Средняя длина пробега в биллиардных системах

Н. И. Чернов

В статье выводится формула для средней длины свободного пробега в биллиардных системах и на примерах показывается, как она работает. Применяя ее к газу твердых сфер, выводятся классические формулы Больцмана.

Введение. В этой заметке мы расскажем об одной замечательной, но не очень широко известной формуле в теории биллиардов, дающей среднюю длину пробега между отражениями. Если скорость биллиардной частицы равна единице (как это обычно принимают), то средняя длина пробега совпадает со средним временем пробега, и эта интерпретация также важна в физике.

Итак, пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ или на торе $\mathbb{T}^d$ с кусочно-гладкой границей ∂Q. Обозначим $\{\Phi^t\}$ поток движения на фазовом пространстве $M = Q \times S^{d-1}$ (как обычно, S^{d-1} означает $(d-1)$-мерную единичную сферу векторов скоростей). Размерность пространства M равна $d + (d-1) = 2d-1$. Поток $\{\Phi^t\}$ сохраняет меру Лиувилля на фазовом пространстве M:

$$d\mu = c_\mu \, dq \, dv, \tag{1}$$

где dq — мера Лебега в области Q, dv — мера Лебега на сфере S^{d-1}, а c_μ — просто нормировочная константа, обеспечивающая условие $\mu(M) = 1$. Для нас важно знать эту константу точно:

$$c_\mu = \frac{1}{|Q| \cdot |S^{d-1}|}, \tag{2}$$

где $|Q|$ — d-мерный объем области Q, а $|S^{d-1}|$ — $(d-1)$-мерный объем (можно назвать его «площадью поверхности») сферы S^{d-1}. Последняя величина универсальна:

$$|S^{d-1}| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}; \tag{3}$$

здесь $\Gamma(x)$ означает гамма-функцию. Нам достаточно знать, что $\Gamma(n+1) = n!$ при целых n, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ для всех $x > 0$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Биллиардное отображение задается на граничной поверхности $M_1 \subset \partial M$:

$$M_1 = \{x = (r, v) \in M : \ r \in \partial Q, \ \langle v, n(r) \rangle > 0\},$$

где $n(r)$ означает единичный вектор нормали к ∂Q в точке r, направленный внутрь Q, v — вектор скорости, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Иными словами, M_1 является семейством всех векторов с началом на ∂Q, направленных внутрь Q. Это — множество всех возможных векторов скорости частицы после отражений от ∂Q. Ясно, что M_1 есть $(2d-2)$-мерное многообразие с краем ($2d-2 = \dim M - 1$). Поток $\{\Phi^t\}$ определяет отображение последования Пуанкаре на M_1, переводящее точку $x = (r, v) \in M_1$ в точку $T(x) = (r + \tau v, v_1) \in M_1$, где

$\tau = \tau(x)$ — время свободного движения от точки x до нового отражения от ∂Q, а v_1 — вектор скорости, приобретенный частицей после отражения. Заметим, что именно среднее значение функции $\tau(x)$ интересует нас в этой статье.

Отображение $T\colon M_1 \to M_1$ сохраняет меру

$$d\nu = c_\nu \langle v, n(r)\rangle \, dr \, dv, \tag{4}$$

где dr — мера Лебега на многообразии ∂Q, dv — мера Лебега на S^{d-1} (как и ранее), а c_ν — опять нормировочный множитель. Несложный интегральный подсчет показывает, что

$$c_\nu = \frac{1}{|\partial Q| \cdot |B^{d-1}|}, \tag{5}$$

где $|\partial Q|$ означает $(d-1)$-мерный объем многообразия ∂Q, а $|B^{d-1}|$ — $(d-1)$-мерный объем единичного шара $B^{d-1} \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Последняя величина снова универсальна и равна:

$$|B^{d-1}| = \frac{|S^{d-2}|}{d-1} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{(d-1)\,\Gamma((d-1)/2)}. \tag{6}$$

Главная формула. Теперь можно непосредственно перейти к вычислению среднего значения длины (или времени) свободного пробега. Прежде всего, зададимся вопросом — что означает «среднее»? Интеграл по какой-либо мере? Тогда можно определить его двояко — интегрировать уже имеющуюся функцию $\tau(x)$ по мере ν на M_1 или определить длину пробега между двумя соседними отражениями на всем пространстве M и интегрировать ее по мере μ. Результаты будут разные, кстати. Мы примем «физический» смысл слова «среднее» как «временно́е среднее», т. е. предел средней длины пробега за n отражений, когда $n \to \infty$:

$$\bar\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau(x) + \tau(Tx) + \cdots + \tau(T^{n-1}x)}{n}.$$

