Симметрии поверхностей и вещественные алгебраические кривые

С. М. Натанзон

Еще древние считали, что красота и совершенство связаны с симметрией. С этой точки зрения самой совершенной поверхностью является сфера, имеющая бесконечную группу симметрии. Разумеется, не все поверхности обладают такой большой группой симметрии. В этой статье мы обсудим, какими группами симметрии могут обладать поверхности в зависимости от их топологического типа. Мы увидим, что эта проблема связана с топологическими свойствами вещественных алгебраических кривых.

1. Перейдем к точным определениям. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение называется *гомеоморфизмом.* Поверхности, между которыми существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными.* Гомеоморфными являются, например, сфера и куб (рис. 1). Не все поверхности, разумеется, гомеоморфны сфере. Не гомеоморфен сфере, например, тор (рис. 2).

Различные поверхности можно склеивать между собой. Для этого надо вырезать у каждой из них по диску и склеить поверхности по границам разрезов (рис. 3). Если к сфере приклеить тор, то получится снова тор.

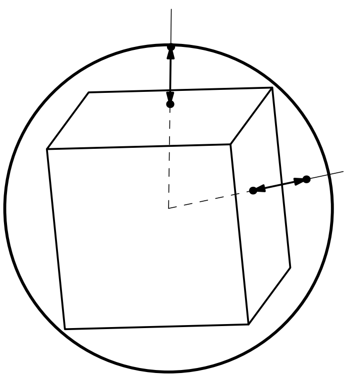

Рис. 1.

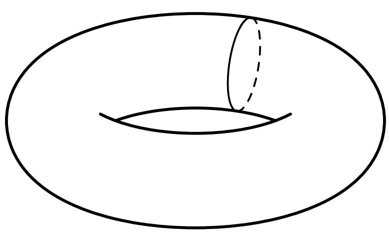

Рис. 2.

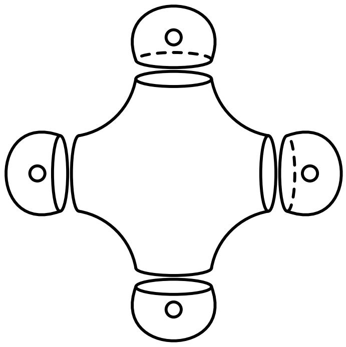

Рис. 3.

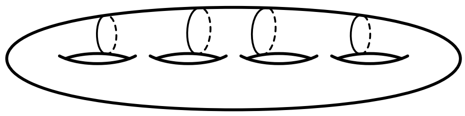

Рис. 4.

Но если к сфере приклеить $g > 1$ торов, то получится поверхность, не гомеоморфная ни сфере, ни тору. Всякая поверхность, гомеоморфная поверхности такого типа, называется *поверхностью рода* g. Сфера имеет род 0, тор — род 1. (На рис. 3 и 4 изображены две поверхности рода 4). Всякая компактная связная ориентируемая поверхность P без границы является поверхностью некоторого рода $g = g(P)$. Поверхности различных родов не гомеоморфны.

2. В привычном со школы понимании симметрия — это отображение поверхности в себя, сохраняющее расстояние между точками. Такие отображения образуют группу, называемую *группой изометрий*. Самую большую группу изометрий имеет сфера $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Бесконечную группу изометрий имеет и тор $\mathbb{T}$, получающийся вращением вокруг оси Y окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$. Можно доказать, однако, что поверхности рода $g > 1$ имеют лишь конечную группу изометрий.

Всякая симметрия поверхности P является автогомеоморфизмом, то есть гомеоморфизмом поверхности на себя. Именно это свойство является решающим при исследовании конечных групп изометрий поверхности. Поэтому мы будем пользоваться следующим определением:

Поверхностью с симметриями называется пара (P, G), состоящая из связной поверхности P и конечной группы G ее автогомеоморфизмов.

Поверхности с симметриями (P_1, G_1) и (P_2, G_2) считаются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon P_1 \to P_2$ такой, что $\varphi G_1 \varphi^{-1} = G_2$.

Если все автогомеоморфизмы из G сохраняют ориентацию, мы будем говорить, что (P, G) — *поверхность с ориентируемыми симметриями*.

