Критерии гильбертовости банахова пространства, связанные с теорией приближений*

П. А. Бородин В. М. Тихомиров

0. Введение

Эллипсоидом называют образ сферы при линейном преобразовании объемлющего пространства. В трехмерном пространстве в подходящей декартовой системе координат эллипсоид имеет уравнение

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2=1.$$

Эллипсоиды выделяются из всех выпуклых центрально-симметричных поверхностей многими уникальными свойствами. Приведем некоторые из них.

1. Если все плоские сечения выпуклой центрально-симметричной поверхности суть эллипсы, то поверхность — эллипсоид.

2. Если при освещении выпуклой центрально-симметричной поверхности произвольным параллельным пучком света она отбрасывает на плоскость тень в виде внутренности эллипса, то поверхность — эллипсоид.

3. Если при освещении выпуклой центрально-симметричной поверхности произвольным параллельным пучком света *граница тени* (точки поверхности, в которых лучи света ее касаются) плоская, то поверхность — эллипсоид.

4. Если для всякого плоского сечения выпуклой центрально-симметричной поверхности найдется направление параллельного освещения, при котором граница тени будет совпадать с этим плоским сечением, то поверхность — эллипсоид.

Ниже мы сформулируем эти утверждения более тщательно, а некоторые из них докажем.

Знаменитый немецкий математик Герман Минковский по каждому выпуклому ограниченному центрально-симметричному множеству в конечномерном пространстве построил метрику, с помощью которой можно мерить расстояние между точками, а американец Винер (изобретатель кибернетики) и поляк Банах распространили определение Минковского на бесконечномерные пространства. При этом изначальное множество является единичным шаром, расстояния от точек которого до начала координат не превосходят единицы. Эти пространства с введенной в них метрикой (и еще одним дополнительным свойством полноты)

*Работа обоих авторов выполнена при поддержке РФФИ (первого — проект № 96-01-01366, второго — проект № 96-01-00325 и проект Программы поддержки вед. научных школ № 96-15-96072).

называются банаховыми пространствами. Среди банаховых пространств особую, уникальную роль играют пространства, у которых в конечномерном случае границами единичных шаров являются эллипсоиды. Они называются гильбертовыми пространствами.

Наличие метрики позволяет ставить задачи о приближении элементов множествами. Приближения в гильбертовом пространстве устроены особенно совершенно. В данной работе показывается, что эти совершенные свойства приближений характеризуют гильбертовы пространства.

Эту статью мы постарались сделать «замкнутой в себе». Вначале делается экскурс в теорию банаховых и гильбертовых пространств, а затем доказываются критерии гильбертовости банахова пространства (в простейшем случае — критерии эллипсоидности единичной сферы этого пространства), связанные с теорией приближений. Излагаются все необходимые понятия и факты теории нормированных пространств, теории приближений и геометрии, так что статья доступна студентам-математикам 1 курса и подготовленным школьникам старших классов.

1. Предварительные сведения

В линейном пространстве X (пространстве, элементы которого можно складывать и умножать на вещественные числа) часто бывает необходимо ввести метрику, то есть расстояние $d(x,y)$ между элементами $x, y \in X$. При этом естественно потребовать, чтобы это расстояние не менялось при сдвиге элементов на один и тот же вектор: $d(x+z, y+z) = d(x,y)$. Поэтому достаточно определить расстояние от каждого элемента $x \in X$ до нулевого элемента, или *норму* элемента x: $\|x\| = d(x, 0)$. Эта норма, то есть функция $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$, должна обладать следующими свойствами:

а) $\forall x \in X \quad \|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (свойство неотрицательности);

б) $\forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (свойство однородности);

в) $\forall x \in X\ \forall y \in X \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Если теперь положить $d(x,y) := \|x-y\|$, то метрика d будет обладать всеми требуемыми свойствами: неотрицательностью ($d(x,y) \geqslant 0$ и $d(x,y) = 0 \iff x = y$), симметричностью ($d(x,y) = d(y,x)$) и неравенством треугольника ($d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$), так что (X, d), по определению, — *метрическое* пространство. Кроме того, для введенной таким образом метрики справедливы равенства $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ и $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, естественные в линейном пространстве. Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *нормированным* пространством.