По теореме Биркгофа, $\bar\tau(x)$ существует почти всюду на M_1. Если биллиард эргодичен, то величина $\bar\tau(x)$ постоянна почти всюду и равна

$$\bar\tau = \int_{M_1} \tau(x)\, d\nu(x). \tag{7}$$

Если биллиард не эргодичен, то функция $\bar\tau(x)$ существенно зависит от точки x, но все же ее среднее равно (7) и имеет смысл его вычислить. Этим мы и займемся. Запишем

$$\bar\tau = c_\nu \int_{M_1} \tau(r,v)\langle v, n(r)\rangle \, dr\, dv = c_\nu \int_{M_1} \int_0^{\tau(r,v)} \langle v, n(r)\rangle \, dt\, dr\, dv, \tag{8}$$

где t — пока формальная переменная, меняющаяся от 0 до $\tau(x)$. Очевидно, t параметризует отрезок биллиардной траектории от точки r до $r + \tau v$, т. е. между двумя отражениями. Поскольку все фазовое пространство M состоит из таких отрезков траекторий, то координаты r, v, t описывают все M. Это очень интересная и необычная параметризация, хотя r, v, t могут быть легко рассчитаны по q, v и наоборот (см. рис. 1). В частности, v одно и то же в обеих системах координат, $q = r + tv$, а t теоретически можно найти из условия $q - tv \in \partial Q$ (но нам это не понадобится).

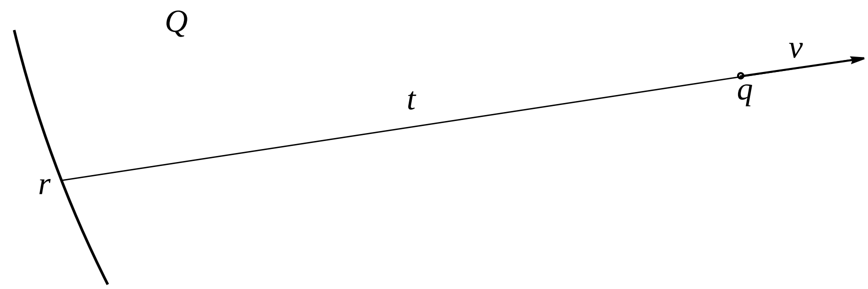

Рис. 1. *Координаты $r \in \partial Q$ и t, расстояние между r и q*

Главное — мера μ может быть выражена в координатах r, v, t следующим образом:

$$d\mu = c_\mu \, \langle v, n(r) \rangle \, dr \, dv \, dt.$$

Это происходит потому, что элемент объема в M можно записать в виде

$$dq \, dv = \langle v, n(r) \rangle \, dr \, dv \, dt \tag{9}$$

и затем применить (1). Равенство (9) может показаться странным, но на самом деле оно геометрически просто. На рис. 2 изображено «доказательство» для случая плоскости ($d = 2$). Мы представляем $dq = dx \, dy$, где x — координата, параллельная v, а y — ортогональная. Тогда $dx = dt$, а $dy = dr\langle v, n(r) \rangle$ по определению косинуса. Аналогичный аргумент работает при $d > 2$, и мы оставляем его читателю.

Теперь мы легко закончим вычисление $\bar{\tau}$ в (8):

$$\bar{\tau} = c_\nu \int_M dq \, dv = \frac{c_\nu}{c_\mu} \, ,$$

т. е., согласно (2) и (5),

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{|Q| \cdot |S^{d-1}|}{|\partial Q| \cdot |B^{d-1}|}}. \tag{10}$$

Это и есть замечательная формула для $\bar{\tau}$.

Отметим, что средняя величина свободного пробега $\bar{\tau}$ не зависит от формы и характера границы ∂Q, область Q может быть даже несвязной.

