Избранные задачи математических соревнований 1998 года в Москве

В. О. Бугаенко

Мы выбрали задачи, которые, на наш взгляд, являются наиболее сложными или интересными. К ним приведены полные решения, а к некоторым — несколько различных решений. В последнем случае мы старались, чтобы первое решение было более школьным — таким, какое, скорее всего, придумает участник олимпиады, а другие решения показывали задачу с более общей точки зрения, иногда даже выходя за рамки школьной программы.

При подготовке этой статьи многие люди помогали советами и предоставленными материалами. Это в первую очередь: С. С. Анисов, М. Н. Вялый, А. Я. Канель-Белов, Л. Э. Медников, М. Ю. Панов, А. В. Шаповалов, Г. Р. Челноков.

Условия задач

1. (*LXI Московская математическая олимпиада, 9 кл.*)
На отрезке $[0,1]$ отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны. *В. Произволов*

2. (*LXI Московская математическая олимпиада, 10 кл.; Девятнадцатый Турнир Городов, весенний тур, 10–11 кл.*)
Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники, у каждого из которых отметили одну сторону. Докажите, что сумма длин всех отмеченных сторон не может быть меньше 1. *В. Произволов*

3. (*LXI Московская математическая олимпиада, 10 кл.*)
Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью? *С. Агеев*

4. (*LXI Московская математическая олимпиада, 10 кл.*)
На пол положили правильный треугольник ABC, выпиленный из фанеры. В пол вбили три гвоздя (по одному вплотную к каждой стороне треугольника) так, что треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении $1:3$, считая от вершины A, второй делит сторону BC в отношении $2:1$, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону AC третий гвоздь? *А. Шень*

5. (*LXI Московская математическая олимпиада, 10-11 кл.*)
Натуральные числа от 1 до n расставляются в ряд в произвольном порядке (число n фиксировано). Расстановка называется плохой, если в ней можно отметить 10

чисел (не обязательно стоящих подряд), идущих в порядке убывания. Остальные расстановки называются хорошими. Докажите, что количество хороших расстановок не превосходит 81^n. *А. Канель-Белов*

6. (*Девятнадцатый Турнир Городов, весенний тур, 8–9 кл.*)
За круглым столом сидят десять человек, перед каждым — несколько орехов. Всего орехов — сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину — если у него было четное число или один орех плюс половину остатка — если нечетное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности. Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов. *А. Шаповалов*

7. (*Девятнадцатый Турнир Городов, весенний тур, 10–11 кл.*)
Внутренняя точка M выпуклого четырехугольника $ABCD$ такова, что треугольники AMB и CMD — равнобедренные ($AM = MB$, $CM = MD$) и у каждого угол при вершине M равен $120°$. Докажите, что найдется точка N такая, что треугольники BNC и DNA — правильные. *И. Шарыгин*

8. (*Девятнадцатый Турнир Городов, весенний тур, 10–11 кл.*)
а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
б) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту? *Г. Гальперин*

9. (*Турнир им. Ломоносова, 8–11 кл.*)
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — набор целых положительных чисел. Строим новый набор чисел $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ по следующему правилу: b_0 — количество чисел исходного набора, которые больше 0, b_1 — количество чисел исходного набора, которые больше 1, b_2 — количество чисел исходного набора, которые больше 2, и т. д., пока не пойдут нули. Докажите, что сумма всех чисел исходного набора равна сумме всех чисел нового набора. *фольклор*

10. (*Двадцатый Турнир Городов, осенний тур, 8–9 кл.*)
Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшиеся монеты можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил одинаковую сумму в грошах. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников. *А. Шаповалов*

11. (*Двадцатый Турнир Городов, осенний тур, 10–11 кл.*)
Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед? *А. Шень*

12. (*Двадцатый Турнир Городов, осенний тур, 10–11 кл.*)
Дана функция $f(x) = (x^2 + ax + b)/(x^2 + cx + d)$, где трехчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ не имеют общих корней. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:

1) найдется числовой интервал, свободный от значений функции;

2) $f(x)$ представима в виде: $f(x) = f_1(f_2(\dots f_{n-1}(f_n(x))\dots))$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: k_ix+b_i, x^{-1}, x^2. *А. Канель-Белов*

Решения задач

1. Мы приведем три решения этой задачи. Первое будет чисто «школьным» и не потребует никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы. Для понимания второго решения необходимо знание теории систем линейных уравнений, а третье требует знания основ линейной алгебры.

Первое решение. Обозначим координаты концов отрезка и отмеченных точек через x_0, x_1, …, x_{n+1} $(0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 1)$. Условие задачи означает выполнение n равенств вида

$$x_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где каждый из символов a_i и b_i означает какое-то из чисел x_j $(j = 0, 1, \dots, n+1)$, при этом $a_i < x_i < b_i$.

Во все правые части этих равенств, в которых присутствует x_1, подставим его значение из первого равенства. Получим новый набор равенств (с теми же левыми частями, что и в старом), правые части которых уже не содержат x_1. Если при этом в правой части второго равенства появится член вида αx_2, то перенесем его в левую часть и разделим обе части на $1-\alpha$ (ниже мы докажем, что $\alpha \neq 1$). Затем во все правые части, содержащие x_2, подставим его значение из второго равенства (быть может, уже измененного после первой подстановки). Далее то же проделаем для x_3 и т. д.

