Советская математика 30-х годов (II): А. О. Гельфонд и Л. Г. Шнирельман

В. М. Тихомиров В. В. Успенский

Во втором выпуске сборника «Математическое просвещение», в связи с присуждением первых филдсовских медалей, мы рассказывали о Колмогорове и Понтрягине (см. [3]). Здесь речь пойдёт о двух других советских математиках, получивших выдающиеся результаты в 30-е годы: о Гельфонде и Шнирельмане.

Александр Осипович Гельфонд и седьмая проблема Гильберта

Комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Таково, например, число $\sqrt{2}$, являющееся корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$. Еще в далекой античности было доказано, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. Лейбниц упоминает, что число $2^{\sqrt{2}/2}$ «интерцендентно», не определяя это понятие. Явное указание на то, что $a^{\sqrt{n}}$ трансцендентно, если a — рациональное, а n — натуральное, не являющееся квадратом, содержится у Эйлера.

Первый пример трансцендентных чисел построил Ж. Лиувилль в 1844 г. Он доказал, что алгебраическое число не может «слишком хорошо» аппроксимироваться рациональными [6]. Так называемое «число Лиувилля» $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$, имеющее в десятичной записи единицы на позициях с номерами 1, 2, 6, 24, … и нули на остальных, «слишком хорошо» приближается своими «начальными кусками» и потому (как доказал Лиувилль) трансцендентно. Существование трансцендентных чисел вытекает также из результатов Кантора: множество $\mathbb{A}$ алгебраических чисел счётно, в то время как множество $\mathbb{R}$ действительных чисел несчётно. Метод Кантора даёт и алгоритм построения трансцендентных чисел. Но естественно возник вопрос о том, являются ли трансцендентными всем известные числа e и π. Вопрос о трансцендентности π был особо актуален, ибо от ответа на него во многом зависело решение одной из известнейших задач античной математики — задачи о квадратуре круга. Трансцендентность числа e

доказал Эрмит в 1873 г. Через девять лет, в 1882 г., Линдеман доказал трансцендентность чисел вида e^{α}, где $\alpha \neq 0$ — алгебраическое. Отсюда вытекает, что π трансцендентно (ибо $e^{\pi i} = -1$). Тем самым была решена (в отрицательном смысле) проблема квадратуры круга.

(Говорят, Линдеман получил этот выдающийся результат в день своего тридцатилетия. Кто-то из друзей, пришедших на празднование дня рождения, сказал ему: «Ты выглядишь таким счастливым, как будто решил проблему квадратуры круга!» Линдеман отвечал, что так оно и есть. В последующие годы Линдеман был ректором университета в Мюнхене и пытался решить проблему Ферма — говорят, под давлением жены, которая требовала от мужа не останавливаться на достигнутом.)

Среди 23 математических проблем, которые Гильберт сформулировал в своём знаменитом докладе на парижском конгрессе 1900 г., седьмая проблема посвящена трасцендентным числам. Гильберт спрашивает, всегда ли трансцендентно число вида α^{β}, где α и β алгебраические, α отлично от 0 и 1, а β не является рациональным. В частности, Гильберт указывает конкретные числа $2^{\sqrt{2}}$ и $e^{\pi} = i^{-2i}$ и предлагает доказать, что они трансцендентны.

Поясним равенство $e^{\pi} = i^{-2i}$. Если α не является положительным вещественным числом, выражение α^{β} определено неоднозначно. По определению $\alpha^{\beta} = e^{\beta \log \alpha}$, где $e^{z} = \sum z^{n}/n!$, а $\log \alpha$ — какое-либо решение уравнения $e^{x} = \alpha$. Последнее уравнение имеет бесконечно много решений, отличающихся между собой на целое кратное числа $2\pi i$. Если β не является рациональным, отсюда получается бесконечное множество значений для выражения α^{β}. Так как $e^{\pi i/2} = i$, одним из значений для $\log i$ является $\pi i/2$, а одним из значений для i^{-2i} является $e^{-2i\pi i/2} = e^{\pi}$.

Гильберт считал свою седьмую проблему очень трудной. Он полагал, что её решение принадлежит ещё более далекому будущему, чем решение проблем Римана и Ферма. Но здесь он ошибся.

Первое частичное решение седьмой проблемы было получено А. О. Гельфондом в 1929 г. и Р. О. Кузьминым в 1930 г. В 1934 г. Гельфонд получил окончательное решение. Несколько позже решение седьмой проблемы независимо получил немецкий математик Т. Шнейдер.

Александр Осипович Гельфонд родился 24 (11) октября 1906 г. в Петербурге в семье врача. Окончив среднюю школу, он поступил в училище им. Баумана, но вскоре перевелся на физико-математический факультет Московского Университета. Студенческие и аспирантские годы Александра Осиповича прошли под руководством В. В. Степанова и А. Я. Хинчина. Решение седьмой проблемы Гильберта принесло ему всемирную известность. В 1935 г. Гельфонду без защиты диссертации была присвоена ученая степень доктора физико-математических наук, а в 1939 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР. С 1933 г. А. О. Гельфонд был старшим научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, с 1938 г. — заведующим кафедрой теории чисел механико-математического факультета МГУ. А. О. Гельфонд умер 7 ноября 1968 г.

Приведем решение седьмой проблемы Гильберта. Основные понятия и определения, связанные с алгебраическими числами, мы предполагаем известными; найти их, например, можно в книгах [2, 6].

