Нам пишут...

... о наших недостатках

Б. М. Макаров
bmmak@bmmak.usr.pu.ru

Как постоянному и заинтересованному читателю «Математического просвещения» мне хотелось бы обратить Ваше внимание на то, что форма подачи материала в заметке «Задачи Гельфанда и Кириллова» («Математическое просвещение», №6, с. 136) не вполне удачна. Вероятно, следовало бы более ясно сказать, что не все из указанных задач являются оригинальными. Ввиду отсутствия такого комментария у неискушенного читателя может, мне кажется, создаться впечатление, что И. М. является автором всех приведенных задач (кроме двух последних). Вместе с тем, первая из них подробно разбирается во многих учебниках (см. Фихтенгольц, том II, или книгу Бурбаки «Функции действительного переменного», где на с. 408 приведена краткая история вопроса). Подобное можно сказать и о второй задаче.

Мне хотелось бы также сообщить редакции (а если она сочтет это целесообразным, то и читателям) альтернативное решение задачи о равномерной сходимости ряда с членами $x^n/(1+x^n)^n$ (см. с. 142–145 выпуска 6, решение задачи 2.8).

* * * * * *

От редколлегии. Благодарим Б. М. Макарова за его критическое замечание и приносим извинения читателям за неудачный выбор названия для заметки о задачах, предлагавшихся студентам И. М. Гельфандом и А. А. Кирилловым.

К сожалению, несмотря на всю важность вопроса авторства задач и теорем, мы не всегда имеем возможность проводить надлежащие изыскания для точного решения этого вопроса. Основная цель нашего сборника — популяризация интересных математических тем, сюжетов и задач.

Приводим присланное Б. М. Макаровым решение задачи 2.8.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7, 2003(182–184)

* * * * * *

2.8. Условие. Выяснить, равномерно ли сходится на отрезке $[0;1]$ ряд

$$\sum \frac{x^n}{(1+x^n)^n}.$$

Решение. Так как $(1+x^n)^n \geqslant \frac{1}{2}n(n-1)x^{2n} \geqslant \frac{n^2}{4}x^{2n}$ при $n > 1$, то данный ряд мажорируется рядом с членами $\min\{x^n, \frac{4}{n^2x^n}\}$. Поэтому требуемый результат следует из равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n>1} \min\Big\{x^n, \frac{1}{n^2x^n}\Big\} = \sum_{n>1} \frac{1}{n} \min\Big\{nx^n, \frac{1}{nx^n}\Big\}. \tag{1}$$

Поскольку этот ряд равномерно сходится на каждом промежутке $[0,q]$ при $q < 1$, нам достаточно доказать его равномерную сходимость на промежутке $\Delta = [0.99, 1)$.

Считая, что $x \in \Delta$, рассмотрим слагаемые ряда (1). Первые из них, будучи равными $\frac{1}{n^2x^n}$, сначала убывают, а затем возрастают. Остальные слагаемые равны x^n. Чтобы дать более формальное описание поведения членов ряда, введем функцию $y \mapsto \varphi_x(y) = y^2x^y$ при $y > 1$. Очевидно, $\varphi_x(y) \to 0$ при $y \to +\infty$. Каждому числу $x \in \Delta$ сопоставим два параметра: $s = s(x)$ и $t = t(x)$. Число s — это то значение y, где функция φ_x достигает максимума и меняет характер монотонности. Число t — это то значение $y > 1$, после которого первое из чисел $x^y,\ 1/(y^2x^y)$ будет меньше второго. Легко подсчитать, что

$$e^{-1/s} = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad t^{-1/t} = x. \tag{2}$$

Так как $x \in \Delta$, то $t > s > 100$.

Покажем теперь, что остаток ряда (1)

$$S_N(x) = \sum_{n>N} \min\Big\{x^n, \frac{1}{n^2x^n}\Big\}$$

допускает равномерную оценку. Из (1) видно, что n-ый член ряда не превосходит $1/n$, и поэтому все слагаемые в остатке меньше $1/N$.

В порядке усложнения оценки рассмотрим три случая:

$$\text{I. } t \leqslant N, \quad \text{II. } s \leqslant N < t, \quad \text{III. } N < s.$$

I. Используя (2) и неравенство $1 - e^{-u} \geqslant u/2$ при $0 < u < 1$, мы имеем:

$$S_N(x) = \sum_{n>N} x^n < \frac{x^N}{1-x} = \frac{t^{-N/t}}{1-t^{-1/t}} \leqslant \frac{2}{\ln t}\, t^{1-N/t}.$$

Если $N \leqslant t^2$, то правая часть не превосходит $2/\ln t \leqslant 2/\ln\sqrt{N}$ и, следовательно, $S_N(x) < 4/\ln N$. Если же $N > t^2$, то она меньше $100^{1-\sqrt{N}}$, так как $t > 100$. Таким образом, в рассматриваемом случае $S_N(x) < 4/\ln N$.

II. Теперь для оценки $S_N(x)$ воспользуемся тем, что возрастающая на промежутке $[a, b+1]$ функция f удовлетворяет неравенству

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} f(n) \leqslant \int_a^{b+1} f(y)\,dy.$$

Как мы отмечали, функция $1/\varphi_x(y)$ возрастает при $y > s$, а все слагаемые в остатке меньше $1/N$. Поэтому (далее $[t]$ — целая часть числа t)

$$S_N(x) < \sum_{N<n<[t]} \frac{1}{n^2x^n} + \frac{1}{N} + S_{[t]}(x) \leqslant \int_N^{[t]} \frac{dy}{y^2x^y} + \frac{1}{N} + \frac{4}{\ln[t]} \leqslant$$
$$\leqslant \int_s^t \frac{dy}{y^2x^y} + \frac{5}{\ln N}. \tag{3}$$

Сделав в последнем интеграле замену $z = x^{-y}$, мы (учитывая, что $x^{-t} = t$ и $x^{-s} = e^2$) получим

$$\int_s^t \frac{dy}{y^2x^y} = |\ln x| \int_{e^2}^t \frac{dz}{\ln^2 z}. \tag{4}$$

Асимптотика стоящего справа интеграла находится без труда, но нам достаточно совсем грубой оценки:

$$\int_{e^2}^t \frac{dz}{\ln^2 z} = \int_{e^2}^{\sqrt{t}} \frac{dz}{\ln^2 z} + \int_{\sqrt{t}}^t \frac{dz}{\ln^2 z} < \sqrt{t} + \frac{t}{\ln^2\sqrt{t}} < 5\frac{t}{\ln^2 t}.$$

Так как $|\ln x| = \ln t/t$, то вместе с (4) это дает нам, что

$$\int_s^t \frac{dy}{y^2x^y} < \frac{5}{\ln t} \leqslant \frac{5}{\ln N}.$$

Из (3) и последнего неравенства мы получаем: $S_N(x) < \dfrac{10}{\ln N}$.

III. Используя предыдущий результат и равенство $x^{-s} = e^2$, мы имеем

$$S_N(x) = \sum_{N<n\leqslant[s]+1} \frac{1}{n^2x^n} + S_{[s]+1}(x) \leqslant \frac{1}{x^{s+1}} \sum_{n>N} \frac{1}{n^2} + \frac{10}{\ln[s]} \leqslant \frac{e^2}{0.99N} + \frac{10}{\ln N}\,.$$

Таким образом, при достаточно больших N во всех случаях справедлива равномерная оценка:

$$S_N(x) \leqslant \frac{11}{\ln N} \quad \text{при} \quad x \in \Delta.$$

(*Б. М. Макаров*)