В любой момент каждое равенство будет иметь вид

$$x_i = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n + \alpha_{n+1}x_{n+1}, \qquad (*)$$

где все коэффициенты α_j $(j = 0, 1, \dots, n+1)$ рациональны, неотрицательны и не равны нулю одновременно. Действительно, для исходного набора это верно. Делая очередную подстановку из j-го уравнения, мы заменяем коэффициент α_j на 0, а любой другой коэффициент α_k на $\alpha_k + \lambda\alpha_j$, где λ — коэффициент при x_k в j-м уравнении. Рациональность и неотрицательность при этом сохраняются, а наибольший номер ненулевого коэффициента не уменьшается, следовательно, всегда больше i. При переносе в левую часть члена α_ix_i получаем в правой части положительное число. Действительно, все x_j положительны, а все коэффициенты α_j неотрицательны, причем по крайней мере один из них строго положителен. Значит, левая часть тоже положительна, поэтому $1-\alpha_j > 0$. При делении обеих частей уравнения на положительное рациональное число $1-\alpha_j$ все перечисленные свойства также сохраняются.

Проделав указанные подстановки n раз, мы добьемся, чтобы коэффициенты α_j $(j = 1, \dots, n)$ в правых частях равенств $(*)$ равнялись нулю, тогда эти равенства будут иметь вид $x_i = \alpha_0x_0 + \alpha_{n+1}x_{n+1}$. Значит, x_i — рациональные числа.

Второе решение. Рассмотрим систему линейных уравнений, связывающих координаты отмеченных точек. Докажем, что она не может иметь более одного решения. Пусть $(x'_1, \dots x'_n)$ и $(x''_1, \dots x''_n)$ — какие-то два различных ее решения.

Определим смещение i-й точки формулой $d_i = |x'_i - x''_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Смещение концов отрезка считаем равным нулю.

Пусть $d > 0$ — максимальное из смещений. Среди всех точек со смещением d выберем самую правую. Она лежит посередине между какими-то двумя другими отмеченными точками, смещение одной из которых не превосходит по абсолютной величине d, а другой — строго меньше d. С другой стороны, ее смещение должно равняться среднему арифметическому смещений этих двух точек. Противоречие.

Если же система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение, то оно выражается по формулам Крамера через ее коэффициенты (возможно, предварительно нужно отбросить часть уравнений), поэтому является рациональным.

Третье решение. Предположим, что существует набор точек, удовлетворяющий условию задачи, содержащий иррациональное число α.

Рассмотрим линейное (над множеством рациональных чисел) отображение множества действительных чисел в себя, оставляющее на месте все рациональные числа и переводящее α в число, большее 1 или меньшее 0. Применив это отображение к множеству отмеченных точек, получим новый набор, удовлетворяющий условиям задачи и содержащий точки вне отрезка $[0, 1]$. Однако, это невозможно, так как крайняя из этих точек (наиболее удаленная от концов отрезка) не может лежать посередине между двумя другими.

2. Первое решение. Так как длины сторон получившихся прямоугольников не превосходят 1, то площадь каждого из них не превосходит длины меньшей стороны. Значит, сумма длин отмеченных сторон прямоугольников не меньше суммы их площадей, т. е. 1.

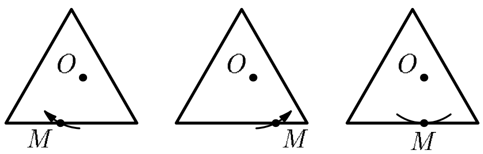
Второе решение. Проведем две прямые, содержащие смежные стороны квадрата. Спроецируем каждый прямоугольник на ту из проведенных прямых, которой параллельна его отмеченная сторона. Если проекции полностью покрыли одну из сторон квадрата, то уже сумма параллельных ей отмеченных сторон больше 1. Если же на двух сторонах квадрата есть по крайней мере по точке, не покрытой проекциями прямоугольников, то существует точка внутри квадрата, проекции которой на стороны не покрыты. Тем самым, она не содержится ни в одном прямоугольнике. Это противоречит условию, значит этот случай невозможен.

3. Ответ: 1998 фонарей.

Будем считать, что фонари стоят в серединах освещаемых ими отрезков. Пронумеруем фонари в порядке их следования вдоль дороги. Тогда отрезки, освещаемые k-м и $(k+2)$-м фонарями не пересекаются (так как в противном случае при выключении $(k+1)$-го фонаря освещенная область не изменилась бы). Значит, сумма длин отрезков, освещенных фонарями с нечетными номерами, меньше длины дороги, следовательно, их количество не превосходит 999. Аналогично, фонарей с четными номерами также не больше 999. Поэтому всего фонарей не больше 1998.

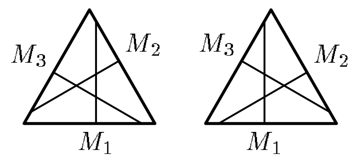
С другой стороны, 1998 фонарей быть может. Например, пусть первый и последний фонари стоят на расстоянии полметра от концов дороги, а остальные расположены равномерно вдоль дороги. При этом расстояние между соседними фонарями равно $\frac{999}{1997}$ м, что больше, чем полметра. Значит, области, освещаемые i-м и $(i+2)$-м фонарями, не пересекаются. Зазор между этими областями освещается только $(i+1)$-м фонарем. Поэтому при выключении любого фонаря появятся неосвещенные участки дороги.