Теорема Гельфонда – Шнейдера. *Пусть α — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а β — алгебраическое число, не являющееся рациональным. Тогда каждое значение выражения α^β трансцендентно.*

Гельфонд был приглашён принять участие в Международном конгрессе в Осло в 1932 году. Но он не получил разрешения на выезд. Контакты между советскими математиками и математиками остального мира в те годы фактически прекратились. Кандидатуры советских математиков на соискание международных премий не рассматривались. Но нет никакого сомнения в том, что решение седьмой проблемы Гильберта могло бы претендовать на филдсовскую медаль в 1936 году.

Из теоремы Гельфонда – Шнейдера вытекает, в частности, трансцендентность чисел $2^{\sqrt{2}}$ (это предполагали ещё Лейбниц и Эйлер!) и $e^{\pi\beta} = i^{-2i\beta}$, где $\beta \neq 0$ вещественное алгебраическое. Отметим, что до сих пор неизвестно, являются ли трансцендентными (или хотя бы иррациональными!) числа $e + \pi$ и $e\pi$.

Доказательство теоремы Гельфонда – Шнейдера можно найти в [1], [4], [6]. Весьма общий результат о значениях функций, удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям, из которого вытекает как теорема Гельфонда – Шнейдера, так и теорема Линдемана, доказан в добавлении к [2]. Наше изложение заимствовано из статьи А. И. Галочкина [1] (где теорема Линдемана также доказана на сходных идеях).

Общий замысел доказательства таков. Допустим, что α^β алгебраическое. Для каждого натурального $n > 1$ мы построим ненулевую функцию $f = f_n$ вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} a_{kl} e^{(k+l\beta)z}, \tag{1}$$

имеющую нуль высокого порядка (точнее, порядка $\geqslant [n^{3/2}]$) в точке $z = 0$. При этом коэффициенты функции f_n — целые числа, которые «не слишком быстро» растут с ростом n: справедлива оценка $|a_{kl}| < n^{\gamma_1 n}$, где γ_1 — не зависящая от n положительная константа (в дальнейшем аналогичный смысл имеют $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$). Тогда на любом круге $|z| \leqslant R$ функции f_n быстро сходятся к нулю вместе со всеми своими производными. С другой стороны, для натуральных x и t значение производной $f_n^{(t)}$ в точке $x\log\alpha$ есть многочлен с целыми коэффициентами от алгебраических чисел α, β и α^β. Отсюда выводится оценка снизу на $|f_n^{(t)}(x\log\alpha)|$, противоречащая оценке сверху на скорость сходимости последовательности (f_n) к нулю.

Предположим, что для каждого n функция f_n с указанными свойствами уже построена. Покажем, как получаются упомянутые оценки.

Обозначим через $\operatorname{ord}_{z=a} F(z)$ порядок нуля функции F в точке $z=a$.

Лемма 1. *Пусть $\omega_1,\dots,\omega_m$ — различные комплексные числа,*

$$g_m(z) = a_1e^{\omega_1 z} + \dots + a_m e^{\omega_m z},$$

где коэффициенты a_k не все равны нулю. Тогда

$$\operatorname{ord}_{z=0} g_m(z) < m.$$

Доказательство. Индукция по m. Производная

$$g_{m-1}(z) = (e^{-\omega_m z} g_m(z))'$$

имеет вид

$$g_{m-1}(z) = b_1 e^{(\omega_1-\omega_m)z} + \dots + b_{m-1}e^{(\omega_{m-1}-\omega_m)z}.$$

По предположению индукции, $\operatorname{ord}_{z=0} g_{m-1}(z) < m-1$, откуда вытекает требуемое заключение. □

Пусть m, m_1 и m_2 — степени алгебраических чисел β, α и α^β соответственно. Положим $X = 3mm_1m_2+6$. Зафиксируем какое-нибудь значение $\log\alpha$. Из леммы 1 вытекает, что $\operatorname{ord}_{z=0} f(z) < n^2$. Таким образом,

$$N = \min_{0\leqslant x\leqslant X} \operatorname{ord}_{z=x\log\alpha} f(z) < n^2.$$

Лемма 2. *Для любого $R>0$ при достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\max_{|z|\leqslant R} |f^{(N)}(z)| < n^{-1/3n^{3/2}-1/3(X-6)N}.$$

Доказательство. Функция

$$g(z) = f(z) z^{-[n^{3/2}]}(z-\log\alpha)^{-N}\cdot\ldots\cdot(z-X\log\alpha)^{-N}$$

имеет только устранимые особенности и может рассматриваться как всюду определённая целая функция. Применим к этой функции принцип максимума. Пусть n таково, что $R+1<\sqrt{n}$. Тогда

$$\max_{|z|\leqslant R+1} |g(z)| \leqslant \max_{u=\sqrt{n}} |g(u)|,$$

откуда

$$M = \max_{|z|\leqslant R+1} |f(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|u|=\sqrt{n}} |f(u)| \cdot \max_{\substack{|z|\leqslant R+1,\\ |u|=\sqrt{n}}} \left| \left(\frac{z}{u}\right)^{[n^{3/2}]} \left(\frac{z-\log\alpha}{u-\log\alpha}\right)^N \cdot \ldots \cdot \left(\frac{z-X\log\alpha}{u-X\log\alpha}\right)^N \right|. \tag{2}$$