В одном и том же линейном пространстве X норму можно ввести многими разными способами. Приведем несколько примеров норм в обычном n-мерном вещественном пространстве $\mathbf{R}^n$, состоящем из векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с координатами $x_k \in \mathbf{R}$:

I. $\|x\| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$;

II. $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$;

III. $\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

Можно рассматривать и бесконечномерные линейные пространства. Так, например, в бесконечномерном линейном пространстве $C[0,1]$ вещественных функций f, непрерывных на отрезке $[0,1]$, норму также можно ввести разными способами:

IV. $||f|| = (\int_0^1 f^2(x)dx)^{1/2}$;

V. $||f|| = \int_0^1 |f(x)|dx$;

VI. $||f|| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (равномерная, или чебышевская норма).

Проверка свойств а), б), в) нормы в каждом из примеров I – VI предоставляется читателю.

Единичный шар $B = \{x \in X : ||x|| \leqslant 1\}$ линейного нормированного пространства X всегда является *выпуклым центрально-симметричным* (относительно нуля) *поглощающим* ($\forall x \in X \quad \exists \lambda > 0 : \lambda x \in B$) *ограниченным* ($\forall x \in X \quad \exists \lambda > 0 : \lambda x \notin B$) телом в X. (Выпуклость следует из того, что если $x, y \in B$, то для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ имеем

$$||\alpha x + (1-\alpha)y|| \leqslant^{в)} ||\alpha x|| + ||(1-\alpha)y|| =^{б)} \alpha||x|| + (1-\alpha)||y|| \leqslant \alpha + (1-\alpha) = 1,$$

т. е. весь отрезок с концами x, y целиком лежит в B; остальные из перечисленных свойств достаточно очевидны.) Например, в случае нормы из примера I и прямоугольной системы координат в $X = \mathbf{R}^n$ единичный шар совпадает с обычным шаром с центром в 0 и радиусом 1 (если система координат произвольна, то B является эллипсоидом). Единичные шары для норм II и III — многогранники; в частном случае $n = 3$ и прямоугольной системы координат в $X = \mathbf{R}^3$ норма II дает правильный октаэдр с вершинами на осях координат, а норма III — куб с ребрами длины 2, параллельными координатным осям.

Верно и обратное (об этом говорилось во введении): *каждое выпуклое центрально-симметричное поглощающее ограниченное множество B в линейном пространстве X задает в X норму $||\cdot||_B$, в которой оно является «почти» единичным шаром*: $\{x : ||x||_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{x : ||x||_B \leqslant 1\}$. Именно, надо положить $||x||_B = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B\}$. Проверка свойств нормы а), б), в) и приведенного двойного включения предоставляется читателю.

Линейное нормированное пространство $(X, ||\cdot||)$ называется *полным*, если оно содержит все свои предельные точки (т. е. если для всякой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \in X$, т. е. такой последовательности, что $||x_n - x_m|| \to 0$ при $n, m \to 0$, существует элемент $x \in X$, к которому эта последовательность сходится: $||x_n - x|| \to 0$). Конечномерное нормированное пространство всегда полно, а бесконечномерное — необязательно. Например, пространство $C[0,1]$ полно относительно нормы VI, но не полно относительно норм IV или V (проверьте!). Любое неполное пространство X можно «пополнить», добавив предельные точки, или, другими словами, вложить в полное пространство $\overline{X}$ с сохранением нормы, так что X плотно в $\overline{X}$ (см., напр., [1, гл.II, § 3]).

Полные нормированные пространства называются *банаховыми*, в честь выдающегося польского математика С. Банаха. В дальнейшем мы будем рассматривать только банаховы пространства.

Норма в линейном пространстве X обладает особенно хорошими свойствами, если она порождена скалярным произведением. *Скалярное произведение* — это функция $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая следующим требованиям:

i) $\forall x \in X \quad (x,x) \geqslant 0$ и $(x,x) = 0 \iff x = 0$ (свойство неотрицательности);

ii) $\forall x, y \in X \quad (x,y) = (y,x)$ (свойство симметричности);

iii) $\forall x, y, z \in X\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,y) + \beta(y,z)$ (свойство билинейности).