4. Найдем прежде всего условие того, что вбитый в точке M на стороне треугольника гвоздь «мешает» повернуть этот треугольник вокруг некоторой внутренней точки O. Проведем окружность с центром в O, проходящую через точку M. Пусть эта окружность пересекает сторону треугольника так, что двигаясь по окружности по часовой стрелке от точки M, мы попадаем внутрь треугольника (рис. 1 а). Тогда при повороте на маленький угол против часовой стрелки,



а) б) в)

Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

в точку, пробитую гвоздем, попадает некоторая внутренняя точка треугольника. Это означает, что гвоздь препятствует такому повороту треугольника. Повернуть же его на маленький угол по часовой стрелке этот гвоздь не мешает. Если же двигаясь по окружности по часовой стрелке, мы попадаем наружу треугольника (рис. 1 б), то треугольник можно повернуть вокруг точки O против часовой стрелки, но нельзя в обратную сторону. Наконец, если проведенная окружность касается стороны в точке M (рис. 1 в), то повернуть треугольник вокруг точки O нельзя ни в какую сторону.

Восставим перпендикуляр к стороне треугольника в точке M. Тогда для любой точки O, лежащей на этом перпендикуляре, поворот треугольника относительно нее невозможен. Для остальных точек возможен поворот в одну или в другую сторону в зависимости от того, по какую сторону от восставленного перпендикуляра лежит точка. А именно, если точка O лежит по правую сторону от перпендикуляра (если смотреть внутрь треугольника от его стороны), то возможен поворот по часовой стрелке, а если по левую, то против.

Пусть теперь три гвоздя вбиты в точках M_1, M_2 и M_3 на сторонах AB, BC и CA соответственно. Если три перпендикуляра, восставленные в этих точках к сторонам треугольника, не пересекаются в одной точке, то среди частей, на которые они разбивают пространство, имеется треугольник, лежащий строго внутри данного треугольника. Каждая точка внутри этого треугольника лежит по одну сторону от всех трех перпендикуляров: либо по левую (рис. 2 а), либо по правую (рис. 2 б). Значит, в этом случае возможен поворот треугольника, что противоречит условию задачи. Следовательно, три восставленных перпендикуляра пересекаются в одной точке. В этом случае для точки, взятой в любой из шести областей, на которые перпендикуляры делят треугольник, повороту вокруг нее в каждом направлении препятствует какой-то гвоздь.

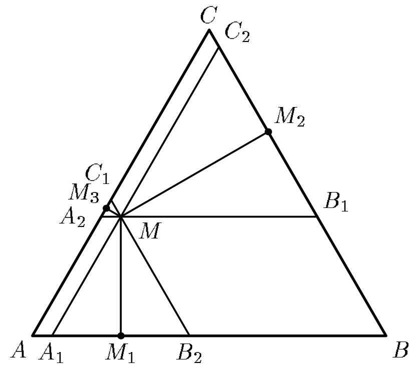


Рис. 3.

Докажем, что если рассматриваемые перпендикуляры пересекаются в одной точке, то

$$AM_1 + BM_2 + CM_3 = M_1B + M_2C + M_3A.$$

Проведем для этого прямые, параллельные сторонам треугольника, через точку M пересечения перпендикуляров. Точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника обозначим A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, как на рис. 3. Тогда $A_1M_1 = M_1B_2$, $B_1M_2 = M_2C_2$, $C_1M_3 = M_3A_2$, поскольку высоты равносторонних треугольников A_1MB_2, B_1MC_2 и C_1MA_2 являются также медианами. Кроме того, $AA_1 = C_2C$, $BB_1 = A_2A$, $CC_1 = B_2B$, как боковые стороны равнобедренных трапеций. Складывая шесть равенств, получаем требуемое.

Отсюда получаем $\dfrac{M_3A}{M_3C} = \dfrac{5}{7}$.

5. С каждой расстановкой чисел от 1 до n свяжем две конечные последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Определим a_i (глубину числа i) как наибольшее количество чисел в расстановке, идущих в порядке убывания, последнее из которых равно i, а b_j (глубину места j) как наибольшее количество чисел в расстановке, идущих в порядке убывания, последнее из которых стоит на j-м месте.

Зная последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, мы можем однозначно восстановить исходную расстановку. Действительно, на каждое место можно поставить только число, имеющее ту же глубину, что и это место. Расставить же числа данной глубины по местам этой же глубины можно единственным способом — в порядке возрастания, иначе мы придем к противоречию с определением глубины.

Для хорошей расстановки все элементы последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ могут принимать значения от 1 до 9. Таких пар последовательностей всего имеется $(9^n)^2 = 81^n$. При этом каждая из них может соответствовать не более, чем одной расстановке. Поэтому хороших расстановок не больше.

6. Первое решение. Обозначим через N максимальное количество орехов, имеющихся в данный момент у одного человека. Перекладывания орехов приводят к изменению N. Проследим за этими изменениями. Докажем сначала, что N не может возрасти после перекладывания орехов. Действительно, если N четно, то каждый человек оставляет себе не более $N/2$ орехов, а получает также не более $N/2$ орехов, а если N нечетно, то каждый человек оставляет себе не более $(N-1)/2$ орехов, а получает не более $(N+1)/2$ орехов.

Предположим, что $N > 10$. Тогда существует человек, имеющий меньше 10 орехов (в противном случае общее количество орехов было бы больше 100).