Первый сомножитель в правой части не превосходит $n^2 n^{\gamma_1 n} e^{(1+|\beta|)n^{3/2}}$ (здесь n^2 — число слагаемых в (1), $n^{\gamma_1 n}$ — верхняя оценка для коэффициентов a_{kl}), и для любого $\varepsilon > 0$ второй сомножитель не превосходит

$$n^{-(1/2-\varepsilon)(n^{3/2}+XN)}$$

при больших n. Отсюда

$$M \leqslant n^{-1/3n^{3/2}-1/3XN}. \tag{3}$$

Далее,

$$f^{(N)}(z) = \frac{N!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{N+1}},$$

поэтому для любого z с $|z| \leqslant R$ имеем

$$|f^{(N)}(z)| \leqslant (N!)M \leqslant N^N M \leqslant n^{2N} M,$$

и из (3) следует утверждение леммы. □

Из леммы 2 вытекает, что при больших n выполняется

$$|f^{(N)}(x\log\alpha)| < n^{-1/3n^{3/2}-mm_1m_2N}, \quad x = 0, \ldots, X. \tag{4}$$

Теперь установим оценку снизу на $f^{(N)}(x\log\alpha)$, несовместимую с (4). Эта оценка основана на следующей лемме.

Назовем длиной многочлена P сумму модулей его коэффициентов. Обозначим длину многочлена P через $L(P)$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — алгебраические числа степеней соответственно $m_1, \ldots, m_s$. Тогда существует такая положительная постоянная $C = C(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, что для любого многочлена $P(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$ либо $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 0$, либо выполняется $|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| \geqslant L^{1-m_1\cdot\ldots\cdot m_s} C^{-d}$, где d и L — соответственно степень и длина многочлена $P(x_1, \ldots, x_s)$.*

Доказательство. Пусть a — такое натуральное число, что все числа $a\alpha_1, \ldots, a\alpha_s$ целые алгебраические. Тогда целым алгебраическим является и $\beta = a^d P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Предположим, что $\beta \neq 0$. Минимальный многочлен $B(x)$ числа β имеет целые коэффициенты. Пусть

$$B(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 = (x-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_n),$$

где $\beta = \beta_1$. Тогда

$$|\beta\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_n| = |b_0| \geqslant 1. \tag{5}$$

Пусть $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ — числа, сопряженные с алгебраическим числом α_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $C_1 = a\max_{i,j}(1, |\alpha_{i,j}|)$. Каждое β_i сопряжено с β и имеет вид $a^d P(\alpha_{1r_1}, \ldots, \alpha_{sr_s})$, поэтому

$$|\beta_i| = |a^d P(\alpha_{1r_1}, \ldots, \alpha_{sr_s})| \leqslant C_1^d L. \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает

$$1 \leqslant |\beta|\cdot|\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_n| \leqslant a^d|P(\alpha_1,\ldots,\alpha_s|(C_1^d L)^{n-1}.$$

Так как $n \leqslant m_1\cdot\ldots\cdot m_s$, то из этого неравенства следует утверждение леммы с $C = aC_1^{m_1\cdot\ldots\cdot m_s - 1}$. □

По определению числа N найдется такое целое x, $0 \leqslant x \leqslant X$, что $f^{(N)}(x\log\alpha) \neq 0$. Так как

$$f^{(N)}(z) = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl}(k+l\beta)^N e^{(k+l\beta)z},$$

то

$$f^{(N)}(x\log\alpha) = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl}(k+l\beta)^N\alpha^{xk}(\alpha^\beta)^{xl} = P(\beta,\alpha,\alpha^\beta),$$

где P — многочлен с целыми коэффициентами. При этом

$$L(P) \leqslant n^2 n^{\gamma_1 n}(2n)^N, \quad \deg P \leqslant N + 2nX.$$

Из леммы 3 получаем, что при достаточно больших n

$$\begin{aligned} f^{(N)}(x\log\alpha) = P(\beta,\alpha,\alpha^\beta) &\geqslant (L(P))^{1-mm_1m_2}C^{-\deg P} > \\ &> n^{-\gamma_2 n}(2n)^{N(1-mm_1m_2)}C^{-N} > n^{-\gamma_2 n - mm_1m_2N}. \end{aligned}$$

При больших n это противоречит (4).

Остается построить функцию $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} a_{kl}e^{(k+l\beta)z}$, такую, что $\operatorname{ord}_{z=0} f(z) \geqslant [n^{3/2}]$ и $|a_{kl}| < n^{\gamma_1 n}$.

Лемма 4 (Зигель). *Пусть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $|a_{ij}| \leqslant A$, $\xi = (x_1, \ldots, x_q)$ и*

$$L_i(\xi) = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant p, \quad p < q.$$

Тогда система уравнений

$$L_i(\xi) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant p$$

имеет ненулевое решение $(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{Z}^q$*, для которого* $\max_j |x_j| \leqslant 1 + (qA)^{p/(q-p)}$.