Скалярное произведение порождает норму $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ (проверка свойств а), б), в) нормы предоставляются читателю). Так, норма из примера I порождена стандартным скалярным произведением в $\mathbf{R}^n$: $(x,y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, а норма из примера IV — скалярным произведением функций: $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Любое скалярное произведение на плоскости $\mathbf{R}^2$ задается так: если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, то $(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$, где $a_{12} = a_{21}$ и (необходимое и достаточное условие неотрицательности) $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. При этом единичный шар, т. е. совокупность тех $x \in \mathbf{R}^2$, для которых $(x,x) \leqslant 1$, — внутренность эллипса. Вообще, любое скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ задается положительно определенной симметрической билинейной формой $A(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$ ($a_{ij} = a_{ji} \in \mathbf{R}$, $\forall x \neq 0\ A(x,x) > 0$). Имеются критерии положительной определенности формы A — например, в терминах главных миноров матрицы a_{ij} (критерий Сильвестра — см., напр., [2]). Единичный шар в соответствующей норме — $\{x \in \mathbf{R}^n : \sum a_{ij}x_ix_j \leqslant 1\}$ — эллипсоид с центром в 0, вместе со своей внутренностью. Обратно, любой эллипсоид с центром в нуле задает норму, порожденную некоторым скалярным произведением.

Банахово пространство, в котором норма задана скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством*, в честь великого немецкого математика Д. Гильберта. Норма в гильбертовом пространстве обладает многими замечательными свойствами, которые зачастую являются характеристическими для гильбертовости. Приведем классический пример такого свойства.

Лемма А (П. Йордан, Дж. фон Нейманн, [3]). *Банахово пространство X является гильбертовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $x, y \in X$ выполнено равенство параллелограмма:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон).

Доказательство. Выполнение равенства параллелограмма в гильбертовом пространстве проверяется непосредственно.

Обратно, пусть в банаховом пространстве выполнено равенство параллелограмма. Положим

$$(x,y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

и покажем, что эта функция двух переменных обладает всеми свойствами скалярного произведения. Свойства a) и b) очевидны. Для доказательства c) установим вначале аддитивность:

$$(x+y, z) = (x,z) + (y,z),$$

которая в нашем случае равносильна равенству

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2. \qquad (1)$$

Запишем равенства параллелограмма для параллелограммов, натянутых на пары векторов $x+z$ и y, $y+z$ и x, $x-z$ и y, $y-z$ и x:

$$\begin{aligned} ||x+z+y||^2 + ||x+z-y||^2 &= 2(||x+z||^2 + ||y||^2), \\ ||y+z+x||^2 + ||y+z-x||^2 &= 2(||y+z||^2 + ||x||^2), \\ ||x-z+y||^2 + ||x-z-y||^2 &= 2(||x-z||^2 + ||y||^2), \\ ||y-z+x||^2 + ||y-z-x||^2 &= 2(||y-z||^2 + ||x||^2). \end{aligned}$$

Вычитая из суммы первых двух равенств сумму последних двух равенств, получаем (1).

Оставшееся свойство однородности $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ получается так: для целых λ оно следует из аддитивности; от целых λ легко перейти к рациональным λ, а от рациональных, по непрерывности, ко всем $\lambda \in \mathbf{R}$.

Теперь нетрудно проверить, что введенное таким образом скалярное произведение (x, y) порождает исходную норму. Лемма А доказана.

Следствие. *Если каждое двумерное (или каждое n-мерное, $n \geqslant 2$) подпространство банахова пространства X гильбертово, то и само X гильбертово.*

Отсюда вытекает одна из упомянутых во введении характеристик эллипсоида: если любое плоское сечение выпуклой центрально-симметричной поверхности есть эллипс, то сама поверхность — эллипсоид.

С помощью леммы А легко показать, что пространства из примеров II, III, V, VI гильбертовыми не являются.

Гильбертовы пространства изучаются и применяются в самых разных областях математики, и очень часто возникают утверждения, подобные лемме А, — когда какое-либо свойство гильбертова пространства оказывается характеристическим и кладется в основу критерия гильбертовости банахова пространства. Доказательству некоторых из этих критериев — именно, критериев, возникающих из теории приближений, — и посвящена настоящая работа.

