# ... об объеме тетраэдра

Р. Травкин

В предыдущем номере («Математическое просвещение», третья серия, вып. 6, с. 132) была приведена[1)] следующая формула для объема тетраэдра, которую можно рассматривать как трехмерный аналог формулы Герона. Пусть $u, v, w, U, V, W$ — длины сторон тетраэдра $ABCD$ (см. рис. 1),

$$X = (w - U + v)(U + v + w); \quad x = (U - v + w)(v - w + U);$$
$$Y = (u - V + w)(V + w + u); \quad y = (V - w + u)(w - u + V);$$
$$Z = (v - W + u)(W + u + v); \quad z = (W - u + v)(u - v + W);$$
$$a = \sqrt{xYZ};\ b = \sqrt{yZX};\ c = \sqrt{zXY};\ d = \sqrt{xyz}.$$

Тогда объем тетраэдра равен

$$\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{192uvw}.$$

Ниже приводится предложенное Р. Травкиным доказательство этой формулы. Аналогичное доказательство сообщил также А. Ахметели (akhmeteli@home.domonet.ru).

Обозначим вершины и плоские углы тетраэдра так, как показано на рисунке 1 на с. 186. Используя теорему косинусов, имеем:

$$X = (w - U + v)(U + v + w) = \\ = (v + w)^2 - U^2 = v^2 + 2vw + w^2 - v^2 - w^2 + 2vw\cos\alpha = \\ = 2vw(1 + \cos\alpha) = 4vw\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично $Y = 4wu\cos^2\beta/2$ и $Z = 4uv\cos^2\gamma/2$. Для $x, y, z$ похожие вычисления дают $x = 4vw\sin^2\alpha/2$; $y = 4wu\sin^2\beta/2$; $z = 4uv\sin^2\gamma/2$.

Подставляя найденные значения для $x, y, z, X, Y, Z$ в формулы для $a, b$, $c, d$, получим:

$$a = 8uvw\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}; \qquad b = 8uvw\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$
$$c = 8uvw\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}; \qquad d = 8uvw\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

[1)] С. Маркелов узнал эту формулу от знакомых. Приведем ссылку, которая возможно является первоисточником:
Kahan W. What has the volume of a tetrahedron to do with computer programming languages? E-version (draft): http://www.cs.berkeley.edu/ wkahan/VtetLang.pdf

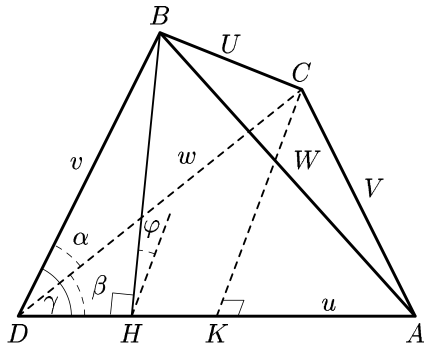


***Рис. 1.***

Вычислим теперь составляющие формулы объема тетраэдра. Непосредственная проверка показывает, что:

$$-a+b+c+d = 8uvw\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}; \quad a-b+c+d = 8uvw\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2};$$
$$a+b-c+d = 8uvw\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}; \quad a+b+c-d = 8uvw\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Таким образом, выражение для объема тетраэдра запишется в виде:

$$\text{Объем} = \frac{64u^2v^2w^2\sqrt{\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}}{192uvw} =$$
$$= \frac{uvw}{3}\sqrt{\left(\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)} =$$
$$= \frac{uvw}{6}\sqrt{(\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma))(\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{uvw}{6}\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{uvw}{6}\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma-(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2}\,. \qquad (1)$$

Пусть $\varphi$ — двугранный угол при ребре $DA$. Из второй теоремы косинусов для трехгранного угла с вершиной $D$ имеем: $\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi$. Поэтому формулу (1) можно переписать в виде:

$$\text{Объем} = \frac{uvw}{6}\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma-\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\varphi} = \frac{uvw}{6}\sin\beta\sin\gamma\sin\varphi. \quad (2)$$

Обозначив высоту тетраэдра, проведенную из вершины $C$, через $h_C$, получаем: $h_C = CK\sin\varphi = w\sin\beta\sin\varphi$; $S_{ABD} = \frac{1}{2}uv\sin\sin\gamma$. По известной формуле, объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}S_{ABD}h_C = \frac{1}{6}uvw\sin\gamma\sin\beta\sin\varphi$, что совпадает с доказываемой формулой (2).