Доказательство. Рассмотрим нашу систему как линейное уравнение $L(\xi) = 0$, где $L = (L_1, \ldots, L_p)$ — линейное отображение $\mathbb{Z}^q \to \mathbb{Z}^p$. Для всякого целого положительного числа B обозначим через $\mathbb{Z}^q(B)$ множество таких векторов ξ из $\mathbb{Z}^q$, что $|\xi| = \max_j |x_j| \leqslant B$. Тогда L отображает $\mathbb{Z}^q(B)$ в $\mathbb{Z}^p(qBA)$. Число элементов в $\mathbb{Z}^q(B)$ равно $(2B+1)^q$. Найдем значение B, для которого существуют два различных элемента ξ, η из $\mathbb{Z}^q(B)$, имеюших один и тот же образ $L(\xi) = L(\eta)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $(2B+1)^q > (2qBA+1)^p$. Это неравенство выполняется при $B = [(1+(qA)^{p/(q-p)})/2]$, так как тогда $2B+1 > (qA)^{p/(q-p)}$ и $(2B+1)^{q-p} > (qA)^p \geqslant ((2qAB+1)/(2B+1))^p$. В качестве решения нашей системы берем вектор $\xi - \eta$, для которого $|\xi - \eta| \leqslant 2B \leqslant 1 + (qA)^{p/(q-p)}$.

□

Лемма 5. *Пусть* β *— целое алгебраическое число,*

$$\beta^m = b_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + b_1\beta + b_0, \quad b_j \in \mathbb{Z}, \quad |b_j| \leqslant B.$$

Если k *и* l *— неотрицательные целые числа, не превосходящие* n*, то для всякого натурального* t

$$(k + l\beta)^t = c_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + c_1\beta + c_0, \quad c_j \in \mathbb{Z}, \quad |c_j| \leqslant (B+2)^t n^t.$$

Доказательство. Для начала заметим, что для всякого натурального t выполняется

$$\beta^t = b_{t,m-1}\beta^{m-1} + \ldots + b_{t,1}\beta + b_{t,0}, \quad b_{t,j} \in \mathbb{Z}, \quad |b_{t,j}| \leqslant (B+1)^t.$$

Это верно при $t \leqslant m$, а равенство

$$\beta^{t+1} = b_{t,m-1}(b_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + b_0) + b_{t,m-2}\beta^{m-1} + \ldots + b_{t,0}\beta$$

позволяет сделать переход от t к $t+1$.

Теперь из равенства

$$(k + l\beta)^t = \sum_{s=0}^{t} C_t^s k^{t-s} l^s \sum_{j=0}^{m-1} b_{sj}\beta^j$$

следует, что коэффициенты при β^j не превосходят

$$\sum_{s=0}^{t} C_t^s k^{t-s} l^s (B+1)^s = (k + l(B+1))^t \leqslant (B+2)^t n^t.$$

□

У нас все готово для завершения доказательства теоремы Гельфонда – Шнейдера. Мы можем считать, что β — целое алгебраическое число.

Иначе $k\beta$ является целым алгебраическим для некоторого целого $k > 0$, и если мы докажем, что $\alpha^{k\beta}$ трансцендентно, то таково же и α^{β}.

Мы хотим построить ненулевую функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_{kl} e^{(k+l\beta)z}$$

с коэффициентами $a_{kl} \in \mathbb{Z}$, такую, что $|a_{kl}| < n^{\gamma_1 n}$ и $f^{(t)}(0) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant [n^{3/2}] - 1$. Так как

$$f^{(t)}(0) = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl}(k + l\beta)^t = \sum_{k,l=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_{t,k,l,s}\beta^s a_{kl},$$

нам надо найти целочисленное решение системы линейных уравнений

$$\sum_{k,l=0}^{n-1} B_{t,k,l,s} a_{kl} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant [n^{3/2}] - 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant m - 1, \tag{7}$$

состоящей из $p = m[n^{3/2}]$ уравнений относительно $q = n^2$ неизвестных a_{kl}. По лемме 5

$$|B_{t,k,l,s}| \leqslant (B + 2)^t n^t < n^{\gamma_3 n^{3/2}}$$

(мы воспользовались тем, что $t < n^{3/2}$). Согласно лемме 4, система (7) имеет такое ненулевое целочисленное решение (a_{kl}), что все числа a_{kl} по модулю не превосходят $1+(qn^{\gamma_3 n^{3/2}})^{p/(q-p)} < n^{\gamma_4 n^{3/2} n^{3/2}/(n^2 - m[n^{3/2}])} < n^{\gamma_1 n}$. Это завершает доказательство теоремы Гельфонда — Шнейдера.

Лев Генрихович Шнирельман, антиподы на сфере и квадрат, вписанный в кривую

Лев Генрихович Шнирельман родился 2 января 1905 года в Гомеле. Там он прожил до 16 лет. Отец его был учителем русского языка.

Лев Генрихович очень рано обнаружил выдающиеся способности. Он рисовал, писал стихи, в 12 лет самостоятельно прошел курс элементарной математики. В течение нескольких месяцев мальчик посещал физико-математические курсы для окончивших среднюю школу. Там на него обратил внимание преподаватель, который добился того, чтобы мальчика направили в Москву для продолжения образования.

В 15 лет он испробовал свои силы в самостоятельной работе. Согласно одной из легенд (которые всегда сопровождают жизненный путь выдающегося человека), он приехал в Москву в шестнадцатилетнем возрасте поступать в Московский университет, привезя с собой записанную в школьной тетради (на ужасной бумаге — другой в ту трудную пору не было) теорему о раскраске сферы (мы обсудим её чуть дальше). Эта теорема сыграла основополагающую роль при решении (найденном Шнирельманом совместно с Лазарем Ароновичем Люстерником) проблемы Пуанкаре о трёх геодезических. Решение проблемы Пуанкаре сделало имя Шнирельмана известным всему миру.

