Два замечательных предела

Ю. И. Любич

1. Введение

По давно установившейся традиции «первым замечательным пределом» называют

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,, \tag{1}$$

а «второй замечательный предел» — это

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}. \tag{2}$$

Второй замечательный предел замечателен не только тем, что он существует, но и тем, что его величина — это знаменитое *неперово число* $e = 2{,}71828\ldots$ (названное так в честь Джона Непера (1550-1617), который изобрел логарифмы[1]). Что касается первого замечательного предела, то, как известно, он *равен единице, но при условии, что угол x измеряется в радианах.* А это значит, что и он связан с другим не менее замечательным числом — *архимедовым числом* π (π — отношение длины любой окружности к ее диаметру, одно и то же для всех окружностей по соображениям подобия). Эта величина встречалась в древних текстах намного раньше Архимеда (287 – 212 до н.э.), но ее приближенное значение $\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots$, найденное Архимедом, долгое время оставалось непревзойденным по точности (напомним, что $\pi = 3{,}1415\ldots$), не говоря уже о том, что π регулярно появлялось у Архимеда в его обширных вычислениях площадей и объемов. (Эти вычисления представляют собой прототип современного интегрального исчисления.)

Как изменится величина первого замечательного предела, если изменить угловой масштаб, т.е. произвести *скейлинг*, как любят сейчас говорить физики и некоторые математики? Если, например, угол α

[1] Обозначение e было введено Эйлером в 1736 г. Название «неперово число» не вполне оправдано: Непер при построении таблиц логарифмов, опубликованных в 1614 г., в качестве основания использовал число $0{,}9999999^{10000000}$, очень близкое к числу $1/e$, но не равное ему. — *Прим. ред.*

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 4, 2000(145–153)

измеряется в градусах, то $\alpha = 180x/\pi$, где x — радианная мера угла, и тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}. \qquad (3)$$

Если же, вообще, в некотором масштабе $\alpha = kx$, где k — постоянный положительный коэффициент, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{1}{k}. \qquad (4)$$

Формальное несоответствие между (3) и (4) бросается в глаза читателю, твердо помнящему теорему единственности предела. Но объясняется оно тем, что, изменяя угловой масштаб, мы продолжаем считать синус функцией угла как геометрической фигуры независимо от выбора масштаба. Такова традиция в элементарной геометрии, где синус острого угла в прямоугольном треугольнике определяется как отношение соответствующего катета к гипотенузе (одно и то же для всех таких треугольников с данным углом — по соображениям подобия). Однако отношение синуса к самому углу лишено смысла, пока не выбран угловой масштаб. В математическом анализе, в отличие от элементарной геометрии, синус рассматривается как функция числового аргумента — радианной меры угла. Стандартное доказательство существования первого замечательного предела (и его равенства единице) основано на геометрическом неравенстве $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, справедливом именно в этом масштабе. Тем самым, это доказательство нуждается в достаточно сложном понятии длины окружности[2]. (Отметим, что общее понятие длины кривой, по существу, относится к интегральному исчислению). Оказывается, идея скейлинга (это понятие обсуждается далее) приводит к совсем другому доказательству, хотя и более длинному, но более элементарному в том смысле, что оно не зависит от понятия длины кривой. Угловой масштаб в этом доказательстве остается произвольным, величина предела зависит от выбора масштаба (см. (4)). На этом пути радиан можно определить как тот масштаб, для которого первый замечательный предел равен единице. А тогда и число π можно *определить* по-новому, а именно, как удвоенную радианную меру прямого угла. Если теперь определить длину окружности обычным образом (или применить к этому случаю общее определение длины кривой и соответствующую формулу интегрального исчисления) то, конечно, длина окружности радиуса R окажется равной $2\pi R$ и, вообще, длина дуги окружности с центральным углом x радиан окажется равной $l = xR$. В конечном счете, мы приходим к обычной формуле для радианной меры угла: $x = l/R$.

[2] Это замечание, послужившее автору толчком к написанию настоящей статьи, принадлежит Адаму Эпштейну из Университета штата Нью-Йорк.

В частности, радиан, определенный выше, оказывается обычным радианом, т. е. углом, для которого длина соответствующей дуги окружности равна радиусу.

Весь этот план реализуется ниже и, более того, скейлинговый подход распространяется на второй замечательный предел, точнее, на эквивалентную ситуацию, связанную с величиной

$$l(a) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 1). \tag{5}$$

В этом контексте число e определяется как то значение a, для которого $l(a) = 1$. Оказывается, что величина $a^{1/l(a)}$ не зависит от a и равна e. Это легко следует из (5), если известно, что $l(a) \neq 0$, однако доказательство последнего неравенства не вполне тривиально. В заключение мы рассматриваем показательную функцию e^z комплексного переменного z, в результате чего происходит естественное объединение первого и второго замечательного предела.