Докажем, что после какого-то количества перекладываний N уменьшится. Из этого сразу следует утверждение задачи, поскольку в любом случае $N \geqslant 10$. Рассмотрим серию перекладываний, при которой N не меняется. Чтобы сделать анализ наглядным, предположим, что каждый человек держит флажок: синий, если у него N орехов, белый — если $(N-1)$ орех, красный — в остальных случаях. Человек, имеющий не более 9 орехов, может держать только красный флажок. Поэтому хотя-бы один красный флажок обязательно присутствует. Будем доказывать, что количество синих флажков уменьшается, так что серия рано или поздно завершится. Рассмотрим отдельно два случая.

Первый случай: N четно и $N \geqslant 12$. Синие флажки не добавляются (держащий не синий флажок оставляет у себя не более $(N/2-1)$, а получает не более $N/2$ орехов) и не двигаются, т. е. после очередного перекладывания синие флажки будут только у тех, кто их держал до перекладывания. Красные флажки «двигаются» (тот, кто сидит после человека с красным флажком, получает не более $(N/2-2)$, а оставляет не более $N/2$ орехов, так что после этой операции он возьмет в руки красный флажок). Так как хотя бы один красный флажок существует, то количество держащих синие флажки обязательно уменьшится после некоторого количества шагов (синий и красный флажок неминуемо «столкнутся»).

Второй случай: N нечетно. В отличие от первого случая, новые синие флажки могут появляться. Изменим несколько правила. Предположим, что перед тем, как осуществить передачу орехов, каждый передал всю имеющуюся у него кучу своему соседу слева. Ясно, что такая операция не влияет на распределение орехов между людьми. При этом рассматриваемый случай становится аналогичным уже разобранному.

Второе решение. Обозначим через $f_+(n)$ количество орехов, которое должен отдать своему правому соседу, человек, имеющий n орехов, а через $f_-(n)$ количество орехов, которое при этом он оставляет себе. Очевидно, что

$$f_+(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases} \qquad f_-(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пронумеруем людей за столом числами от 1 до 10 против часовой стрелки и обозначим через $a_i = 10 + b_i$ количество орехов у i-го человека. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{10} b_i = 0$. Пусть после одной операции количество орехов у i-го человека стало $a_i' = 10 + b_i'$. Тогда легко подсчитать, что $a_i' = f_-(a_i) + f_+(a_{i-1})$, $b_i' = f_-(b_i) + f_+(b_{i-1})$ (мы предполагаем, что нумерация людей проведена «по модулю 10»; в частности, нулевой человек суть десятый).

Рассмотрим сумму $S = \sum\limits_{i=1}^{10} |b_i| = \sum\limits_{i=1}^{10} |a_i - 10|$ и проследим, как она изменяется при каждой операции. Воспользуемся при этом неравенством о модуле суммы и тем, что при любом целом n числа $f_-(n)$ и $f_+(n)$ не могут быть разных знаков, откуда $n = |f_+(n)| + |f_-(n)|$. Докажем, что величина S не возрастает:

$$\sum_{i=1}^{10} |b_i'| = \sum_{i=1}^{10} |f_-(b_i) + f_+(b_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{10} (|f_-(b_i)| + |f_+(b_{i-1})|) = \sum_{i=1}^{10} |f_-(b_i)| + \sum_{i=1}^{10} |f_+(b_{i-1})| =$$
$$= \sum_{i=1}^{10} |f_-(b_i)| + \sum_{i=1}^{10} |f_+(b_i)| = \sum_{i=1}^{10} (|f_-(b_i)| + |f_+(b_i)|) = \sum_{i=1}^{10} |b_i|.$$

Докажем теперь, что если не все b_i равны нулю, то S уменьшится (быть может, после нескольких операций). Прежде всего заметим, что среди b_i должны быть числа как положительные, так и отрицательные (в противном случае их сумма не могла бы равняться нулю), иными словами, есть люди, имеющие больше 10 орехов, и люди, имеющие меньше 10 орехов. Тогда обязательно найдутся такие j и i, что $a_j > 10$, $a_{j+1} = a_{j+2} = \ldots = a_{i-1} = 10$ и $a_i < 10$ (действительно, временно отсадив всех, имеющих по 10 орехов, и двигаясь вдоль стола против часовой стрелки, мы обязательно в какой-то момент перейдем от человека, имеющего больше 10 орехов, к человеку, имеющему меньше 10 орехов). На следующем шагу мы будем иметь $a_{j+1} > 10$ (так как $(j+1)$-й человек отдал 5 орехов, а получил больше), $a_{j+2} = \ldots = a_{i-1} = 10$ (поскольку все эти люди отдали и получили по 5 орехов) и, по-прежнему, $a_i < 10$ (так как i-й человек, отдавая орехи, оставил себе не больше четырех, а получил 5). Значит, через несколько шагов окажется $a_{i-1} > 10$, $a_i < 10$, т.е. $b_{i-1} > 0$, $b_i < 0$. В этом случае $f_+(b_{i-1}) > 0$ и $f_-(b_i) < 0$, поэтому неравенство о модуле суммы, которым мы воспользовались, превращается в строгое. Значит, величина S на следующем шагу уменьшится. Поскольку величина S не может уменьшатся бесконечно долго, в некоторый момент все люди за столом будут иметь по 10 орехов.