Несколько слов об истории. Скалярное произведение (под названием inner product — «внутреннее произведение», это название сохранилось в англоязычной литературе до сих пор) ввел Гамильтон в 1853 г. Гильбертово пространство было определено в начале XX века в работах Гильберта и Шмидта. Последний в 1908 г. ввел обозначение $||\cdot||$ для нормы. Нормированные пространства были определены Банахом и Винером в 1922 г. Гильбертовы пространства выделяются среди банаховых пространств не только богатством свойств, но и «одинаковостью»: любые два гильбертовых пространства одинаковой размерности изометрически изоморфны друг другу (т. е. между ними существует линейное взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее норму). Так, любое n-мерное вещественное пространство со скалярным произведением $\sum a_{ij}x_iy_j$ изометрически изоморфно стандартному (евклидову) пространству $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением $\sum x_ky_k$ (дело в том, что любую положительно определенную симметрическую билинейную форму можно привести к диагональному виду линейной заменой переменных — см., напр., [2]). Любое бесконечномерное сепарабельное (т. е. обладающее счетным всюду плотным подмножеством) гильбертово пространство — в частности, пополнение пространства $C[0,1]$ по норме IV — изометрически изоморфно пространству l_2, состоящему из векторов $(x_1, x_2, \dots)$ со счетным числом координат, удовлетворяющих неравенству $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ (см., напр., [1, гл.III, § 4]). Скалярное произведение в этом пространстве задается так: $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Такая уникальность гильбертова пространства дает еще один повод к отысканию критериев гильбертовости.

Нельзя не упомянуть еще об одном банаховом пространстве, которое по своей значимости, быть может, сравнимо с гильбертовыми, — именно, о пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций с равномерной нормой (пример VI). Дело в том, что *любое* сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно некоторому (своему) подпространству пространства $C[0,1]$ (теорема Банаха – Мазура). Такая универсальность пространства $C[0,1]$ делает его противоположным гильбертову пространству по многим свойствам (см. замечание в конце следующего пункта).

В заключение этой вводной части приведем точную формулировку двух геометрических характеристик эллипсоидов в трехмерном пространстве, о которых говорилось во введении. На них мы будем опираться далее при доказательстве критериев гильбертовости.

Теорема A. *Пусть в $\mathbf{R}^3$ задана двумерная выпуклая замкнутая поверхность S, которая касается каждого описанного вокруг нее цилиндра по множеству, лежащему в двумерной плоскости. Тогда S — эллипсоид* (т. е. задается в некоторой системе координат как множество уровня положительно определенной квадратичной формы).

Эта теорема обычно называется теоремой Бляшке об эллипсоиде. Сам В. Бляшке [4] доказал ее для так называемого овалоида (регулярной аналитической замкнутой выпуклой поверхности с везде отличной от нуля кривизной). В общем случае теорема A доказана А. Д. Александровым [5]. Если интерпретировать множество, по которому поверхность S пересекается с описанным вокруг нее цилиндром, как границу «тени» S при освещении параллельным пучком света, направленным по образующей этого цилиндра, то теорема A будет звучать так: *всякая поверхность с плоскими границами теней — эллипсоид* (этой аналогией и объясняется название статьи [5]). Верно и обратное: любой эллипсоид имеет плоские границы теней (докажите!).

Теорема B. *Пусть в $\mathbf{R}^3$ задана двумерная выпуклая замкнутая поверхность S, симметричная относительно начала координат O. Если для каждой двумерной плоскости Γ, проходящей через O, существует направление $\tau(\Gamma)$, опорное к S во всех точках пересечения $S \cap \Gamma$, то S — эллипсоид.*

Эту теорему обычно называют теоремой Бляшке – Какутани. Сформулировавший ее С. Какутани [6] не дал полного доказательства, лишь указав на возможность сведения этой теоремы к теореме A. Доказательство теоремы B содержится в [7, гл. 5]. Вывод теоремы B из теоремы A осуществлен в [8].

2. Метрическая проекция и гильбертовость

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, Y — некоторое подмножество X, $\rho(x,Y) = \inf_{y\in Y} \|x-y\|$ — расстояние от элемента $x \in X$ до множества Y, $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x-y\| = \rho(x,Y)\}$ – *метрическая проекция* x на Y, т. е. множество ближайших к x элементов в Y (элементов наилучшего приближения). Для данного x метрическая проекция $P_Y(x)$ может не содержать ни одного элемента или содержать более одного элемента, а отображение $P_Y: x \to P_Y(x)$, называемое *оператором метрического проектирования*, вообще говоря, определено не на всем X, многозначно и даже разрывно.