Поверхностями рода 0 с ориентируемыми симметриями являются, например, пары $(\mathbb{S}, G)$, где

1) G — группа поворотов сферы $\mathbb{S}$ вокруг оси Z на углы $2\pi/n$;

2) G — группа, порожденная отражениями в прямых $\ell_0, \ldots, \ell_{n-1}$. Здесь ℓ_0 — это ось X, а ℓ_k получается из ℓ_0 поворотом на угол $k\pi/n$ в плоскости X, Y;

3) G — ориентируемая группа симметрии платонового тела, вписанного в $\mathbb{S}$. (Напомним, что существует ровно пять платоновых тел, т. е. правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Группы симметрии куба и октаэдра совпадают. Группы симметрии додекаэдра и икосаэдра также совпадают [1], см. также статью [2] в настоящем сборнике.)

Оказывается, что любая поверхность рода 0 с ориентируемыми симметриями топологически эквивалентна одной из этих поверхностей.

Поверхности рода 1 с ориентируемыми симметриями также поддаются классификации. Она сводится к классификации двумерных кристаллографических групп, т. е. дискретных групп движений евклидовой плоскости. Все такие группы описываются теоремой Федорова [3].

Поверхности с симметриями (P, G) рода 0 и 1 могут иметь группу симметрии G произвольно большого порядка. Для поверхностей рода $g > 1$ это уже не так. Согласно теореме Гурвица [4], в этом случае порядок ориентируемой группы симметрии не превосходит $84(g-1)$. Отсюда следует, в частности, что число топологических типов поверхностей с ориентируемыми симметриями конечно. Для небольших родов ($g < 6$) все такие типы удается найти [5, 6]. Можно найти также все топологические типы поверхностей с ориентируемыми симметриями, образующими группу вида $\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, где p — простое число [7].

3. Перейдем теперь к симметриям, меняющим ориентации поверхности P. Имеющий неподвижные точки и меняющий ориентацию автогомеоморфизм τ назовем *зеркальной симметрией.* Группа $\langle\tau\rangle$, порождаемая зеркальной симметрией τ, состоит из 2 элементов, т. е. $\tau^2 = 1$. Связная поверхность с симметрией $(P, \langle\tau\rangle)$ будет называться *зеркальной поверхностью.*

Простейший пример зеркальной поверхности — это сфера $\mathbb{S}$ с инволюцией $\tau(x, y, z) = (x, y, -z)$ (т. е. τ — это отражение в плоскости $z = 0$).

Построим теперь более широкую серию примеров.

Давайте рассмотрим поверхность рода h, расположенную в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ таким образом, чтобы ее часть, лежащая в полупространстве $z < 0$, состояла из n отдельных дисков. Обозначим через P^+ часть поверхности, лежащую в полупространстве $z \geqslant 0$. Отображение $\tau(x, y, z) = (x, y, -z)$ переводит ее в поверхность P^-. Инволюция τ индуцирует на поверхности $P_{g,n} = P^+ \cup P^-$ рода $g = 2h + n - 1$ инволюцию τ_n. Таким образом, $(P_{g,n}, \langle\tau_n\rangle)$ — зеркальная поверхность рода g.

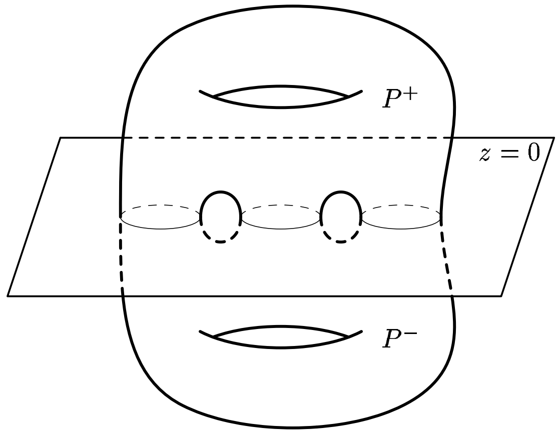

Рис. 5.

Неподвижные точки инволюции τ_n — это граничные контуры $c_1, \ldots, c_n$ поверхности P^+. Они разделяют поверхность $P_{g,n}$ на две части P^+ и P^- (рис. 5).

Зеркальные поверхности $(P, \langle\tau\rangle)$, топологически эквивалентные $(P_{g,n}, \langle\tau_n\rangle)$, мы будем называть *зеркальными поверхностями типа* $(g, n, 1)$. Инволюция τ в этом случае называется *разделяющей*. Очевидно, что поверхность типа $(g, k, 1)$ существует, если и только если $1 \leqslant k \leqslant g+1$ и $k \equiv g+1 \pmod 2$.

