}(-x)$ равна нулю. Следовательно, многочлен $g_{2m+1}(x)$ четен, поэтому состоит из одних косинусов[13)] (см., например, [1]). Отсутствие в нем косинусов с четными дугами[14)] можно вывести из тождества[15)] $g_{2m+1}(x+\pi) = -g_{2m+1}(x)$, но можно проверить и непосредственно из определения[16)] $g_{2m+1}(x)$.

---

[12)] Производная разности $g_{2m+1}(x) - g_{2m+1}(-x)$ в этих точках тоже равна нулю, так как производные функций $g_{2m+1}(\pm x)$ в них равны нулю.

[13)] Нечетная часть тригонометрического многочлена $t_n(x)$ выражается формулой

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx = (t_n(x) - t_n(-x))/2,$$

поэтому у четного многочлена она тождественно равна нулю, и поэтому ее коэффициенты $a_k$ равны нулю, согласно теореме о числе корней многочлена.

[14)] Слагаемых вида $b\cos 2kx$, где $k$ — целое. — *Прим. ред.*

[15)] Представляя четный многочлен $t_n$ в виде $t_{0,n} + t_{1,n}$, где $t_{0,n} = \sum\limits_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_{2k}\cos 2kx$, $t_{1,n} = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} b_{2k+1}\cos(2k+1)x$, замечаем, что $t_{0,n} = (t_n(x) + t_n(x+\pi))/2$, поэтому из тождества $t_n(x) = -t_n(x+\pi)$ следует, что $t_{0,n}(x) = 0$, и согласно теореме о числе корней многочлена четные коэффициенты $b_{2k} = 0$. Аналогично, если $t_n(x) = t_n(x+\pi)$, то $t_{1,n}(x) = (t_n(x) - t_n(x+\pi))/2 = 0$, следовательно $t_n = t_{0,n}$, т. е. нечетные коэффициенты $b_{2k+1} = 0$.

[16)] Доказав с помощью формул преобразования произведения синусов-косинусов в сумму, что множество многочленов, содержащих только четные дуги, замкнуто относительно умножения, а умножение таких многочленов на многочлены, содержащие только нечетные дуги, дает в результате тоже многочлены, содержащие только нечетные дуги.

Из доказанного для любого многочлена $t_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cos(2k+1)x$, $n = 2m+1$, тождества

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \; t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2} b_1 \cos x$$

и соотношений $\|t_n\|_\infty \geqslant t_n\left(k\alpha - \pi/2\right)$,

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \|t_n\|_\infty = \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \; \left\| t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\|_\infty$$

следует неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \|t_n\|_\infty \geqslant \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \; t_n\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = b_1 \frac{m+2}{2},$$

которое, очевидно, обращается в равенство, если и только если

$$t_n\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \|t_n\|_\infty, \quad k = 1, \ldots, m+1.$$

Так как эти соотношения выполнены для $t_n = g_{2m+1}$, то

$$\|g_{2m+1}\|_\infty = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} b_1,$$

откуда, в силу доказанного равенства $\|g_{2m+1}\|_\infty = \dfrac{m+2}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2m+4}$, следует, что $b_1 = 1$.

Докажем единственность экстремального многочлена $t_n$ при нечетном $\lfloor n/h \rfloor$. Можно считать, что $c_h = 1$, $\|t_n\|_\infty = \dfrac{m+2}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2m+4}$, $m = \lfloor (n-h)/2h \rfloor$. Положим

$$f_{2m+1}(x) = \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l t_n\left(\frac{x + \pi l}{h}\right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{m} c_{2k+1} \exp i(2k+1)x.$$

Так как

$$\|t_n\|_\infty \geqslant t_n\left(\frac{x+\pi l}{h}\right), \quad \|f_{2m+1}\|_\infty \geqslant f_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4},$$

то из доказанных выше неравенств следует, что при некотором $\gamma$

$$\frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} = \|t_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^{2h} (-1)^l t_n\left(\frac{\gamma + \pi l}{h}\right) = f_{2m+1}(\gamma) =$$

$$= \|f_{2m+1}\|_\infty \geqslant \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \; f_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}.$$