Если же X — гильбертово пространство, а Y — его замкнутое (т.е. полное относительно нормы) линейное подпространство (вообще, везде ниже слово подпространство будет обозначать замкнутое линейное подпространство), то свойства P_Y предельно совершенны. В этом случае, как мы сейчас покажем, оператор P_Y *определен на всем X, однозначен, линеен и имеет норму* 1. Действительно, пусть $x \in X$, $\rho = \rho(x, Y)$ и последовательность $\{y_n\}$ такова, что $||x - y_n|| \to \rho$. По равенству параллелограмма,

$$\begin{aligned} ||y_n - y_m||^2 &= 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - ||2x - y_n - y_m||^2 = \\ &= 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - 4||x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)||^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - 4\rho^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty, \end{aligned}$$

так что последовательность y_n сходится по норме к некоторому элементу $y \in Y$ (подпространство Y замкнуто). Очевидно, $||x - y|| = \rho$, т.е. $y \in P_Y(x)$. Кроме того, для любого $y' \in Y$ и любого числа λ имеем

$$||x - y + \lambda y'||^2 = ||x-y||^2 + |\lambda|^2||y'||^2 + 2\lambda(x - y, y') \geqslant \rho^2 = ||x - y||^2.$$

При малых λ это неравенство может выполняться лишь в том случае, если $(x - y, y') = 0$. Отсюда $||x - y + \lambda y'|| > ||x - y|| = \rho$ при всех $y' \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Итак, метрическая проекция $P_Y(x)$ состоит ровно из одного элемента y, причем $\forall y' \in Y \quad (x - y, y') = 0$. Положим $Y^\perp = \{z \in X : \forall y' \in Y \quad (z, y') = 0\}$ — ортогональное дополнение к подпространству Y, являющееся, очевидно, подпространством. Как мы только что показали, $X = Y \bigoplus Y^\perp$, т.е. любой элемент $x \in X$ однозначно разлагается в сумму элемента $y = P_Y(x) \in Y$ и элемента $x - y \in Y^\perp$. Линейность отображения $x \mapsto y = P_Y(x)$ следует из линейности $Y^\perp$. Кроме того, оператор P_Y имеет норму 1: $||P_Y|| := \sup_{||x||=1} ||P_Y(x)|| = 1$, поскольку $1 = ||x||^2 = ||x - y + y||^2 = ||x - y||^2 + ||y||^2 + 2(x - y, y) = ||x - y||^2 + ||y||^2 \geqslant ||y||^2$, а с другой стороны, если $x \in Y$, то $P_Y(x) = x$ и $||P_Y(x)|| = ||x||$.

Итак, в данном случае оператор метрического проектирования $P_Y : X \to Y$ совпадает с оператором ортогонального проектирования на подпространство Y, однозначен, линеен и имеет норму 1. (Конечно, в нашем трехмерном пространстве это полностью соответствует нашим представлениям: ортогональная проекция точки x на плоскость Y является единственной ближайшей к x точкой в Y.) Возникает естественный вопрос: *не является ли какое-нибудь из этих свойств — скажем, линейность оператора P_Y или существование линейного проектора $X \to Y$ нормы 1 — характеристическим для гильбертова пространства? Или вдруг существуют другие банаховы пространства с такими замечательными свойствами?*

Рассмотрим трехмерное гильбертово пространство $X = \mathbf{R}^3$, норма в котором задается единичным шаром — некоторым эллипсоидом с центром в начале координат. Для любого одномерного подпространства $Y \subset X$, порождаемого некоторым вектором v, оператор метрического проектирования P_Y линеен. Это означает, что множество $\mathrm{Ker}(P_Y) = \{q \in X : P_Y(q) = 0\} = Y^\perp$ — двумерное (линейное) подпространство. В то же время, $\mathrm{Ker}(P_Y)$ — это в точности те элементы $q \in X$, для которых $\|q+\lambda v\| \geqslant \|q\|$ при любом числе λ, т. е. те точки q, в которых параллельные Y прямые являются опорными к сфере $\{x \in X : \|x\| = \|q\|\}$. Вот мы и доказали, что любой цилиндр, описанный вокруг эллипсоида, касается его по плоской кривой. Но по теореме A из п. 1 это есть характеристическое свойство эллипсоида! Таким образом, если в трехмерном банаховом пространстве оператор метрического проектирования на каждое одномерное подпространство линеен, то единичная сфера в этом пространстве удовлетворяет условиям теоремы A, а значит, это пространство гильбертово.