Модифицируем теперь эту конструкцию. Каждый из контуров $c_1, \ldots, c_n$ имеет свою симметрию $\eta_i\colon c_i \to c_i$ — «поворот на угол π». Давайте разрежем $P_{g,n}$ по контурам $c_1, \ldots, c_r$ $(1 \leqslant r < n)$ и склеим их вновь «с поворотом на π». Получится новая поверхность $\widetilde{P}_{g,n}$ рода g, на которой инволюция τ_n индуцирует новую инволюцию $\tau_{n-r}\colon \widetilde{P}_{g,n} \to \widetilde{P}_{g,n}$. Неподвижные точки инволюции τ_{n-r} — это контуры $c_{r+1}, \ldots, c_n$. И они не разбивают поверхность $\widetilde{P}_{g,n}$ (контуры $c_1, \ldots, c_r$ под действием инволюции τ_{n-r} поворачиваются «на угол π», и, следовательно, не содержат неподвижных точек). Согласно нашим определениям, $(\widetilde{P}_{g,n}, \langle\tau_{n-r}\rangle)$ — зеркальная поверхность рода g.

Зеркальные поверхности $(P, \langle\tau\rangle)$, топологически эквивалентные $(\widetilde{P}_{g,n}, \langle\tau_{n-r}\rangle)$, будут называться *зеркальными поверхностями типа* $(g, n-r, 0)$. Инволюция τ такой поверхности называется *неразделяющей*. Рассмотренная конструкция показывает, что поверхность типа $(g, k, 0)$ существует, если и только если $1 \leqslant k \leqslant g$. Неподвижные точки отображения в этом случае распадаются на k простых замкнутых контуров, не разбивающих поверхность.

Замечательная теорема Вайхольда [8] утверждает, что *любая зеркальная поверхность* $(P, \langle\tau\rangle)$ *является зеркальной поверхностью типа* (g, k, ϵ) (*где* $\epsilon = 0$ *или* 1). Более того, *зеркальные поверхности топологически эквивалентны, если и только если они имеют одинаковый тип.* (Простое доказательство этой теоремы можно найти в [9]).

Из теоремы Вайхольда следует, в частности, что множество неподвижных точек зеркальной симметрии τ распадается на k простых замкнутых контуров, называемых *зеркалами.* Мы будем обозначать число зеркал через $|\tau|$.

4. Произвольная поверхность с симметриями (P, G) может, разумеется, содержать несколько зеркальных симметрий $\tau_1, \ldots, \tau_n \in G$. Оказывается, что этот набор $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ обладает рядом замечательных свойств. Первое из них $|\tau_i| \leqslant g+1$ (неравенство Харнака) сразу следует из теоремы Вайхольда. Из нее же следует, что эта оценка достигается. Достигается также и оценка $|\tau_1| + |\tau_2| \leqslant 2g + 2$ (см. рис. 6).

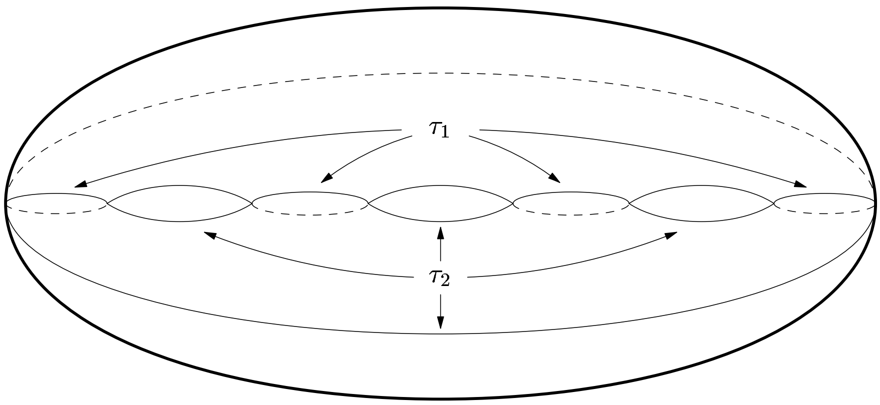

Рис. 6.