Окончив Университет за два с половиной года, Шнирельман поступил в аспирантуру «Института математики и механики Первого МГУ». Он был учеником Николая Николаевича Лузина. Лазарь Аронович вспоминал, что Лузину (по-видимому, склонному в некоторой мере к мистическому восприятию мира) как-то приснился сон, что к нему придет юноша («с теми же анкетными данными», что и Лев Генрихович, как писал Л. А.) и решит проблему континуума. И когда к нему явился юный Шнирельман, Лузин воспринял его как посланца небес. Увы, Шнирельман проблему континуума не решил, решения её пришлось ждать до 60-х годов, когда её осилил Пол Коэн.

Свои самые замечательные результаты Шнирельман опубликовал в течение двух лет — 1929 и 1930. Вот их формулировки.

Теорема 1 (о вписанном квадрате). *В любую замкнутую кривую на плоскости можно вписать квадрат.*

Точнее, можно найти 4 точки на кривой, служащие вершинами квадрата (если кривая ограничивает невыпуклую область, то квадрату разрешается вылезать из этой области). В работе Шнирельмана кривая предполагается достаточно гладкой. Когда цитируют теорему Шнирельмана, её часто формулируют для произвольной *непрерывной* кривой. Авторам неизвестно, опубликовано ли где-нибудь доказательство для этого случая. В 1996 г. один из нас (В. В. Успенский) спросил знаменитого Пола Эрдёша, каков статус теоремы о вписанном квадрате в случае произвольной непрерывной кривой. Эрдеш ответил, что это открытая проблема.

Теорема 2 (о трёх геодезических). *На любой гладкой поверхности, гомеоморфной сфере S^2, имеется по меньшей мере три замкнутых геодезических.*

Найдите на берегу моря (или мысленно) какой-нибудь гладкий камешек. И тонкую аптечную резиночку. Попробуйте надеть резиночку на камешек, чтобы она «не сползала». Если вам это удастся, вы нашли замкнутую геодезическую. На шарообразном мячике замкнутые геодезические — большие круги: если вы чуть-чуть собъетесь с большого круга, резиночка соскочит. А на эллипсоиде — всего три замкнутых геодезических: сечения этого эллипсоида плоскостями, проходящими через его оси. Гипотеза Пуанкаре состояла в том, что «на любом гладеньком камешке» имеется не меньше трёх различных замкнутых геодезических.

В 1929 году Люстерник и Шнирельман доказали гипотезу Пуанкаре, и это стало всемирной сенсацией. (Правда, впоследствии в доказательстве был обнаружен пробел, но его удалось залатать.)

Теорема 3. *Существует натуральное N такое, что любое натуральное число есть сумма не более чем N простых чисел.*

Всякое ли натуральное число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел? Такой вопрос поставил перед Эйлером Христиан Гольдбах — немецкий математик, полжизни проживший в России и умерший в Москве. Он задал этот вопрос в письме от 7.6.1742. В ответном письме (от 30.6.1742) Эйлер указывал, что для решения этой проблемы достаточно доказать, что любое чётное число $\geqslant 4$ есть сумма двух простых.

Первым сдвигом в исследовании этих проблем (до конца не решенных по сей день) был результат Шнирельмана. (Впрочем, к тому времени были опубликованы исследования Харди и Литтлвуда, в которых гипотеза Гольдбаха доказывалась (для достаточно больших нечётных чисел) в предположении, что верны некоторые другие (не доказанные и по сей день) гипотезы. В 1937 году И. М. Виноградов доказал гипотезу Гольдбаха для достаточно больших нечётных чисел.) Но особое значение имел не сам факт представимости любого числа суммой ограниченного числа простых (тем более, что у самого Шнирельмана число слагаемых оценивалось в несколько сотен тысяч), а своеобразный и очень оригинальный метод, с помощью которого удалось сдвинуть эту и множество других проблем. Мы расскажем об этом методе ниже.

В 1931 году Шнирельман был командирован за границу на три месяца и там имел огромный успех. Он работал некоторое время в Геттингене — Мекке математики того времени, где жил и творил в ту пору великий Гильберт. (Шнирельман запомнился многим тогда не только своими феноменальными результатами, но и тем, что «walked barefoot through the streets of Göttingen» — прогуливался босиком по улицам Геттингена, — как писала Констант Рид в книге о Куранте.) Ему было предложено написать монографию для престижного немецкого издательства, но этому не дано было осуществиться: в Германию пришли фашисты.

В 1933 году Шнирельман был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

В 1934 году Правление Московского математического общества приняло решение о проведении первой Московской школьной олимпиады по математике. В оргкомитет по проведению олимпиады вошел Л. Г. Шнирельман. Он был одним из инициаторов Школьного математического кружка при МГУ (наряду с Люстерником и Гельфандом). Тогда же профессора и преподаватели два раза в месяц по воскресеньям читали лекции в университете для школьников. И снова Шнирельман был одним из организаторов этих лекций. Он прочитал, в частности, лекции по многомерной геометрии, по теории групп.

Одним из первых Шнирельман стал культивировать в Москве выпуклую геометрию. Он написал замечательную работу по приложению выпуклой геометрии к теории наилучшего приближения (опубликованную посмертно).