Ниже мы покажем, что существование линейного проектора нормы 1 на любое двумерное подпространство в трехмерном банаховом пространстве X равносильно тому, что единичная сфера $S(X)$ удовлетворяет условиям теоремы B — т. е. опять же, равносильно гильбертовости X.

Какие же аналогичные условия будут критериями гильбертовости в банаховом пространстве произвольной размерности?

Один из авторов этой статьи (В. М. Тихомиров) в начале 60-х годов столкнулся с такой проблемой, поставленной С. М. Никольским на конгрессе в Амстердаме ([17, стр. 263]). Пусть X — банахово пространство, Y — подпространство в X, C — подмножество в X. Определим *уклонение* C от Y в X: $d(C,Y,X) = \sup_{x\in C} \rho(x,Y)$. Если X гильбертово, то $\rho(x,Y) = \|x - P_Y(x)\|$, и, следовательно, уклонение $d(C,Y,X)$ равно верхней грани $\sup_{x\in C} \|x - P_Y(x)\|$, где P_Y — линейный оператор метрического проектирования на Y. В других пространствах, не гильбертовых, дело обстоит сложнее, так как ближайший к x элемент пространства Y находится при помощи, вообще говоря, нелинейной операции. И здесь возникает проблема (пишет С. М. Никольский): нельзя ли все же построить такой линейный оператор Λ, который отображал бы множество C в подпространство Y так, чтобы $d(C,Y,X) = \sup_{x\in C} \|x - \Lambda(x)\|$? Конечно, для отдельной пары C, Y такой оператор может найтись и в негильбертовом пространстве X — например, в случае, когда оператор P_Y допускает *линейную выборку* (т. е. существует такой линейный оператор $P : X \to Y$, что $P(x) \in P_Y(x)$ для любого $x \in X$). Скажем, в пространстве $C[-1,1]$ с равномерной нормой (оно, как мы знаем, не гильбертово) существует линейная выборка из оператора метрического проектирования на подпространство всех четных функций из $C[-1,1]$: $f(x) \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ (проверьте!). Поэтому вопрос С. М. Никольского надо уточнить: *как велика в негильбертовом пространстве X может быть совокупность пар $\{C,Y\}$, для каждой из которых найдется (свой) оператор Λ с указанными свойствами?*

На эти и некоторые другие вопросы частично отвечает

Теорема 1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $dim X \geqslant 3$. Следующие условия эквивалентны:*

0) *X — гильбертово;*

1) *существует такое число $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant dim X - 2$, что для любого n-мерного подпространства $Y_n \subset X$ и любого подмножества $C \subset X$ найдется линейный оператор $\Lambda : X \to Y_n$, для которого $\sup_{x\in C} \|x - \Lambda(x)\| = d(C, Y_n, X)$;*

2) *существует такое число $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant dimX - 2$, что для любого n-мерного подпространства $Y_n \subset X$ оператор метрического проектирования P_{Y_n} допускает линейную выборку;*

3) *существует такое число $k \in \mathbf{N}$, $2 \leqslant k \leqslant dimX - 1$, что для любого k-мерного подпространства $Y_k \subset X$ найдется линейный проектор π_{Y_k} : $X \to Y_k$ нормы 1.*

В этой теореме утверждение о равносильности 0) и 1) частично отвечает на вопрос С. М. Никольского и вытекает, как мы увидим, из эквивалентности 0) $\Longleftrightarrow$ 2), доказанной в [8] (соответствующая теорема 3 в [8] формулируется в других терминах). До этого Рудин и Смит [9] нашли необходимое и достаточное условие гильбертовости более сильное, чем 2): они требовали, чтобы сам оператор P_{Y_n} был однозначным и линейным для каждого n-мерного подпространства $Y_n \subset X$. Утверждение о равносильности 0) и 3) доказано в [8] и обобщает теорему Какутани [6], в которой требовалось существование проектора π_Y нормы 1 на *любое* подпространство $Y \subset X$. Для $k = 2$ эквивалентность 0) $\Longleftrightarrow$ 3) была доказана Филлипсом [10]. В работе [8] содержатся также обобщения этих критериев и близкие им утверждения.

Доказательство. Выполнение каждого из условий 1), 2) и 3) в гильбертовом пространстве уже отмечалось выше. Докажем обратные утверждения по следующей схеме: 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 0) и 3) $\Longrightarrow$ 0).