Тем более удивительной кажется теорема, утверждающая, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\tau_i| \leqslant 42(g-1) \text{ при } g > 1 \quad [10]$$

и даже, более того,

$$\sum_{i=1}^{n} |\tau_i| \leqslant 12(g-1) \text{ при } g > 9 \quad [11].$$

Если $\alpha \in G$ является зеркальной симметрией и $h \in G$, то $\beta = h\alpha h^{-1}$ будет тоже зеркальной симметрией. Такие симметрии называются *сопряженными.* Оказывается, что максимальное число попарно несопряженных зеркальных симметрий не превосходит $2(\sqrt{g}+1)$ и эта оценка достигается для бесконечного числа разных g [12]. Если все эти симметрии разделяющие, то суммарное число их зеркал не превосходит $2g-(n-9)2^{n-3}-2 \leqslant \leqslant 2g+30$ [13]. Если же g — четное, то попарно несопряженных зеркальных симметрий не более четырех [14].

Удается также полностью перечислить все группы G, содержащие зеркальные симметрии с числом зеркал, равным или большим чем род поверхности [10, 15].

5. Эти чисто топологические результаты имеют важные приложения в теории алгебраических кривых. Начнем с определений.

Плоская аффинная кривая над полем $\mathbb{K}$ определяется полиномом $F(x,y)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$. *Множеством ее* $\mathbb{K}$*-точек* является множество пар $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ таких, что $F(x,y)=0$. Говоря о кривых над полем $\mathbb{K}$, мы будем всегда считать, что они имеют $\mathbb{K}$-точки.

Простейшая нетривиальная аффинная кривая — это *гиперэллиптическая кривая* $F(x,y)=y^2-f(x)$, где $f(x)$ — многочлен с попарно различными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$. Если F — вещественная кривая (т. е. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) и $f(x)=\prod_{i=1}^{2n-1}(x-x_i)$, где $x_1 < \ldots < x_{2n-1} \in \mathbb{R}$, то ее вещественные точки — это пары $(x, \pm\sqrt{f(x)})$, где $x \in [x_{2i-1}, x_{2i}]$ $(i=1,\ldots,n-2)$ или $x > x_{2n-1}$. После добавления точки (∞,∞) множество вещественных точек кривой F распадается на n замкнутых контуров, называемых овалами (рис. 7).

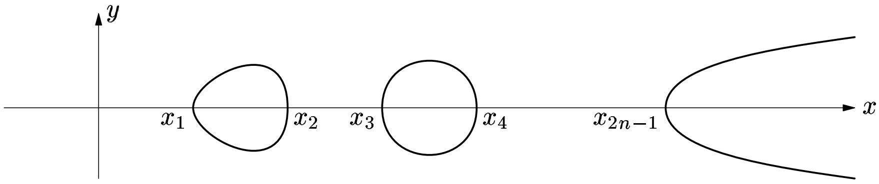

Рис. 7.

Поскольку вещественные числа являются частным случаем комплексных чисел, мы можем рассматривать аффинную кривую $F(x,y)=y^2-f(x)$ и как комплексную кривую (т. е. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Ее комплексные точки имеют вид $(x, \pm\sqrt{f(x)})$, где в качестве x может теперь выступать любое комплексной число $x \in \mathbb{C}$. Поэтому множество комплексных точек комплексной кривой связно и двулистно накрывает множество $\mathbb{C}$. После добавления точки (∞,∞) это множество превращается в компактную поверхность рода $g=n-1$.

Похожее строение имеет и множество комплексных точек произвольной плоской комплексной аффинной кривой F. Оно получается выкалыванием и склеиванием конечного числа точек некоторой (возможно, несвязной) поверхности $\mathbb{C}(F)$. Если $\mathbb{C}(F)$ — связная поверхность, то говорят, что кривая *неприводима*.

Напомним, что *рациональной функцией* называется отношение многочленов. Произвольная рациональная замена переменных $x \mapsto \xi(s,t)$, $y \mapsto \eta(s,t)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ переводит аффинную кривую $F(x,y)$ в аффинную кривую $\widetilde{F}(s,t)$. Если существует и обратная рациональная замена с коэффициентами из $\mathbb{K}$ $s \mapsto \alpha(x,y)$, $t \mapsto \beta(x,y)$, то говорят, что кривые $F(x,y)$ и $\widetilde{F}(s,t)$ бирационально изоморфны над $\mathbb{K}$. Класс бирациональной изоморфности плоской аффинной кривой называется *алгебраической кривой*.

Поверхности $\mathbb{C}(F)$, отвечающие бирационально изоморфным аффинным комплексным алгебраическим кривым, отождествляются. Поэтому можно считать, что неприводимой комплексной алгебраической кривой F отвечает некоторая поверхность $\mathbb{C}(F)$ рода $g = g(F)$.