Еше об одной работе Шнирельмана надо сказать — о его статье (написанной совместно с Л. С. Понтрягиным), посвящённой метрическому определению размерности. Эта работа оказала влияние на разработку концепции ε-энтропии Колмогорова. Статья Понтрягина и Шнирельмана помещена в качестве приложения к русскому переводу «Теории размерности» Гуревича и Волмэна.

Лев Генрихович очень дружил с Люстерником, Гельфондом, Гельфандом. Многие вспоминали о нём, как о личности большого масштаба, человеке мягком и деликатном, имевшем самые многогранные интеллектуальные запросы, человеке остроумном, наблюдательном, одухотворенном и очень обаятельном.

Жизнь его оборвалась трагически: 24 сентября 1938 года он покончил с собой. Те люди старшего поколения, с кем нам доводилось говорить на эту тему, связывали этот шаг Льва Генриховича с кровавым безумием того времени: они говорили, что Лев Генрихович попал в поле зрения НКВД и, устрашившись этого, решил покончить с жизнью. Быть может, истина откроется, когда кто-то из людей, желающих узнать правду, доберется до архивов КГБ.

А теперь расскажем чуть подробнее о теоремах Шнирельмана. Начнём с уже упоминавшегося результата из юношеской тетради.

Теорема 4 (о раскраске сферы). *Пусть сфера S^2 покрыта тремя замкнутыми множествами. Тогда одно из них содержит пару антиподов (т. е. диаметрально противоположных точек).*

Иными словами, если сферу S^2 раскрасить в три цвета, то найдется пара одноцветных антиподов. Шнирельман доказал свою теорему и для сфер произвольной размерности: *если n-мерная сфера S^n раскрашена в $n+1$ цветов (т. е. покрыта замкнутыми множествами $F_1, \ldots, F_{n+1}$), то найдется пара одноцветных антиподов.*

Теорема Шнирельмана эквивалентна другой теореме, которую доказали в тридцатые годы польские математики К. Борсук и С. Улам: *всякое отображение f сферы S^n в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ склеивает некоторую пару антиподов.* Иными словами, найдется такое $x \in S^n$, что $f(x) = f(-x)$. (Все отображения здесь и далее предполагаются непрерывными.) Еше одна эвивалентная формулировка теоремы Борсука –

Улама такова: *не существует нечётного отображения* $f\colon S^n \to S^{n-1}$. При этом отображение f называется нечётным, если $f(-x) = -f(x)$.

Покажем, как вывести теорему о раскраске сферы из теоремы Борсука – Улама. Пусть $F_1, \dots, F_{n+1}$ — замкнутые подмножества сферы S^n, объединение которых равно S^n. Нам надо доказать, что при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, множество F_i содержит пару антиподов. Если существует точка x, принадлежащая всем множествам F_i, то все ясно: некоторое F_i содержит пару антиподов x, $-x$. Предположим, что $F_1 \cap \ldots \cap F_{n+1}$ пусто. Для каждого $x \in S^n$ пусть $f_i(x)$ — расстояние от точки x до множества F_i. Тогда $f_i\colon S^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, и $f_i(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in F_i$. Согласно нашему предположению, функции f_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, нигде не обращаются в нуль одновременно, поэтому функция $h = \sum_{i=1}^{n+1} f_i$ всюду положительна. Положим $g_i = f_i/h$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, и $G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$. Тогда $G\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Применяя к нему теорему Борсука – Улама, находим такое $x \in S^n$, что $g_i(x) = g_i(-x)$ при каждом $i = 1, \dots, n$. Так как $g_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} g_i$, имеем также $g_{n+1}(x) = g_{n+1}(-x)$. Если i таково, что $x \in F_i$, то $g_i(-x) = g_i(x) = 0$, так что F_i содержит пару антиподов x и $-x$.

Что касается теоремы Борсука – Улама, то ей можно придать более сильную форму, используя понятие степени отображения сферы в себя:

Теорема Борсука. *Всякое нечётное отображение $f\colon S^n \to S^n$ имеет нечётную степень.*

Отсюда следует, что *всякое отображение $f\colon S^n \to S^n$ чётной степени склеивает пару антиподов.* Действительно, если отображение f не склеивает антиподов, то его можно продеформировать в нечётное отображение, а при непрерывной деформации степень отображения не меняется. Деформацию можно осуществить так: для каждого $x \in S^n$ точки $f(x)$ и $f(-x)$ равномерно двигаются в разные стороны по дуге большого круга, пока они не займут диаметрально противоположные позиции.

Объясним идею доказательства теоремы Борсука. Нечётное отображение $f\colon S^n \to S^n$ приводит к отображению $g\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$, где $\mathbb{RP}^n$ — вещественное проективное пространство, получающееся из сферы S^n отождествлением антиподов. Для отображения g определена степень по модулю 2. Если g гладко, то эта степень совпадает с чётностью числа прообразов точки общего положения. Если $\#g^{-1}(p) = k$ и точка $p \in \mathbb{RP}^n$ представляется парой антиподов $x, -x$ на сфере, то $\#(f^{-1}(x) \cup f^{-1}(-x)) = 2k$ и $\#f^{-1}(x) = k$, так что f и g имеют одинаковые степени по модулю 2. Нам надо установить, что g имеет ненулевую степень.