7. Первое решение. По условию $\angle AMB = \angle CMD$, прибавив к обеим частям этого равенства $\angle BMC$, получаем $\angle AMC = \angle BMD$. Кроме того, $AM = BM$ и $CM = DM$, поэтому треугольники AMC и BMD равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AC = BD$ и $\angle MAC = \angle MBD$. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (рис. 4 а). Из равенства $\angle MAO = \angle MBO$ и обратной теоремы о вписанном угле следует, что точки A, B, O и M лежат на одной окружности, и следовательно, $\angle AOB = \angle AMB = 120°$.

Рассмотрим такую точку N (лежащую по ту же сторону от прямой AD, что и четырехугольник $ABCD$), что треугольник ADN равносторонний (рис. 4 б). Соединим ее со всеми вершинами четырехугольника $ABCD$. Поскольку $\angle AND = 60° = 180° - \angle AOB = \angle AOD$, из обратной теоремы о вписанном угле следует, что точки A, D, N и O лежат на одной окружности, значит $\angle OAN = \angle ODN$. Следовательно, треугольники ANC и DNB равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle DNB = \angle ANC$, вычитая из обеих частей этого равенства $\angle DNC$, получаем $\angle CNB = \angle AND = 60°$. Кроме того, $CN = BN$. Это означает, что треугольник CNB правильный. Точка N является искомой.

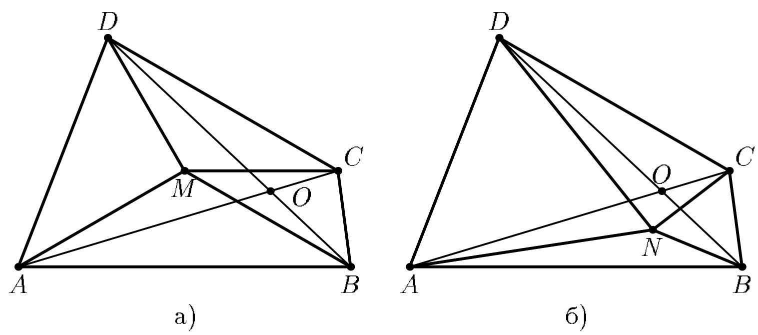


Рис. 4.

Второе решение. Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма. *Пусть направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ имеют равные длины, и угол между ними равен α. Тогда их можно перевести друг в друга поворотом на угол α вокруг некоторой точки.*

Переведем направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ в $\overrightarrow{A_2B_2}$ с помощью композиции двух осевых симметрий. Осью первой симметрии возьмем серединный перпендикуляр к отрезку A_1A_2, при этом точка A_1 перейдет в A_2, а B_1 — в некоторую точку B'. Ось второй симметрии — биссектриса угла $B'A_2B_2$. Композиция двух осевых симметрий — это либо параллельный перенос (если оси параллельны), либо поворот на угол α (если оси пересекаются под углом $\alpha/2$). В рассматриваемом случае при применении композиции двух осевых симметрий направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ изменилось на угол α, поэтому это мог быть только поворот на угол α. Лемма доказана.

Фактически мы доказали, что любое сохраняющее ориентацию движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом. Это утверждение называется теоремой Шаля.

Перейдем теперь к доказательству утверждения задачи. Из условия следует, что при повороте на угол $120°$ относительно точки M вершина A переходит в B, а C в D. Значит, при этом повороте направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ переходит в направленный отрезок $\overrightarrow{BD}$, поэтому их длины равны, а угол между ними равен $120°$. Значит, угол между направленными отрезками $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ равен $60°$. Согласно лемме, существует точка N, при повороте вокруг которой на $60°$ точка A перейдет в D, а C в B. Она и является искомой.

8. а) Пять карт можно выложить в различном порядке 120 способами, а количество карт, из которого нужно отгадать закрытую, равно 48. Поэтому для решения задачи достаточно найти способ закодировать закрытую карту с помощью порядка выкладывания пяти карт.

Прежде всего, фокусники договариваются об упорядочении по какому-либо правилу всех карт колоды, при этом каждая карта получит номер от 1 до 52. Кроме того, они нумеруют все перестановки из пяти элементов числами от 1 до 120.

Пусть первый фокусник произвольным образом выбирает одну из пяти полученных карт (которую он оставит закрытой) и находит ее номер N. Сопоставив оставшимся четырем картам цифры 1, 2, 3 и 4 по старшинству, а закрытой карте — цифру 5, он выкладывает их в порядке, соответствующем перестановке с номером N. Второй видит порядок выкладывания карт и поэтому может отгадать закрытую карту.

б) Если действовать так же, как и в пункте а) — пытаться закодировать номер закрытой карты с помощью порядка выкладывания четырех карт, то этого не получится: закрытой может оказаться одна из 48 карт, а возможных способов последовательного выкладывания четырех карт всего 24. Тем не менее, ответ и в этом случае положительный. Для этого фокусникам нужно использовать то, что выбор одной из пяти карт, которую нужно будет отгадывать, тоже находится в их руках.

Опять считаем, что карты в колоде и перестановки из четырех элементов пронумерованы. Пусть первый фокусник получает пять карт, номера которых равны a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 (в порядке возрастания). Если $a_5 - a_4 \leqslant 24$, то он откладывает старшую карту (с номером a_5) и выкладывает оставшиеся четыре в порядке, соответствующем числу $a_5 - a_4$. Если же $a_5 - a_4 \geqslant 25$, то тогда $a_5 - a_1 \geqslant 28$, поэтому $52 + a_1 - a_5 \leqslant 24$. В этом случае первый фокусник откладывает младшую карту (с номером a_1) и выкладывает четверку карт в порядке, соответствующем числу $52 + a_1 - a_5$.