1) $\Longrightarrow$ 2). Возьмем произвольное n-мерное подпространство $Y_n \subset X$ и положим $C = Y_n + B$, где $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ — единичный шар пространства X. Согласно 1), $1 = d(C, Y_n, X) = \sup_{x\in C} \|x - \Lambda(x)\|$, где $\Lambda : X \to Y_n$ — некоторый ограниченный линейный оператор. Докажем, что Λ является выборкой из оператора P_{Y_n} метрического проектирования на подпространство Y_n. Возьмем любой элемент $x \in X$, какой-нибудь его элемент наилучшего приближения $y \in P_{Y_n}(x)$ и положим $q = x - y$. Элемент $x' = x/\|q\| = q/\|q\| + y/\|q\| = q' + y'$ принадлежит множеству C, а значит, $1 \geqslant \|x' - \Lambda(x')\| = \|q' + (y' - \Lambda(x'))\|$. Нулевой элемент 0 является в Y_n элементом наилучшего приближения для q, а значит, и для q', поэтому $\|q' + (y' - \Lambda(x'))\| \geqslant \|q' - 0\| = \|q'\| = 1$. Вместе с предыдущим неравенством это дает $\|x' - \Lambda(x')\| = 1$, откуда $\|x - \Lambda(x)\| = \|q\|\,\|x' - \Lambda(x')\| = \|q\| = \rho(x, Y_n)$, т. е. $\Lambda(x) \in P_{Y_n}(x)$.

Итак, для любого n-мерного подпространства $Y_n \subset X$ мы нашли линейную выборку из оператора P_{Y_n}, так что X удовлетворяет условию 2) при данном n.

2) $\Longrightarrow$ 0). Можно считать, что $\dim X = n + 2$. Действительно, в противном случае возьмем произвольное подпространство $X_{n+2} \subset X$ размерности $n+2$. Оно также будет удовлетворять условию 2). Доказав гильбертовость любого такого X_{n+2}, мы в силу следствия из леммы A докажем и гильбертовость исходного пространства X.

Итак, считаем $\dim X = n+2$. Возьмем произвольное подпространство $Z \subset X$ размерности $n - 1$. В факторпространстве X/Z, состоящем из классов смежности $[x] = \{x + z : z \in Z\}$, как обычно (см., напр., [1], гл. III, § 3), введем норму $\|[x]\| = \inf_{z\in Z} \|x - z\|$ (доказательство того, что это действительно норма, предоставляется читателю). Любое одномерное подпространство в X/Z есть Y/Z для некоторого подпространства $Y \subset X$, $\dim Y = n$. По условию, существует линейный проектор $P : X \to Y$, сопоставляющий каждому $x \in X$ какой-то элемент наилучшего приближения $P(x) \in P_Y(x)$. Покажем, что возникающий линейный проектор $\tilde{P} : X/Z \to Y/Z$, $\tilde{P}([x]) = [P(x)]$, обладает тем же свойством в факторпространстве X/Z. Действительно, для любого $[y] \in Y/Z$ имеем

$$\|[x] - \tilde{P}([x]) - [y]\|_{X/Z} = \inf_{z \in Z} \|x - P(x) - y - z\| \geqslant \inf_{z \in Z} \|x - P(x)\| = \|x - P(x)\| =$$
$$= \inf_{z \in Z} \|x - P(x) - z\| = \|[x] - [P(x)]\|_{X/Z} = \|[x] - \tilde{P}([x])\|_{X/Z}.$$

Таким образом, для любого $(n-1)$-мерного подпространства $Z \subset X$ трехмерное пространство $\tilde{X} = X/Z$ удовлетворяет 2) с $n = 1$. Если мы докажем, что каждое такое $\tilde{X}$ гильбертово, то гильбертовость X будет вытекать из следующей леммы.