Для классического биллиардного стола на плоскости имеем $|S^1| = 2\pi$ и $|B^1| = 2$, и мы получаем

$$\bar{\tau} = \frac{\pi |Q|}{|\partial Q|}. \tag{11}$$

Аналогично, для пространства $d = 3$ и

$$\bar{\tau} = \frac{4|Q|}{|\partial Q|}.$$

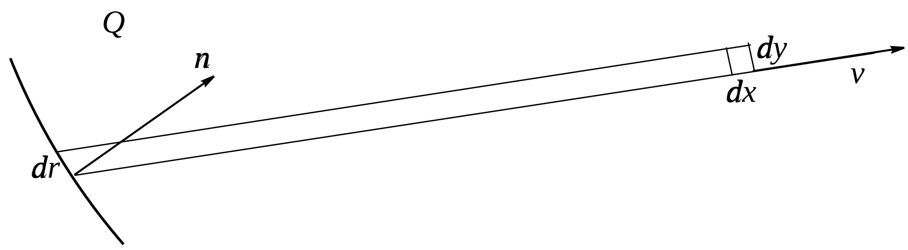

Рис. 2. *Иллюстрация к соотношениям $dx = dt$ и $dy = dr\langle v, n(r)\rangle$*

Пример. Рассмотрим биллиард на плоском торе, из которого вырезан кружок радиуса $\varepsilon > 0$. При малых ε траектории долго «гуляют» по тору без отражений, а некоторые периодические траектории вообще не испытывают отражений. Наша формула дает среднее время свободного пробега:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi(1-\pi\varepsilon^2)}{2\pi\varepsilon},$$

откуда видно, что $\bar{\tau}$ растет примерно как $1/2\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

История. Формула (10), конечно, не нова. Она использовалась в некоторых работах по биллиардной динамике. Но в основном она известна в интегральной геометрии и геометрической теории вероятностей. Доказательство для случая $d = 2$ дано в книге Л. А. Сантало [4], поэтому (11) иногда называют формулой Сантало. Доказательство для всех $d \geqslant 2$ можно получить из оценок в книге [3], хотя прямо эта формула там не приводится.

Автор настоящей заметки участвовал в работе научного семинара по динамическим системам под руководством В. М. Алексеева и Я. Г. Синая с конца 70-х годов, и там формула (10) и ее доказательство были хорошо известны. Однако, похоже, она не была опубликована ни в одной работе по биллиардам того времени. Позже некоторые западные физики «открывали» формулу (10) заново на основе численных расчетов и эвристических рассуждений. Автор данной статьи приводил формулу (10) с доказательством в двух своих работах [1, 2], из которых вторая была написана именно с целью сделать формулу (10) известной среди физиков.

Газы твердых сфер. В заключение опишем одно интересное применение формулы (10) в статистической физике. Рассмотрим газ из N одинаковых k-мерных твердых шаров диаметра $\sigma > 0$ на k-мерном торе $\mathbb{T}_L^k$ со стороной $L > 0$. Величину $n = N/L^k$ можно назвать средней плотностью газа, а

$$\rho = \frac{\sigma^k N\,|B^k|}{(2L)^k}$$

средней объемной плотностью (это часть объема, занимаемая шарами, так как объем одного шара равен $(\sigma/2)^k|B^k|$). Мы считаем, что массы шаров равны 1, и обозначим кинетическую энергию газа через $EN = (v_1^2 + \cdots + v_N^2)/2$, где $E > 0$ — средняя кинетическая энергия.

Известно, что динамика твердых шаров с упругими соударениями сводится к биллиардной задаче в области

$$Q = \mathbb{T}_L^{kN} \setminus \bigcup_{i \neq j} C_{ij} \,,$$

где $C_{ij} = \{\|q_i - q_j\| \leqslant \sigma\}$ — цилиндр, отвечающий перекрытиям i-го и j-го шара (перекрытия запрещены, поэтому цилиндры удаляются из $\mathbb{T}_L^{kN}$). Заметим, что биллиардная частица в области Q движется со скоростью $\sqrt{2EN}$, а не с единичной, как принято.

Наша формула (10) позволяет рассчитать среднее время между последовательными отражениями от ∂Q, т. е. последовательными столкновениями шаров во всей системе. Для этого надо вычислить $|Q|$ и $|\partial Q|$. Вычислить точно эти величины не представляется возможным, поскольку цилиндры C_{ij} пересекаются друг с другом весьма запутанным образом. Но можно получить приближенные значения $|Q|$ и $|\partial Q|$ при малых плотностях ρ, игнорируя пересечения цилиндров:

$$|Q| = L^{kN}\,(1 + o(1))$$

и

$$|\partial Q| = \frac{2^k k \rho (N-1)}{\sqrt{2}\,\sigma}\, L^{kN}\,(1 + o(1)),$$

где $o(1)$ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Детали вычислений мы оставляем читателю (см. [2]). С помощью (10) получаем

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma(kN-1) \cdot |S^{kN-1}|}{2^k k \rho \sqrt{EN}(N-1) \cdot |S^{kN-2}|} \cdot (1 + o(1)), \tag{12}$$

где принято во внимание, что скорость движения частицы в Q равна $\sqrt{2EN}$.