Теперь второму фокуснику, чтобы узнать номер закрытой карты, достаточно к номеру карты, старшей в выложенной четверке, прибавить номер выложенной последовательности и, если полученное число больше 52, вычесть 52.

9. Рассмотрим следующую конструкцию. Возьмем набор кубиков и будем строить из них «башенки» — столбцы высотой a_1, a_2, ..., a_n (рис. 5). Посчитаем двумя способами, сколько кубиков нам для этого понадобится. Считая по столбцам, получаем, что количество кубиков равно сумме чисел первого набора. Другой способ подсчета — по слоям. Количество кубиков в первом слое (стоящих на полу) равно $b_0 = n$, в следующем слое — b_1, и т. д., количество кубиков в i-м слое равно b_i. Поэтому общее число кубиков равно сумме чисел второго набора. Значит, суммы чисел обоих наборов совпадают.

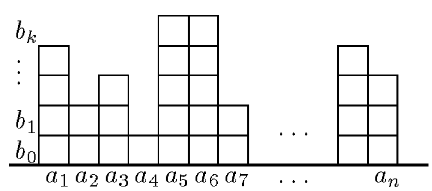


Рис. 5.

Замечание. Похожая конструкция используется при введении понятия интеграла. Чтобы подсчитать площадь криволинейной фигуры под графиком функции (интеграл), ее приближают ступенчатыми функциями, графики которых состоят из горизонтальных отрезков. Площадь фигуры под ступенчатой функцией (интегральную сумму) можно подсчитать двумя способами, аналогичными приведенным в решении способам подсчета числа кубиков. Получаемые пределы интегральных сумм в этих двух случаях называются *интегралом Римана* и *интегралом Лебега* соответственно.

10. Можно считать, что стоимости монет в грошах взаимно просты. Действительно, если они имеют наибольший общий делитель $d > 1$, то деноминируем грош, приравняв один новый к d старым. Тогда все условия задачи по-прежнему выполнены, но новые стоимости монет будут взаимно простыми.

Пусть n разбойников отняли m монет на общую сумму в g грошей. Так как при вычитании из g стоимости любой монеты получим число, кратное n, то стоимости всех монет дают при делении на n один и тот же остаток r. Так как стоимость любого набора из $m-1$ монеты делится на n, то $(m-1)r$ делится на n. Кроме того, r и n взаимно просты, поскольку любой их общий делитель является общим делителем стоимостей всех монет. Отсюда следует, что $m-1$ делится на n.

11. Ответ: не может.

Первое решение. Пусть мы имеем прямоугольный параллелепипед P', лежащий внутри прямоугольного параллелепипеда P. Оценим двумя способами сумму l длин проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на три прямых, параллельных ребрам параллелепипеда P.

С одной стороны, сумма проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на любое ребро параллелепипеда P не превосходит длины этого ребра. Действительно, проекция внутреннего параллелепипеда на любое ребро внешнего есть отрезок, концы которого — это проекции двух противоположных вершин. От одной из них до другой можно пройти по трем взаимно перпендикулярным ребрам. Поэтому рассматриваемая проекция равна сумме проекций этих трех ребер, она, очевидно, не больше, чем длина ребра, на которое мы проецируем. Значит, l не превосходит размера параллелепипеда P.

С другой стороны, длина любого отрезка не превосходит суммы его проекций на три взаимно перпендикулярных направления. Поэтому размер параллелепипеда P' не больше l.

Итак, размер внутреннего параллелепипеда не больше размера внешнего.

Второе решение. Сначала докажем, что площадь поверхности внутреннего параллелепипеда не больше площади поверхности внешнего. Приведенное ниже доказательство годится для любого выпуклого многогранника, содержащегося внутри другого многогранника.

Наденем на каждую грань внутреннего многогранника «шапку». *Шапкой* мы назовем объединение всех лучей с вершинами на грани, перпендикулярных ей и направленных наружу многогранника. Другими словами, шапка — это множество точек, проекции которых на плоскость грани лежат внутри грани и расположены по другую сторону от этой плоскости, чем многогранник. Из выпуклости многогранника следует, что любая точка пространства лежит не более, чем в одной шапке.

Куски поверхности внешнего многогранника, попавшие внутрь каждой шапки, спроецируем на соответствующую грань. Их площадь не меньше площади этой грани, так как проекции покроют всю грань, а при проецировании площадь не увеличивается. Просуммировав эти неравенства для всех граней внутреннего многогранника, получаем, что площадь его поверхности не превосходит площади части поверхности внешнего многогранника, попавшей внутрь шапок, которая, в свою очередь, не превосходит площади всей поверхности внешнего многогранника.

Пусть прямоугольный параллелепипед с ребрами a', b' и c' содержится внутри прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c. Тогда согласно доказанному

$$2(a'b'+a'c'+b'c') \leqslant 2(ab+ac+bc).$$

Кроме того, диаметр (т. е. расстояние между двумя наиболее удаленными точками) внутреннего параллелепипеда не превосходит диаметра внешнего. Диаметром прямоугольного параллелепипеда является длина его диагонали, поэтому, сравнивая квадраты диагоналей, имеем

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Сложив эти два неравенства, получаем

$$(a' + b' + c')^2 \leqslant (a + b + c)^2.$$

Значит, $a' + b' + c' \leqslant a + b + c$.