Воспользуемся теперь тем, что вещественные числа являются частным типом комплексных чисел. Поэтому мы можем рассматривать плоскую вещественную кривую F и как аффинную комплексную кривую $F_{\mathbb{C}}$. На языке точек это означает, что кроме вещественных решений уравнения $F(x,y) = 0$ мы рассматривает и его комплексные решения. Вещественная кривая F называется *неприводимой*, если $F_{\mathbb{C}}$ — неприводимая комплексная кривая. Дальше мы считаем, что все рассматриваемые кривые неприводимы.

Ввиду вещественности коэффициентов полинома F вместе с каждым решением $(x,y) \in \mathbb{C}$ уравнения $F(x,y) = 0$ решением этого уравнения является также и пара $(\bar{x},\bar{y})$. Таким образом, соответствие $(x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ порождает зеркальную симметрию $\tau_F\colon \mathbb{C}(F_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}(F_{\mathbb{C}})$. Его неподвижные точки — это вещественные точки кривой F. Как мы уже знаем, эти точки образуют $k \leqslant g+1$ зеркал. Эти зеркала называются *овалами* вещественной кривой F. Вещественная гиперэллиптическая кривая $F = y^2 - f(x)$, например, имеет $n = g+1$ овалов, отвечающих отрезкам $[x_1,x_2],[x_3,x_4]$, $\ldots$, $[x_{2n-1},\infty]$ (см. рис. 7).

Таким образом, мы сопоставили каждой вещественной алгебраической кривой F зеркальную поверхность $(\mathbb{C}(F_{\mathbb{C}}),\langle\tau_F\rangle)$. Можно доказать, что это соответствие является взаимно однозначным [16].

6. Соответствие между алгебраическими кривыми и поверхностями позволяет исследовать следующий важный для приложений вопрос: насколько полно комплексификация $F_{\mathbb{C}}$ вещественной алгебраической кривой F определяет саму вещественную кривую?

На языке аффинных кривых этот вопрос означает следующее: какими свойствами обладают бирациональные комплексные замены переменных

$(x,y) \rightleftarrows (\xi,\eta)$, переводящие друг в друга вещественные аффинные кривые $F(x,y)$ и $\widetilde{F}(s,t)$. Приведем пример, показывающий, что такие замены существуют.

Пример. Кривая $F_1(x,y) = y^2 - x(x^8-1)$ переводится обратимой заменой $(s \mapsto x = e^{i\frac{\pi}{8}}s, t \mapsto y = e^{i\frac{9}{16}\pi}t)$, $(x \mapsto s = e^{-i\frac{\pi}{8}}x,\ y \mapsto t = e^{-i\frac{9}{16}\pi}y)$ в кривую $F_2(s,t) = t^2 - s(s^8+1)$. Эта же кривая F_1 переводится обратимой заменой $(u \mapsto x = \dfrac{u-i}{-u-i},\ v \mapsto y = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{4}}}{(u+i)^5}v)$, $(x \mapsto u = i\dfrac{1-x}{1+x}$, $y \mapsto v = \dfrac{8e^{i\frac{\pi}{4}}}{(x+i)^5}y)$ в кривую $F_3(u,v) = v^2 - u(u^4-1)(u^4-6u^2+1)$.

На геометрическом языке вещественным кривым с общей комплексификацией отвечают различные зеркальные симметрии τ одной и той же поверхности P. Уточним это соответствие. На самом деле поверхность $P = \mathbb{C}(L)$, отвечающая комплексной алгебраической кривой L, является римановой поверхностью, то есть обладает комплексной структурой. Это означает, что маленькая окрестность каждой точки поверхности взаимно однозначно проектируется на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, и все эти проекции согласованы между собой. Например, в случае комплексной гиперэллиптической кривой эта проекция почти для всех точек имеет вид $((x, \sqrt{f(x)}) \mapsto x)$. При $g > 1$ автогомеоморфизмы, сохраняющие эту комплексную структуру, образуют конечную группу, называемую группой автоморфизмов римановой поверхности.

Если $L = F_{\mathbb{C}}$ — комплексификация вещественной алгебраической кривой F, то зеркальная симметрия τ_F меняет комплексную структуру на комплексно сопряженную. Другими словами, τ_F является антиголоморфной инволюцией. Более того, оказывается, что любая антиголоморфная инволюция с неподвижными точками $\tau\colon P \to P$ имеет вид $\tau = \tau_F$, где F — некоторая вещественная алгебраическая кривая [16].

