Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Помимо *решения* задач, в высшей степени полезно упражняться в *изложении решений*. Мы советуем всем, решившим какую-либо из задач, постараться записать её решение в максимально простом и понятном виде и прислать в редакцию. В последующих номерах мы опубликуем самые изящные из полученных решений.

К сожалению, нам известны авторы далеко не всех предлагаемых ниже задач. Многие из них известны десятилетиями и стали частью «математического фольклора». Одна из целей, преследуемых составителями данного раздела, — записать этот «фольклор», многие части которого стремительно исчезают в наше время.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи неизвестен, мы указываем того, кто предложил эту задачу.

1. A, B, C — произвольные матрицы размера 2×2. Докажите тождество Холла: $[[A,B]^2,C]=0$. (Через $[A,B]\stackrel{\text{def}}{=}AB-BA$ обозначается *коммутатор*). (*фольклор*)

2. Пусть $|\varepsilon_i|<1$ и произведение $\prod(1-\varepsilon_i)$ сходится. Верно ли, что сходится ряд $\sum\varepsilon_i$? (*А. Белов*)

3. а) Существует ли непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению: $f(f(f(x)))=e^{-x}$.
   б) Тот же вопрос для разрывной функции.
   в) И для функции, имеющей конечное число точек разрыва. (*К. Мальков*)

4. а) Пусть $p>3$ – простое число. Докажите, что на торической шахматной доске размера $p\times p$ можно расставить p ферзей так, чтобы они не били друг друга.
   б) Назовем *магараджей* фигуру, которая из клетки $(0,0)$ за один ход может попасть в клетки $(0,\pm k)$, $(\pm k,0)$, $(\pm k,\pm k)$, $(\pm k,\pm 2k)$, $(\pm 2k,\pm k)$ (k — целое положительное число). Ответьте на вопрос пункта а) для магарадж и при $p>7$. (*А. Белов*)

5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (*фольклор*)

6. (Задача на исследование). При каких n и k существует замкнутая n-звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно k раз (такую ломаную будем называть ломаной типа (n, k)).

   а) Если n и k оба нечетны, то это невозможно.
   б) Если nk четно, и $n > 3k$, то это возможно.
   в) Постройте ломаную типа (8,2).
   г) Существует ли ломаная типа (6,2).

   Приведите разные другие примеры. (*А. К. Ковальджи*)

7. Две кривые второго порядка проходят через точки A, B, C, D. Через точку O пересечения прямых AC и BD проведены хорды KM, LN одной кривой и $K'M'$, $L'N'$ другой. Прямые KL и $K'L'$ пересекаются в точке P, MN и $M'N'$ — в точке Q. Доказать, что точки P, Q, O лежат на одной прямой. (*А. Заславский*)

8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (*Д. Любшин*)

9. Докажите, что на поверхности выпуклого многогранника всегда есть 5 точек, являющихся вершинами правильного пятиугольника. (*Из переписки С. Маркелова с исследователем Антарктиды*)

10. $a_0 = 1, a_{n+1} = 9^{a_n}, x = \sum \frac{1}{a_i}$. Докажите, что в десятичном разложении числа x встречается любая комбинация цифр. (*А. Ерошин и А. Белов*)

11. ** а) Плоскость раскрашена в 3 цвета. Докажите, что можно указать такой цвет, что для любого неотрицательного r найдутся две точки плоскости на расстоянии ровно r, окрашенные в этот цвет.
    б) Приведите пример раскраски в 6 цветов, когда это не так. (*фольклор*)