Третье решение. Назовем *ε-окрестностью* фигуры F фигуру F_ε, состоящую из точек, отстоящих на расстояние не больше ε от хотя бы одной точки фигуры F (в частности, $F_0 = F$). Любая точка M из ε-окрестности P_ε многогранника P имеет один из следующих четырех типов в зависимости от того, какое из следующих условий выполняется:

- ▷ M лежит внутри P;
- ▷ ближайшая к M точка многогранника P принадлежит его грани;
- ▷ ближайшая к M точка многогранника P принадлежит его ребру;
- ▷ ближайшая к M точка многогранника P является его вершиной.

Найдем объем $\operatorname{vol} P_\varepsilon$ ε-окрестности P_ε прямоугольного параллелепипеда P с ребрами a, b и c. Для этого разрежем его на четыре части P^0, P^1, P^2 и P^3, являющихся множествами точек указанных выше типов соответственно.

Объем P^0 равен abc. P^1 представляет собой объединение шести прямоугольных параллелепипедов, основания которых являются гранями параллелепипеда P, а высоты равны ε, поэтому $\operatorname{vol} P^1 = 2(ab + ac + bc)\varepsilon$. P^2 — это двенадцать «четвертушек» цилиндров радиуса ε, высоты которых суть ребра параллелепипеда. Значит, $\operatorname{vol} P^2 = (a + b + c)\pi\varepsilon^2$. P^3 — это восемь «осьмушек» шара радиуса ε (каждая «осьмушка» представляет собой пересечение октанта с вершиной в вершине параллелепипеда и шара радиуса ε с центром в ней же). Поэтому $\operatorname{vol} P^3 = \dfrac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ — это объем шара радиуса ε.

Окончательно имеем

$$\operatorname{vol} P_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 + (a + b + c)\pi\varepsilon^2 + 2(ab + ac + bc)\varepsilon + abc.$$

Если $F' \subset F$, то $F'_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ для любого ε. Пусть P — прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b и c, а P' — содержащийся в нем прямоугольный параллелепипед с ребрами a', b' и c'. Тогда для любого ε фигура P'_ε содержится внутри P_ε, и поэтому $\operatorname{vol} P'_\varepsilon \leqslant \operatorname{vol} P_\varepsilon$. Обе части этого неравенства — многочлены третьей степени от ε с равными коэффициентами при старшем члене. Значит, коэффициент при ε^2 в левой части не больше, чем коэффициент при ε^2 в правой части. Это означает, что $a' + b' + c' \leqslant a + b + c$, т. е. размер параллелепипеда P' не превосходит размера параллелепипеда P.

12. Первое решение. Прежде всего докажем, что любая дробно-линейная (т. е. имеющая вид $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$) функция, не являющаяся константой, представляется в виде композиции функций двух первых видов (линейных и взятия обратной величины).

Если $c = 0$, то утверждение очевидно (функция является линейной). Если $ad = bc$, то функция является константой. В остальных случаях

$$\frac{ax+b}{cx+d} = f_1(f_2(f_3(x))),$$

где $f_1(t) = t + \frac{a}{c}$, $f_2(t) = t^{-1}$, $f_3(t) = \frac{c^2}{bc-ad}t + \frac{cd}{bc-ad}$.

Обратно, композиция любого количества линейных функций и взятия обратной величины является дробно-линейной функцией. Действительно, сами по себе эти функции являются дробно-линейными, и их композиция с любой дробно-линейной функцией также является дробно-линейной функцией.

Докажем, что $2) \Rightarrow 1)$. Пусть данная функция $f(x)$ представима в виде композиции линейных функций, взятия обратной величины и возведения в квадрат. Так как $f(x)$ не является дробно-линейной, то возведение в квадрат обязательно присутствует. Поскольку квадрат функции принимает только неотрицательные значения, появляется интервал, свободный от значений функции. С другой стороны, присутствие интервала, свободного от значений функции, сохраняется, если мы применяем к ней линейную функцию или взятие обратной величины.

Теперь докажем, что $1) \Rightarrow 2)$. Пусть имеется функция $f(x)$, для которой найдется интервал, не содержащий ее значений. Опять считаем, что $f(x) \neq \mathrm{const}$.

Функцией, обратной к $\varphi(t) = t^{-1}$, является она сама, а обратная функция к линейной (но не являющейся константой) — тоже линейная. Поэтому достаточно доказать, что квадрат некоторой дробно-линейной функции представляется как композиция нескольких линейных функций и взятий обратной величины с данной функцией $f(x)$.

Прежде всего вычитаем из $f(x)$ единицу и обращаем дробь, получаем функцию вида $\frac{x^2+cx+d}{px+q}$. Далее, если $p = 0$, то применяем линейную функцию $qt + \left(\frac{c^2}{4} - d\right)$ и получаем полный квадрат $\left(x + \frac{c}{2}\right)^2$. Если же $p \neq 0$, то делаем линейную замену переменных $x' = x + \frac{q}{p}$ и получаем $\frac{x'^2 + rx' + s}{px'}$. При этом $s \neq 0$, так как по условию числитель и знаменатель не имеют общих корней. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $s > 0$, можно считать, что $s = u^2$. Применим функцию $\frac{p}{u}t - \frac{r}{u}$ и сделаем новую замену $x'' = \frac{x'}{u}$. Получим

$$\frac{x''^2+1}{x''} = \frac{4}{\left(\frac{2}{x''-1}+1\right)^2 - 1} + 2.$$

Второй случай: $s < 0$. Аналогично, получаем функцию $\frac{x''^2-1}{x''}$. Непосредственно проверяем, что при любом λ уравнение $\frac{x''^2-1}{x''} = \lambda$ имеет решение. Значит, не существует интервала, свободного от значений функции.

