
Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Можно ли получить все возможные состояния кубика Рубика, последовательно выполняя некоторую комбинацию поворотов? (Учитываются только конечные, а не промежуточные состояния.)
(А. К. Ковальджи)
2. Найти дискриминант многочлена $P(x) = x^{2003} + x + 1$.
(М. Л. Концевич)
3. Можно ли круг с двумя дырками отобразить в себя без неподвижных точек?
(М. Л. Концевич)
4. Доказать, что на описанной окружности каждого треугольника существует ровно три точки, для которых соответствующие прямые Симсона касаются окружности девяти точек треугольника, причем эти точки являются вершинами правильного треугольника.
(М. Ю. Панов)
5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим $N(\alpha) = \{[n\alpha] | n \in \mathbb{N}\}$. При каких k найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \dots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?
(А. А. Заславский, А. В. Спивак)
6. Внутри единичного квадрата расположено бесконечное множество точек. Всегда ли найдется гладкая кривая, проходящая через бесконечное его подмножество? А бесконечно гладкая?
(Фольклор)

7. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдется такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия $\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^{1/p} dx < 1$; $k = 0, \dots, \lfloor (n+p)/p \rfloor$ влекут условие $|f(0)| < C$. (А. Я. Канель)
8. В граничных клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы, чтобы каждое число равнялось бы среднему арифметическому своих соседей. (М. З. Двейрин)
9. Сфера раскрашена в 2 цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами. (Л. А. Емельянов)
10. Существует ли векторное пространство нильпотентных матриц некоторого порядка, произведения элементов которого порождают всю матричную алгебру? (Матрица A называется *нильпотентной*, если $A^k = 0$ для некоторого k .) (П. Якобианов)
11. Ряд $\sum a_n$ сходится в среднем, если существует предел средних арифметических его частных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n s_k)/n$, $s_k = \sum_{m=1}^k a_m$. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится в среднем и при этом а) $a_n = o(1/n)$ (т. е. $\lim n a_n = 0$); б) $a_n = O(1/n)$ (т. е. $\exists C > 0 : |n a_n| < C$). Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится. (А. Я. Белов)
12. Идеальный солдат является конечным автоматом (т. е. принимает конечное число состояний и воспринимает конечное число сигналов). Солдат понимает «лево-право», воспринимает сигналы только от своих непосредственных соседей и понимает, является ли он крайним в шеренге. За один такт он обменивается сигналами с соседями. Можно ли так запрограммировать солдат, что если поставить в шеренгу солдат, находящихся в некотором одинаковом состоянии, то после того как первому будет дана команда, через некоторое время все они выстрелят одновременно? (Программа не должна зависеть от длины шеренги.) (Задача Майхилла о стрелках)

ИСПРАВЛЕНИЯ

В задачнике №3 «Математического Просвещения» условие задачи 3.9 (автор — С. Маркелов) было приведено неверно. Приводим правильное условие этой задачи и предлагаем читателям попробовать свои силы в ее решении.

3.9. Доказать, что на поверхности трехмерного выпуклого тела найдутся 5 точек, образующих вершины правильного 5-угольника.