2. Скейлинг и выпуклые функции

Будем говорить, что функция f, заданная на некотором интервале $(0, \varepsilon)$ вещественной оси, *подчиняется скейлингу*, если она удовлетворяет неравенству

$$f(\lambda x) \leqslant \lambda f(x) \quad (0 < x < \varepsilon,\ 0 < \lambda < 1). \tag{6}$$

Для пояснения геометрического смысла неравенства (6) рассмотрим в плоскости с декартовыми координатами $(x; y)$ множество $\mathcal{E}_f$ тех точек, для которых $y \geqslant f(x)$. Оно называется *надграфиком* функции f. Неравенство (6) выполняется, если и только если все преобразования подобия $(x; y) \mapsto (\lambda x; \lambda y)$ $(0 < \lambda < 1)$ отображают надграфик в себя (т. е. если $(x; y) \in \mathcal{E}_f$, то $(\lambda x; \lambda y) \in \mathcal{E}_f$ при всех $0 < \lambda < 1$).

Для нас класс функций, подчиняющихся скейлингу, важен потому, что имеет место

Теорема. *Если на некотором интервале $(0, \varepsilon)$ функция f подчиняется скейлингу, то при $x \to 0$ отношение $f(x)/x$ стремится к некоторому пределу или к $-\infty$.*

Доказательство. Пусть $0 < t < x < \varepsilon$. Полагая в (6) $\lambda = t/x$ получаем

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{f(x)}{x}, \tag{7}$$

и требуемое утверждение вытекает из теоремы о пределе монотонной функции.

Замечание 1. Если $f(x)$ задана также и при $x = 0$ и непрерывна в этой точке, то (6) в пределе при $\lambda \to 0$ дает $f(0) \leqslant 0$. Если при этом $f(0) < 0$, то $f(x)/x \to -\infty$ при $x \to 0$. Однако $f(x)/x$ может стремиться к $-\infty$ и в случае $f(0) = 0$.

Пример. $f(x) = -\sqrt{x}$ *подчиняется скейлингу,* $f(0) = 0$, *но* $f(x)/x \to \to -\infty$.

Замечание 2. Из (7), в свою очередь, следует неравенство

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \quad (0 < t < x < \varepsilon), \tag{8}$$

которое также будет полезно в дальнейшем.

В приложениях предыдущей теоремы к двум замечательным пределам мы будем устанавливать неравенство (6), пользуясь некоторым более сильным свойством, а именно, — выпуклостью.

Функция f на некотором промежутке I вещественной оси называется *выпуклой*, если выполняется неравенство

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (0 < \lambda < 1) \tag{9}$$

при всех $x_1, x_2 \in I$. Такова, например, функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при любых $a \geqslant 0$, b, c (в частности, любая линейная функция выпукла).

Сумма двух выпуклых функций выпукла. В частности, сумма любой выпуклой и любой линейной функции выпукла.

Если функция f *выпукла на* $[0, \varepsilon]$ *и* $f(0) = 0$, *то она подчиняется скейлингу на* $(0, \varepsilon)$, ибо (6) следует из (9) при $x_1 = 0$, $x_2 = x$. Таким образом, *теорема о существовании предела* $f(x)/x$ *верна для выпуклых функций* f *таких, что* $f(0) = 0$.

Геометрический смысл выпуклости функции f состоит в выпуклости ее надграфика $\mathcal{E}_f$. (Напомним, что множество M в плоскости называется *выпуклым*, если для каждой пары точек A, B из M отрезок AB целиком принадлежит M).

Следующее предложение существенно облегчает проверку выпуклости конкретных функций.

Лемма. *Если неравенство* (9) *выполняется при* $\lambda = \frac{1}{2}$, *т. е.*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad (x_1, x_2 \in I), \tag{10}$$

и если функция f *непрерывна, то она выпукла.*

Доказательство. Неравенство (10) означает, что для любых двух точек A, B из надграфика $\mathcal{E}_f$ середина C отрезка AB также принадлежит $\mathcal{E}_f$. Повторяя это рассуждение, получаем, что середины C_1, C_2 отрезков AC и CB принадлежат $\mathcal{E}_f$ и т. д. Полученные таким путем точки

$C, C_1, C_2, \ldots$ (*двоично-рациональные точки* отрезка AB) располагаются на отрезке AB всюду плотно, т.е. в любой близости от любой точки отрезка есть двоично-рациональная точка. По непрерывности функции f все точки отрезка AB принадлежат $\mathcal{E}_f$. Действительно, если некоторая точка отрезка AB не лежит в $\mathcal{E}_f$, то в ней выполняется неравенство $y < f(x)$. Тогда оно выполняется и во всех достаточно близких точках, т.е. они также не лежат в $\mathcal{E}_f$.