Второе решение. Докажем только импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).

Для начала сведем задачу к случаю, когда множество значений функции $f(x)$ ограничено. В самом деле, пусть $f(x)$ не принимает значений из интервала (x_1, x_2), тогда функция $g(x) = \left(f(x) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)^{-1}$ ограничена сверху числом $\frac{2}{x_2 - x_1}$.

Докажем, что если четыре точки с координатами (a, b), (c, d), (a', b') и (c', d') лежат на одной прямой, то $\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} = \varphi\left(\frac{x^2 + a'x + b'}{x^2 + c'x + d'}\right)$, где φ — дробно-линейная функция.

Действительно,

$$a = \mu a' + (1 - \mu)c', \quad b = \mu b' + (1 - \mu)d',$$
$$c = \nu a' + (1 - \nu)c', \quad d = \nu b' + (1 - \nu)d',$$

откуда

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{\mu\dfrac{x^2 + a'x + b'}{x^2 + c'x + d'} + (1 - \mu)}{\nu\dfrac{x^2 + a'x + b'}{x^2 + c'x + d'} + (1 - \nu)}.$$

Пусть $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ — ограниченная функция, удовлетворяющая условию 1). Из ограниченности следует, что знаменатель не обращается в нуль, следовательно, квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант ($c^2 < 4d$). Это значит, что точка (c, d) лежит «внутри» параболы $y = x^2/4$. Проведем на координатной плоскости прямую, проходящую через точки (a, b) и (c, d). Она должна пересечь параболу; точки пересечения обозначим (a', b') и (c', d'). Тогда по доказанному утверждению $f(x)$ выражается в виде дробно-линейной функции от $\frac{x^2 + a'x + b'}{x^2 + c'x + d'}$, а последняя дробь является квадратом дробно-линейной функции, так как и в числителе, и в знаменателе содержит квадратный трехчлен с нулевым дискриминантом.

Отдельно следует рассмотреть случай, когда проведенная прямая пересекает параболу лишь в одной точке, т. е. является вертикальной. Тогда $a = c$, и этот случай легко разбирается.

Третье решение. Областью значений $E(f)$ функции $f(x)$ может быть либо вся действительная прямая, либо отрезок, либо луч, либо объединение двух лучей. Действительно, $E(f)$ — это множество таких значений y, что уравнение $x^2 + ax + b = y(x^2 + cx + d)$ имеет действительные корни. Это условие означает, что дискриминант получающегося квадратного уравнения относительно x неотрицателен, и может быть записано в виде квадратичного неравенства относительно y. Множество решений квадратичного неравенства может иметь только один из указанных видов. В любом из этих случаев, применив дробно-линейную функцию, мы можем перевести область определения в положительную полуось.

Докажем, что если $E(f) = [0, +\infty)$, то $f(x)$ представляется в виде квадрата дробно-линейной функции. Предположим, что числитель дроби $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

принимает значения разных знаков. Значит, его график пересекает ось абсцисс в некоторой точке x_0, являющейся его корнем. Поскольку x_0 не является корнем знаменателя, знаменатель $Q(x)$, а значит, и вся дробь, принимает в окрестности точки x_0 значения разных знаков, что противоречит принятому предположению об области определения функции. Аналогично, знаменатель не может принимать значений разных знаков.

С другой стороны, числитель должен принимать нулевое значение, так как нуль входит в область значений дроби. Знаменатель также должен принимать нулевое значение, так как в противном случае значения дроби были бы ограничены. Поскольку числитель и знаменатель — квадратные трехчлены, их области значений суть множества неотрицательных чисел. Это значит, что они оба являются квадратами линейных функций.

Замечание. Строго говоря, утверждение задачи не вполне корректно и требует некоторого уточнения. Мы предполагаем, что в правой и левой частях равенства

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{-1} = \frac{Q(x)}{P(x)}, \tag{$*$}$$

стоят равные функции, хотя на самом деле их области определения не всегда совпадают. Чтобы избежать этой проблемы, можно принять одно из следующих предположений:

1) считать две функции равными, если их значения совпадают на пересечении их областей определения; при этом допустить, что функция может быть не определена для конечного множества значений аргумента;

2) дополнить множество действительных чисел еще одним «числом» ∞, удовлетворяющим естественным арифметическим свойствам $\frac{a}{\infty} = 0$ и $\frac{a}{0} = \infty$ (при $a \neq 0$ или ∞), и считать встречающиеся в задаче функции определенными и принимающими значения в таком расширении множества действительных чисел;

3) считать встречающиеся в задаче дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не функциями, а формальными записями, над которыми можно производить арифметические операции по естественным правилам, в частности, взятие обратной величины определяется формулой $(*)$; равенство функций на их общей области определения влечет в этом случае равенство формальных записей с точностью до умножения числителя и знаменателя на один и тот же множитель.