Очевидно, эти неравенства обращаются в равенства, поэтому

$$\|f_{2m+1}\|_\infty = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \; \|f_{2m+1}\|_\infty =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}\sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha\ f_{2m+1}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right),$$

значит в качестве $\gamma$ можно взять любое $k\alpha-\pi/2$, $k=1,\ldots,m+1$, откуда

$$t_n\left(\frac{k\alpha+\pi l-\pi/2}{h}\right)=(-1)^l\|t_n\|_\infty,\quad k=1,\ldots,m+1,\ l=1,\ldots,2h.$$

Следовательно, многочлен $t_n$ имеет на интервале $[\pi/2h, 2\pi+\pi/2h)$ локальные экстремумы в точках $(k\alpha+\pi l-\pi/2)/h$, $k=1,\ldots,m+1$, $l=1,\ldots,2h$, и общее их количество равно $2(m+1)h>n$. Докажем его единственность рассуждением от противного. Так как производная многочлена $t_n$ в точках локальных экстремумов равна нулю, то если бы существовал другой многочлен с теми же локальными экстремумами, то разность этих многочленов имела бы на интервале $[\pi/2h, 2\pi+\pi/2h)$ не менее $2(m+1)h>n$ двукратных корней, что противоречит теореме о числе корней на периоде у тригонометрического многочлена.

Рассмотрим случай четного $\lfloor n/h\rfloor$. Тогда $n\geqslant(2m+2)h$, $m=\lfloor\frac{n-h}{2h}\rfloor$. Полагаем, как и выше, что $c_h=1$. Покажем, что тогда экстремальными будут многочлены $g_{2m+1}(hx)+cU^2_{m+1}(\sin hx)$ при любом достаточно малом $|c|$, где $U_k(x)$ — многочлен Чебышёва второго рода, определяемый равенством $U_k(\cos x)=\sin(k+1)x/\sin x$ (см. [1]). Так как в силу тождества $\sin(k+2)x+\sin kx=2\sin(k+1)x\cos x$ очевидно $U_{k+1}(\cos x)+U_{k-1}(\cos x)=2\cos xU_k(\cos x)$, то по индукции легко проверяется, что $U_k(x)$ есть алгебраический многочлен степени $k$. Так как

$$U_k(-\cos x)=U_k(\cos(x+\pi))=\frac{\sin(k+1)(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=$$
$$=(-1)^k\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}=(-1)^kU_k(\cos x),$$

то $U_k(-x)=(-1)^kU_k(x)$, значит $U_k^2(x)$ — четный алгебраический многочлен степени $2k$, значит $U^2_{m+1}(\sin h(x+\pi))=U^2_{m+1}(\pm\sin hx)=U^2_{m+1}(\sin hx)$, следовательно $U^2_{m+1}(\sin hx)=\sum\limits_{k=0}^{m+1}d_{2k}\cos 2khx$ есть четный тригонометрический многочлен порядка $2(m+1)h\leqslant n$. Так как корни многочлена $U_k(x)$ есть, очевидно, $\cos l\pi/(k+1), l=1,\ldots,k$ то в силу равенств

$$\alpha=\frac{\pi}{m+2}, \sin\left(h\frac{k\alpha+\pi l-\pi/2}{h}\right)=\sin\left(k\alpha+\pi l-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=(-1)^{l+1}\cos k\alpha=(-1)^l\cos(m+2-k)\alpha$$

тригонометрический многочлен $U_{m+1}(\sin hx)$ имеет корни $(k\alpha+\pi l-\pi/2)/h$, $k=1,\ldots,m+1$, $l\in\mathbb{Z}$. В силу формулы дифференцирования $(f^2)'=2ff'$ у многочлена $U^2_{m+1}(\sin hx)$ те же корни будут двукратными (но не троекратными, так как суммарная кратность корней на периоде не может быть больше $4(m+1)h$), и они совпадают с точками локальных экстремумов многочлена $g_{2m+1}(hx)$, так как подобные точки многочлена $g_{2m+1}(x)$ есть $k\alpha+\pi l-\pi/2$,$k=1,\ldots,m+1$, $l\in\mathbb{Z}$. Поэтому локальные экстремумы многочлена $g_{2m+1}(hx)+cU^2_{m+1}(\sin hx)$