Замкнутые кривые в $\mathbb{RP}^n$ бывают двух сортов: образы замкнутых кривых на сфере и образы кривых, соединяющих антиподы. Кривые первого сорта могут быть стянуты в точку, кривые второго сорта нет. Отображение g переводит нестягиваемые кривые в нестягиваемые, так как f переводит кривые с антиподальными концами на сфере в такие же кривые. Таким образом, все сводится к следующему утверждению: *всякое отображение $\mathbb{RP}^n$ в себя, переводящее нестягиваемые кривые в нестягиваемые, имеет нечётную степень по модулю* 2.

С каждым компактным многообразием X можно связать его *кольцо пересечений по модулю* 2. Элементами этого кольца (обозначим его через $A(X)$) служат классы гомологичных циклов по модулю 2, а умножение соответствует пересечению циклов, находящихся в общем положении. Отображению $h\colon X \to Y$ между компактными многообразиями отвечает гомоморфизм колец $h^*\colon A(Y) \to A(X)$ и гомоморфизм аддитивных групп $h_*\colon A(X) \to A(Y)$. Эти гомоморфизмы можно представлять соответственно как переход к прообразу или образу цикла. Гомоморфизмы h_* и h^* связаны формулой

$$h_*(h^*(\eta)\cdot\xi) = \eta\cdot h_*(\xi) \quad (\eta \in A(Y),\ \xi \in A(X)). \tag{8}$$

Пусть теперь $X = \mathbb{RP}^n$ и $A = A(X)$. Для каждого $k = 0, \ldots, n$ имеется только один ненулевой класс k-мерных циклов в $\mathbb{RP}^n$, представленный подмногообразием $\mathbb{RP}^k$. Поэтому кольцо A состоит из 2^{n+1} элементов вида $\sum_{i=0}^n a_i x^i$, где $a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, x соответствует гиперплоскости в $\mathbb{RP}^n$, а x^k соответствует подмногообразию $\mathbb{RP}^{n-k}$ коразмерности k. В частности, x^{n-1} — класс окружности $\mathbb{RP}^1$.

Предположим, что $h\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ переводит нестягиваемые кривые в нестягиваемые. Тогда $h_*(x^{n-1})$ является классом нестягиваемой кривой $h(\mathbb{RP}^1)$, так что $h_*(x^{n-1}) = x^{n-1}$. Положим $\xi = x^{n-1}$, $\eta = x$ и применим формулу (8). Правая часть $\eta\cdot h_*(\xi) = x\cdot x^{n-1} = x^n$ отлична от нуля. Следовательно, $h^*(\eta) = h^*(x)$ отлично от нуля — иначе левая часть $h_*(h^*(\eta)\cdot\xi)$ была бы нулевой. Класс $h^*(x)$ представляется циклом коразмерности 1. Поскольку этот класс ненулевой, должно быть $h^*(x) = x$. Так как кольцо A порождается элементом x и $h^*\colon A \to A$ — кольцевой гомоморфизм, то этот гомоморфизм должен быть тождественным. В частности, $h^*(x^n) = x^n$. Но x^n — это класс точки, и последнее равенство означает, что h имеет нечётную степень по модулю 2.

Метод Шнирельмана в аддитивной теории чисел. Пусть A и B — два множества натуральных чисел (натуральный ряд $\mathbb{N}$ будем считать начинающимся с единицы). *Суммой* A и B обычно называется множество $A + B$ чисел вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Нам будет удобнее называть суммой A и B множество $A \oplus B = (A+B) \cup A \cup B$, полученное добавлением к $A + B$ элементов множеств A и B. Скажем, что множество A является *базисом* натурального ряда, если k-кратная сумма $A \oplus \ldots \oplus A$ при некотором натуральном k совпадает с натуральным рядом. Например, если A — множество всех квадратов, то A — базис, поскольку $A \oplus A \oplus A \oplus A = \mathbb{N}$ по теореме Лагранжа. Пусть P — множество, состоящее из всех простых чисел и единицы. Является ли P базисом? Положительный ответ на этот вопрос был впервые получен Шнирельманом: P *является базисом.* Расскажем об основной идее доказательства.

Сперва введем, следуя Шнирельману, понятие *плотности* множества A натуральных чисел. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $A(n)$ — число элементов множества A на отрезке $[1, n]$. Назовем *плотностью* $d(A)$ множества A нижнюю грань чисел вида $A(n)/n$ по всем $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, плотность — это наибольшее α такое, что $A(n) \geqslant \alpha n$ при всех n. Шнирельман доказывает следующий результат:

Теорема 5. *Всякое множество натуральных чисел положительной плотности является базисом.*

Эту теорему нельзя непосредственно применить ко множеству P простых чисел с добавленной единицей, поскольку оно имеет нулевую плотность. (Число $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих n, растет как $n/\log n$: отношение $\pi(n) \log n/n$ стремится к единице.) Однако Шнирельман установил, что $P \oplus P$ имеет положительную плотность, откуда вытекает, что P является базисом. Остается открытым вопрос, содержит ли $P \oplus P$ все чётные числа (это вариант вопроса Эйлера).

Докажем теорему 5. Она вытекает из следующих лемм 1 и 2.

Лемма 1. *Если* $A, B \subset \mathbb{N}$ *и* $d(A) + d(B) > 1$, *то* $A \oplus B = \mathbb{N}$.