Полученная формула правильная, но физически мало полезна. Дело в том, что газ из N шаров на торе сохраняет полный момент $V = v_1 + \ldots + v_N$. Иначе говоря, система не эргодична — ее фазовое пространство расслаивается на инвариантные подмногообразия $V = \text{const}$. Ясно, что если $\|V\|$ велико, то относительные скорости шаров малы (при фиксированной полной энергии $2EN$, разумеется), и столкновения происходят реже. Если $\|V\|$ мало, то наоборот, относительные скорости велики и столкновения происходят чаще. Таким образом, формула (12) охватывает не одну, а целое семейство разных моделей с разной величиной $\bar{\tau}$. Наиболее интересная модель — это $V = 0$, где вся энергия тратится на взаимное движение шаров и нет общего «ветра», который несет весь газ в одном направлении. На физическом языке, модель $V = 0$ находится в равновесии.

Условие $V = 0$ определяет сечение области Q некоторой $(kN-k)$-мерной плоскостью, обозначим полученное сечение Q_0, в нем опять получается биллиардная задача (с отражениями от ∂Q_0). Все такие сечения области Q параллельны и конгруэнтны, поэтому $|Q_0|/|\partial Q_0| = |Q|/|\partial Q|$. Но поскольку область Q_0 будет $(kN-k)$-мерной, то формула (12) для модели $V = 0$ принимает вид

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma(kN-k-1) \cdot |S^{kN-k-1}|}{2^k k \rho \sqrt{EN}(N-1) \cdot |S^{kN-k-2}|} \cdot (1 + o(1)). \tag{13}$$

Эта формула дает среднее время между столкновениями во всей системе, которое, очевидно, стремится к нулю при $N \to \infty$. Попробуем рассчитать среднее время между последовательными столкновениями для одной типичной частицы. Поскольку в системе N частиц, и в каждом столкновении участвуют две частицы, то умножим $\bar{\tau}$ на $N/2$:

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}N/2 = \frac{\sigma N(kN-k-1)\cdot|S^{kN-k-1}|}{2^{k+1}k\rho\sqrt{EN}(N-1)\cdot|S^{kN-k-2}|}\cdot(1+o(1)).$$

Оказывается, последняя величина имеет положительный предел при $N \to \infty$. Применяя (3) и простые свойства гамма-функции, нетрудно получить

$$\lim_{N\to\infty}\bar{\tau}_1 = \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma}{2^{k+1}\rho\sqrt{Ek/2}}\cdot(1+o(1)). \tag{14}$$

Интересно, что в физике средняя энергия E связана с температурой газа T стандартными соотношениями: $E = k_B T$ в двумерном случае ($k=2$) и $E = 3k_BT/2$ в трехмерном ($k=3$), здесь k_B — условный множитель, называемый постоянной Больцмана. Подставляя эти соотношения в (14), получим (отбрасывая член $o(1)$, т. е. считая плотность малой)

$$\bar{\tau}_1(k=2, N=\infty) = \frac{1}{2\sigma n\sqrt{\pi k_B T}}$$

и

$$\bar{\tau}_1(k=3, N=\infty) = \frac{1}{(2\sigma)^2 n\sqrt{\pi k_B T}}\,.$$

Последние две формулы — не что иное, как классические формулы Больцмана, выведенные эмпирически более 100 лет назад. Замечательно, что теория биллиардов позволяет дать математическое обоснование теории Больцмана.

Список литературы

[1] *Чернов Н. И.* Новое доказательство формулы Синая для вычисления энтропии гиперболических биллиардов. Приложение к газу Лоренца и стадиону Бунимовича // Функ. анализ и его прил., 1991. Т. 25. С. 50–69.

[2] *Chernov N. I.* Entropy, Lyapunov exponents and mean free path for billiards // J. Statist. Phys., 1997. V. 88. P. 1–29.

[3] *Matheron G.* Random sets and integral geometry. J. New York: Wiley & Sons, 1975.

[4] *Santaló L. A.* Integral geometry and geometric probability. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1976.