3. Первый замечательный предел

Будем рассматривать $\sin x$ как функцию числового значения угла при каком-нибудь выбранном масштабе. Числовое значение прямого угла обозначим через d.

Очевидно, при $x_1, x_2 \in [0, d]$

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}} \geqslant \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}\,. \tag{11}$$

Мы видим, что функция $-\sin x$ на $[0, d]$ удовлетворяет неравенству (10). По лемме она окажется выпуклой, если мы докажем ее непрерывность. Тогда станет применимой и теорема о пределе $f(x)/x$. Тем самым, мы установим существование первого замечательного предела, если только сумеем исключить возможность стремления $\sin x/x$ к $+\infty$ при $x \to 0$. (Условие $x > 0$ несущественно, так как $\sin x/x$ — четная функция).

а) *Функция* $\sin x$ *непрерывна.* Действительно,

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right). \tag{12}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{t\to 0}(\sin t) = 0 \tag{13}$$

(непрерывность в нуле). При этом, очевидно, можно ограничиться значениями $t > 0$. Но, как видно из того же неравенства (12), $\sin t$ является возрастающей функцией при $0 \leqslant t \leqslant d$. Поэтому существует $\sigma = \lim_{t\to+0}(\sin t) \geqslant 0$. Из формулы удвоения (тоже скейлинг!), записанной в виде

$$\sin 2t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} \tag{14}$$

при $t \to +0$ получаем

$$\sigma = 2\sigma\sqrt{1-\sigma^2} \tag{15}$$

и, если $\sigma \neq 0$, то $2\sqrt{1-\sigma^2} = 1$, откуда $\sigma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — противоречие.

б) *Отношение* $\sin x/x$ *ограничено.* Действительно, в силу (8), примененного к функции $-\sin x$, имеем

$$\frac{\sin(t+2x)-\sin t}{2x} \leqslant \frac{\sin t}{t} \qquad \left(0<t\leqslant d,\ 0<x\leqslant \frac{d-t}{2}\right),$$

откуда

$$\frac{\sin x}{x}\cos(t+x) \leqslant \frac{\sin t}{t}.$$

Но

$$\cos(t+x) > \cos\frac{t+d}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{\sin t}{t\cos\dfrac{t+d}{2}} \qquad \left(0<x<\frac{d-t}{2}\right).$$

Существование первого замечательного предела доказано.

4. Второй замечательный предел

Как уже говорилось во введении, мы рассмотрим вопрос о существовании предела

$$l(a)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \tag{16}$$

при $a>1$. Последнее условие несколько упрощает дальнейший анализ, но само по себе несущественно.

Неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt{uv}\leqslant\frac{u+v}{2} \quad (u,v\geqslant 0) \tag{17}$$

при подстановке $u=a^{x_1}$, $v=a^{x_2}$ превращается в

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}\leqslant\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}. \tag{18}$$

По лемме это влечет выпуклость функции a^x (а, значит, и функции a^x-1) на всей вещественной оси, если уже известно, что эта функция непрерывна. Но тогда и существование предела $l(a)$ будет обеспечено, ибо, во-первых, $(a^x-1)/x>0$ при $x>0$ (так что стремление к $-\infty$ исключено) и, во-вторых, если $x<0$, скажем $x=-t$, $t>0$, то

$$\lim_{x\to -0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to +0}a^{-t}\,\frac{a^t-1}{t}=l(a). \tag{19}$$

Для доказательства непрерывности функции a^x заметим, что

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1) \tag{20}$$

(ср. (12)). Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1 \tag{21}$$

(непрерывность в нуле, ср. (13)). При этом можно считать $h > 0$, так как $a^{-h} = (a^h)^{-1}$.

Из формулы (20) видно, что функция a^x — возрастающая. Поэтому существует $\tau = \lim\limits_{h\to +0} a^h \geqslant 1$. Из формулы удвоения

$$a^{2h} = (a^h)^2 \tag{22}$$

следует $\tau^2 = \tau$, т. е. $\tau = 1$.