Кроме того, произведение любых двух антиголоморфных инволюций является автоморфизмом римановой поверхности. Таким образом, антиголоморфные инволюции порождают конечную группу G, и мы получаем поверхность с симметриями (P,G).

Бирациональный изоморфизм над $\mathbb{R}$ вещественных кривых F и $\widetilde{F}$ означает, что отражения τ_F и $\tau_{\widetilde{F}}$ сопряжены в группе G. Таким образом, вещественным кривым с римановой поверхностью P взаимно однозначно отвечают классы сопряженности зеркальных симметрий из G. Это соответствие между вещественными алгебраическими кривыми и зеркальными симметриями позволяет использовать топологические свойства зеркальных симметрий для исследования бирациональных отображений между алгебраическими кривыми.

Проиллюстрируем это на примере описанных выше вещественных алгебраических кривых F_1, F_2, F_3. Их общая комплексификация является римановой поверхностью P рода 4. Эти кривые имеют соответственно два, один и четыре овала. Топологическая классификация поверхностей с симметриями (P, G), где группа G содержит симметрии с таким числом овалов, показывает, что в этом случае множество зеркальных симметрий из G распадается на 3 класса сопряженности. Таким образом, всякая зеркальная симметрия из G сопряжена зеркальной симметрии τ_{F_i}, где $i = 1, 2, 3$. На языке бирациональных отображений это означает, что если между вещественными алгебраическими кривыми F и F_1 существует обратимое бирациональное отображение с комплексными коэффициентами, то между кривой F и одной из кривых F_i $(i = 1, 2, 3)$ существует обратимое бирациональное отображение с вещественными коэффициентами. Этот, казалось бы формульный факт, по-видимому, невозможно доказать без использования топологических соображений [10] и методов, основанных на геометрии Лобачевского [15].

Список литературы

[1] *Энциклопедия элементарной математики.* Кн. 4. Геометрия. М. 1963.

[2] Бугаенко В. О. *Правильные многогранники* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 107–115.

[3] Федоров Е. С. *Симметрия и структура кристаллов. Основные работы.* М., 1949. С. 111–255.

[4] Hurwitz A. Algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich // Math. Ann., 1893. Bd. 41.

[5] Kuribayashi I., Kuribayashi A. *Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera three and four* // J. Pure Appl. Algebra, 1990, Vol. 65. No 3. P. 277–292.

[6] Kuribayashi A., Kimura H. *Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus five* // J. Algebra, 1990, Vol. 134. No 1. P. 80–103.

[7] Costa A., Natanzon S. M. *Topological classification of Z_p^m actions on surfaces* // Michigan Math. J., 2002. Vol. 50. No 3. P. 451–460.

[8] Weichold G., *Über symmetrische Riemann'shen Flächen und die Periodizitäts modulu der zurgehörigen Abel'shen Normalintegrale erster Gattung* // Zeitschrift. fur Math. and Phys., 1883. Bd. 28. P. 321–351.

[9] Натанзон С. М. *Клейновы поверхности* // УМН, 1990. Т. 45. Вып. 6. С. 47–90.

[10] Натанзон С. М. *Конечные группы гомеоморфизмов поверхностей и вещественные формы комплексных алгебраических кривых* // Труды Моск. Мат. общества, 1988. Т. 51. С. 3–53.

[11] Gromadzki G. *On a Harnack – Natanzon theorem for the family of real forms of Riemann surfaces* // J. of Pure and App. Algebra, 1997. N. 121. P. 253–269.

[12] Натанзон С. М. *О порядке конечной группы гомеоморфизмов поверхности на себя и числе вещественных форм комплексной алгебраической кривой* // Докл. АН СССР, 1978. Т. 242. №46. С. 765–768.

[13] Natanzon S. M. *Geometry and algebra of real form of complex curves* // Math. Zeitschrift, 2002.

[14] Gromadzki G., Izquierdo M. *Real forms of a Riemann surface of even genus* // Proc. Amer. Math. Soc., 1998. Vol. 126. No 12. P. 3475–3479.

[15] Натанзон С. М. *Геометрия Лобачевского и автоморфизмы комплексных M-кривых* // Геометрические методы в задачах анализа и алгебры. Межвузовский тематический сборник. Ярославль, 1978. №268. С. 130–151.

[16] Alling N., Gteenleaf L. *Foundations of the theory of Klein surfaces.* Lecture Notes in Math. No 219, Berlin-Heidelb.- N.Y.: Springer-Verlag, 1971. 117 p.