Биллиардная динамическая система для числа π

Г. А. Гальперин

Введение. Имеется много разных методов вычисления числа π, известных как с древних времен, так и появившихся совсем недавно. Эти методы используют разнообразные изящные идеи — *геометрические* (вписывание и описывание многоугольников вокруг окружности), *теоретико-числовые* (теория цепных дробей дает приближение $\pi \approx 355/113$ с точностью до одной миллионной, если ограничиваться дробями с трехзначными числителем и знаменателем), *аналитические* (с помощью рядов, интегралов и бесконечных произведений), *компьютерные* (которым в последнее время несть числа), и их многочисленые комбинации.

Кроме этих — *математических* — методов, с давних пор известен один *экспериментальный* способ определения числа π — так называемый «метод иглы Бюффона». В нем на разлинованную равноудаленными прямыми плоскость произвольно бросается игла, длина которой равна половине расстояния между соседними прямыми. (Так что игла либо не пересекает прямые, либо пересекает ровно одну при каждом бросании). Можно доказать, что отношение числа пересечений иглы с какой-нибудь линией к общему числу бросаний стремится к π при увеличении числа бросаний до бесконечности. Нужно сделать очень много испытаний, чтобы получить более-менее приличную точность приближения полученной дроби к π, а кроме того, при эксперименте надо внимательно следить, чтобы бросание иглы было «равновероятным»: метод иглы Бюффона существенным образом базируется на методах теории вероятностей.

Здесь мы расскажем об одной новой идее определения числа π — *биллиардной*, придуманной автором при подготовке научного доклада в одном из американских университетов. Когда биллиардный метод был объявлен аудитории, никто ему поначалу не поверил, но затем последовало доказательство, простота которого сразу убедила всех сомневающихся. Позже автор выделил этот метод в отдельную тему и сделал несколько докладов в других университетах, с одной и той же реакцией аудитории: сначала полное недоверие, затем полная очевидность.

Биллиардный метод дает возможность определить π с *произвольной* точностью, т. е. узнать его любую наперед заданную цифру. Этот метод — детерминированный: все, что нужно сделать, это «запустить» биллиардную систему и подсчитать число ударов в ней.

Процедура. Положим на положительную числовую полуось $x \geqslant 0$ два биллиардных шарика с массами m и $M \geqslant m$, и будем предполагать, что в начале координат $x = 0$ расположена абсолютно упругая стенка, отражающая налетающий на нее шарик. При отражении от стенки скорость шарика меняется на строго противоположную. Размеры шариков несущественны, и для простоты мы будем считать их точечными частицами.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 5, 2001(137–138)

Фиксируем натуральное число N. Следующая процедура позволяет определить любое наперед заданное количество N последовательных цифр числа π:

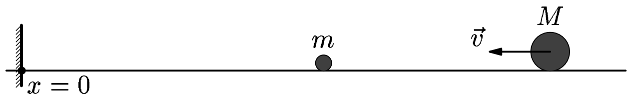
(1) Массы m и M подбираем так, что $M/m = 100^N$;

(2) Шар m располагаем между стенкой $x = 0$ и шаром M;

(3) Запускаем шар M в сторону шара m с произвольной скоростью;

(4) Подсчитываем общее количество ударов в системе (т. е. число столкновений между шарами плюс число отражений шара m от стенки);

(5) Записываем полученное число в десятичной системе и обозначаем его через $\pi(N)$.



Теорема. А) *Число ударов в описанной динамической системе всегда конечно и не зависит от начальных положений шариков и начальной скорости шара M.*

Б) *Число $\pi(N)$ ударов в системе равно*

$$\pi(N) = \lfloor \pi \cdot 10^N \rfloor = 3\,\underbrace{14159265358979323\ldots}_{N \text{ десятичных знаков } \pi}. \tag{1}$$

Идея доказательства теоремы. Она ясна из статьи «Биллиарды и упругие столкновения частиц и шаров» (с. 65–99) и состоит в сведении описанной динамической системы к биллиарду в угле величиной $\alpha = \operatorname{arctg}(10^{-N})$. Траектория этого биллиарда оказывается параллельной одной из сторон угла α, поэтому число ее отражений от сторон угла всегда конечно и равно $\pi(N) = \lfloor \pi/\alpha \rfloor$ (если $N \geqslant 1$). Этим доказана часть А. Воспользовавшись рядом Тейлора для $\operatorname{arctg} x$ и «тонкой стуктурой» числа π — равенством $\lfloor \pi/\operatorname{arctg}(10^{-N}) \rfloor = \lfloor \pi/10^{-N} \rfloor$, получаем основной результат теоремы — часть Б:

$$\pi(N) = \left\lfloor \frac{\pi}{\operatorname{arctg}(10^{-N})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{10^{-N}} \right\rfloor. \tag{2}$$

Полное доказательство будет приведено в следующем номере.

Благодарности. Прежде всего хочу поблагодарить профессора Eastern Illinois Universuty Айру Розенхольца, в течение долгого времени настаивавшего на публикации результата этой статьи. Я признателен также руководителям и участникам всех математических и физических семинаров и коллоквиумов, на которых мне довелось выступить с этим результатом в 1996–2000 гг.