Докажем, что $l(a) > 0$ при всех $a > 1$. С этой целью применим неравенство (8) к $f(x) = a^x - 1$ и затем заменим t на x, а x на $x + h$ $(h > 0)$. Получим

$$\frac{a^x - 1}{x} \leqslant \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad (x > 0, h > 0) \tag{23}$$

Отсюда

$$\frac{a^h - 1}{h} \geqslant \frac{1 - a^{-x}}{x} \quad (x > 0, h > 0), \tag{24}$$

что при $h \to +0$ дает

$$l(a) \geqslant \frac{1 - a^{-x}}{x} > 0. \tag{25}$$

Если теперь заменить в (16) x на $x/l(a)$, то получится

$$\lim_{x\to 0} \frac{\epsilon^x - 1}{x} = 1, \tag{26}$$

где

$$\epsilon = a^{1/l(a)}. \tag{27}$$

На первый взгляд, введенное таким путем число ϵ зависит от a. В действительности же оно постоянно. Для доказательства заметим, что (26) означает, что $l(\epsilon) = 1$. Но, с другой стороны, из соотношения

$$\frac{(ab)^x - 1}{x} = \frac{a^x - 1}{x} b^x + \frac{b^x - 1}{x} \tag{28}$$

при $x \to 0$ следует

$$l(ab) = l(a) + l(b) > l(a) \quad (a, b > 1), \tag{29}$$

т. е. функция l — возрастающая. Поэтому каждое свое значение она принимает лишь в одной точке. В частности, значение 1 она принимает лишь в одной точке, а эта точка и есть ϵ.

Теперь можно вычислить $l(a)$. Логарифмируя (27) по основанию ϵ (соответствующие логарифмы называются *натуральными* и обозначаются через «ln»), получаем $1 = \ln a / l(a)$, откуда

$$l(a) = \ln a. \tag{30}$$

(С этой точки зрения равенство (29) становится совершенно понятным, но в нашем контексте (30) логически следует за (29)). Таким образом, окончательно

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{31}$$

Мы доказали это при $a > 1$, но легко видеть, что это верно и при $0 < a \leqslant \leqslant 1$.

Сделаем теперь в (26) замену переменной: $e^x - 1 = t$. Условия $x \to 0$ и $t \to 0$ эквивалентны. Поэтому (26) можно переписать в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1,$$

откуда

$$\lim_{t \to 0} \ln(1+t)^{1/t} = 1$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e, \tag{32}$$

т. е. мы получили второй замечательный предел.

Уместно подчеркнуть, что все экспоненты a^x $(a > 0)$ получаются из стандартной e^x скейлингом,

$$a^x = e^{x \ln a}, \tag{33}$$

т. е. выбор основания e можно рассматривать как функцию масштаба измерения, но уже не углов, а логарифмов чисел. Замечательно, что этому тоже можно придать геометрический смысл, но в *неевклидовой* геометрии Лобачевского (открытой им в 20-х годах прошлого века).

Отметим еше, что равенство (31) можно переписать в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} = k, \tag{34}$$

аналогичном (4).

5. Объединение в комплексной плоскости

Читателю уже ясна глубокая аналогия между двумя замечательными пределами. Нет ли здесь прямой связи? Прямая связь, действительно, есть, она была установлена Иоганном Бернулли (1667–1748) и прочно вошла в математику после Эйлера (1707–1783). Устанавливается она равенством

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{35}$$

которое формально должно рассматриваться как *определение* экспоненты e^{ix}. Это определение оказывается в высшей степени мотивированным и целесообразным. Действительно, рассмотрим, принимая (35), выражение

$$\frac{e^{ix}-1}{x}=\frac{\cos x-1}{x}+i\frac{\sin x}{x}=-\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+i\frac{\sin x}{x}. \tag{36}$$

Устремляя x к нулю и используя первый замечательный предел, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1}{x}=i. \tag{37}$$

Заменяя здесь x на kx с любым вещественным $k\neq 0$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ikx}-1}{x}=ik. \tag{38}$$

Равенство (34) оказалось верным не только для вещественных, но и для мнимых значений k!

Естественным завершением изложенного хода мысли является рассмотрение экспоненты e^z с любым комплексным $z=x+iy$. Экстраполируя теорему сложения

$$e^{x_1+x_2}=e^{x_1}e^{x_2} \tag{39}$$

на рассматриваемую ситуацию, мы должны принять *по определению*, что

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos x+i\sin y). \tag{40}$$

(После этого теорема сложения может быть доказана для любых комплексных показателей. Тем самым, происходит объединение двух «вещественных» теорем сложения: для экспоненты и для тригонометрических функций.) И теперь мы должны спросить себя, сохраняется ли равенство (26) в комплексной плоскости, т.е. верно ли, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1?$$

(Определение предела в комплексном анализе формально такое же, как в вещественном). Ответ утвердителен, для доказательства нужно использовать оба замечательных предела. Мы предоставляем читателю сделать это во всех деталях.

В этом пункте мы вплотную подошли к началам сразу нескольких важных математических теорий: комплексного анализа, неевклидовой геометрии, теории групп и т.д., но это уже, как говорится, another story (другая история).