совпадают с локальными экстремумами многочлена $g_{2m+1}(hx)$. Осталось доказать, что при малом $|c|$ локальные экстремумы будут также глобальными. Заметим, что, в силу отсутствия кратных корней у производной $g_{2m+1}(x)$ и известного признака локального экстремума, в точках локальных максимумов вторая производная $g_{2m+1}(x)$ отрицательна, а в точках локальных минимумов — положительна, и то же самое, очевидно, верно для многочлена $g_{2m+1}(hx)$. Аналогично, во всех указанных точках вторая производная многочлена $U_{m+1}^2(\sin hx)$ положительна. Поэтому глобальность локальных экстремумов у многочлена $g_{2m+1}(hx)+cU_{m+1}^2(\sin hx)$ при любом достаточно малом $|c|$ вытекает из следующей интуитивно очевидной леммы:

Пусть функции $f, g$ дважды дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Если они имеют двукратные нули в точках $a, b$, вторая производная $g$ в этих точках отрицательна, вторая производная $f$ в них положительна, и $g(x)<0<f(x)$ при $a<x<b$, то при малом $|c|$ $g(x)+cf(x)<0$ при $a<x<b$. Если же $g$ убывает на этом отрезке и $g'(a)=g'(b)=0$, $g''(a)<0, g''(b)>0$, то $g(a)\geqslant g(x)+cf(x)\geqslant g(b)$ при малом $|c|$.

Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что при малом $|c|$ и $a<x<b$ справедливо неравенство $g(x)/f(x)<-c$. Так как $g(x)/f(x)<$ $<0$, и согласно правилу Бернулли – Лопиталя[17)]

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g''(a)}{f''(a)}<0,$$

и аналогично $\lim\limits_{x\to a} g(x)/f(x)<0$, значит функция $g(x)/f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, поэтому согласно теореме[18)] о существовании экстремума

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} g(x)/f(x)=M<0$$

и достаточно выбрать $|c|<|M|$. Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что при $a<x<b$

$$(g(a)-g(x))/f(x)>c>(g(b)-g(x))/f(x).$$

Применяя правило Лопиталя к обеим дробям имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{g(a)-g(x)}{f(x)}=-\frac{g''(a)}{f''(a)}>0,\quad \lim_{x\to b}\frac{g(b)-g(x)}{f(x)}=-\frac{g''(b)}{f''(b)}<0,$$

значит функции $(g(a)-g(x))/f(x), (g(b)-g(x))/f(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, поэтому согласно теореме о существовании экстремума

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{g(a)-g(x)}{f(x)}=M_1>0,\quad \max_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{g(b)-g(x)}{f(x)}=M_2<0,$$

и достаточно выбрать $|c|<\min(M_1,-M_2)$.

[17)]Если $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Можно, конечно, обойтись без правила Лопиталя, используя вместо него теорему о среднем.

[18)]Непрерывная на отрезке функция имеет на нём максимум и минимум.

## Список литературы

[1] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* М.: Мир, 1978.

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Физматлит, 2004.

[3] Бернштейн С. Н. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной.* М.: ОНТИ, 1937.

[4] Рыжаков И. Ю. *Об одной задаче С. Н. Бернштейна* // ДАН СССР, 1963, 153, №2, С. 282–285.

[5] Вороновская Е. В. *Метод функционалов и его приложения.* Л., 1963.

[6] Гашков С. Б. *О некоторых частных случаях задачи Владимира Маркова в метрике* $L_p$ // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. Изд. МГУ, 1987. С. 79–82.

[7] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы арифметики и алгебры.* М.: Физматлит, 2001.

С. Б. Гашков, механико-математический факультет МГУ