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Если $n \in B$, то $n \in A \oplus B$. Если $n \notin B$, то рассмотрим два подмножества отрезка $[1, n]$: $\{a \in A : a \leqslant n\}$ и $\{n - b : b \in B,\ b \leqslant n\}$. Они обязаны пересекаться, поскольку в первом из них не меньше $n \cdot d(A)$ элементов, во втором не меньше $n \cdot d(B)$ элементов и $n \cdot d(A) + n \cdot d(B) > n$. Следовательно, $a = n - b$ при некоторых $a \in A$, $b \in B$, откуда $n \in A \oplus B$. □

Лемма 2. *Для любых* $A, B \subset \mathbb{N}$ *имеет место неравенство Шнирельмана*:

$$d(A \oplus B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A) \cdot d(B).$$

Доказательство. Положим $C = A \oplus B$, $\alpha = d(A)$, $\beta = d(B)$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Нам надо оценить снизу число $C(n)$. Пусть $a_1 < \ldots < a_r$ — все элементы множества A из отрезка $[1, n]$, где $r = A(n)$. Отрезок $[1, n]$ разбивается числами $a_1, \ldots, a_r$ на $r + 1$ отрезков (некоторые из них могут быть пустыми) длины $l_1 = a_1 - 1$, $l_2 = a_2 - a_1 - 1, \ldots, l_{r+1} = n - a_r$, при этом k-й отрезок содержит $\geqslant \beta l_k$ чисел из C: при $k > 1$ это числа вида

$a_{k-1}+b$, где $b \in B$, $b \leqslant l_k$, а при $k=1$ – это числа из B, которые $\leqslant l_1$. Отсюда получается оценка

$$C(n) \geqslant r+\beta \cdot \sum_{k=1}^{k=r+1} l_k = r+\beta(n-r) = (1-\beta)r+\beta n \geqslant (1-\beta)\alpha n+\beta n,$$

означающая, что $d(C) \geqslant (1-\beta)\alpha+\beta = \alpha+\beta-\alpha\beta$. □

Выведем теорему 5 из лемм 1 и 2. Неравенство леммы 2 можно переписать в виде $1-d(A \oplus B) \leqslant (1-d(A))(1-d(B))$. В таком виде оно распространяется (по индукции) на любое число слагаемых: $1-d(A_1\oplus\ldots\oplus A_k) \leqslant \prod_{i=1}^{k}(1-d(A_i))$. Пусть теперь A — множество положительной плотности и $A_k = A \oplus \cdots \oplus A$ — сумма k слагаемых, равных A. Предыдущее неравенство показывает, что $d(A_k)$ стремится к единице при возрастании k. Пусть k таково, что $d(A_k) > 1/2$. Из леммы 1 вытекает, что $A_{2k} = \mathbb{N}$. Таким образом, A является базисом. Теорема 5 доказана.

При всяком ли $n \in \mathbb{N}$ множество $W_n = \{1^n, 2^n, \ldots\}$ всех n-тых степеней является базисом? Это — так называемая *проблема Варинга.* Она была положительно решена Гильбертом в начале века. Решение оказалось весьма сложным. Теорема 5 позволяет получить другое решение: достаточно установить, что k-кратная сумма $W_n \oplus \ldots \oplus W_n$ при больших k имеет положительную плотность. Элементарное (хотя очень непростое) решение проблемы Варинга, основанное на методе Шнирельмана, можно найти в книжке Хинчина [5].

Вот что пишет Хинчин [5] в связи с леммой 2 (цитируем с сокращениями): «Осенью 1931 года Л. Г. Шнирельман, рассказывая о своих беседах с Ландау в Геттингене, сообщил, что они установили следующий интересный факт: для всех примеров, какие им удавалось придумать, неравенство

$$d(A \oplus B) \geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$$

можно было заменить более сильным и более простым неравенством:

$$d(A \oplus B) \geqslant d(A)+d(B)$$

(при условии, что $d(A)+d(B) \leqslant 1$). Но доказательство этой гипотезы при первых попытках не удавалось. Проблема стала модной. Ученые общества предлагали её на премию. Добрая половина английских математиков, отложив все дела, занялась решением этой задачи. Но она оказалась очень трудной и целый ряд лет не поддавалась усилиям самых искусных исследователей. Только в 1942 г., наконец, с нею справился молодой американский математик Манн». Доказательство гипотезы Ландау – Шнирельмана можно найти у Хинчина [5]. Мы очень советуем читателю познакомиться с этой замечательной книгой. Не менее достойна вашего внимания книга самого Шнирельмана [7]. Из неё вы узнаете и доказательство теоремы

Лагранжа о сумме четырёх квадратов, и решение великой проблемы Ферма для показателей 3 и 4, и многое другое. О затронутых здесь темах, касающихся творчества Л. Г. Шнирельмана см. также [3].

Список литературы

[1] *Галочкин А. И.* О доказательствах теорем Линдемана и Гельфонда – Шнейдера // Фундаментальная и прикладная математика, 1997. Т. 3, №4. С. 1253–1260.

[2] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

[3] *Тихомиров В. М., Успенский В. В.* Первые филдсовские лауреаты и советская математика 30-х годов. I. // Математическое просвещение, 1998. Сер. 3, вып. 2. С. 21–40.

[4] *Фельдман Н. И.* Седьмая проблема Гильберта. М.: МГУ, 1982.

[5] *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. М.–Л.: ОГИЗ, 1948.

[6] *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: МГУ, 1982.

[7] *Шнирельман Л. Г.* Простые числа. М.–Л.: ГИТТЛ, 1940.