Лемма B ([8]). *Пусть X — конечномерное банахово пространство, и существует такое натуральное число $d \leqslant \dim X - 2$, что для любого d-мерного подпространства $Z \subset X$ факторпространство X/Z гильбертово. Тогда гильбертовым является и само X.*

Доказательство леммы B. Достаточно показать, что для любых двух элементов $f, g \in X$ выполняется равенство параллелограмма. Возьмем в X гиперплоскость F, опорную к шару $\{x \in X : \|x\| \leqslant \|f\|\}$ в точке f, и аналогичную гиперплоскость G для элемента g. В пересечении $F \cap G$ выберем d-мерную плоскость, и пусть Z — d-мерное подпространство, параллельное этой плоскости. Плоскость $Z + f$ содержится в плоскости F, т. е. является опорной к шару $\{x : \|x\| \leqslant \|f\|\}$ в точке f. Это означает, что $\|f+z\| \geqslant \|f\|$ для любого $z \in Z$. Аналогично, $\|g + z\| \geqslant \|g\|$ для любого $z \in Z$. Поэтому в факторпространстве X/Z нормы классов смежности $[f]$ и $[g]$ совпадают с нормами исходных элементов f и g: $\|[f]\|_{X/Z} = \|f\|$, $\|[g]\|_{X/Z} = \|g\|$.

Пространство X/Z — гильбертово, поэтому

$$\|[f] + [g]\|^2 + \|[f] - [g]\|^2 = 2(\|[f]\|^2 + \|[g]\|^2)$$

или

$$\inf_{z \in Z} \{\|f + g + z\|^2\} + \inf_{z \in Z} \{\|f - g + z\|^2\} = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Отсюда

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 \geqslant 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \qquad \forall f, g \in X.$$

Запишем последнее неравенство с заменой f и g, соответственно на $(f+g)/2$ и $(f-g)/2$:

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 \geqslant \frac{\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2}{2}.$$

Последние два неравенства вместе дают искомое равенство параллелограмма. Лемма B доказана.

Геометрически лемму B можно интерпретировать так: если выпуклая центрально-симметричная поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$ при проектировании вдоль любого d-мерного подпространства L ($d \leqslant n - 2$ — заданное натуральное число) на некоторую $(n-d)$-мерную плоскость $\Pi = \Pi(L)$ дает эллипсоид в Π, то она сама является эллипсоидом (ср. с одной из приведенных во введении характеристик эллипсоидов в $\mathbf{R}^3$).

Вернемся к доказательству теоремы. Осталось доказать гильбертовость трехмерного пространства $\tilde{X}$, удовлетворяющего условию 2) с $n = 1$. Докажем, что единичная сфера S этого пространства — эллипсоид. Возьмем произвольное одномерное подпространство $Y \subset \tilde{X}$ и соответствующий проектор $P : \tilde{X} \to Y$, $\forall x \in \tilde{X} \quad P(x) \in P_Y(x)$. Ядро этого проектора — некоторое двумерное подпространство $U = U(Y)$. Для каждого элемента $u \in U$ одним из ближайших элементов в Y является 0, т. е. $\|u + y\| \geqslant \|u + 0\| = \|u\|$ при любом $y \in Y$. Это означает, что прямая, параллельная Y и проходящая через u, является опорной к сфере $\{x : \|x\| = \|u\|\}$ в точке u. В частности, пересечение единичной сферы S и описанного вокруг нее цилиндра $C(Y)$ с образующей Y целиком содержит кривую $S \cap U$, т. е. $(S \cap C(Y)) \supseteq (S \cap U)$. Для окончательного приведения к условиям теоремы А (см. п. 1) надо доказать, что $(S \cap C(Y)) = (S \cap U)$.

Пусть, вопреки этому, прямая l параллельна подпространству Y и является опорной к сфере S в точке $p \notin U$. Эта прямая пересекается с U в некоторой точке q. Как мы знаем, l является опорной к сфере $\{x : \|x\| = \|q\|\}$ в точке q, и в то же время, по предположению, она является опорной к $S = \{x : \|x\| = 1\}$ в точке p. Отсюда $\|q\| = 1$, отрезок $pq \subset S$ (единичный шар — выпуклое множество), а прямая l является опорной к S во всех точках этого отрезка.

Пусть Π — двумерная плоскость, опорная к S во всех точках отрезка pq, а Γ — двумерное подпространство, порожденное векторами p и q. Существует одномерное подпространство $Y' \neq Y$, параллельное Π и такое, что соответствующее ему подпространство U' (такое, что $(S \cap C(Y')) \supseteq (S \cap U')$) не совпадает с Γ. Действительно, если $(S \cap \Gamma) \subseteq (S \cap C(Y'))$ для любого $Y' \parallel \Pi$, $Y' \neq Y$, то по непрерывности $(S \cap \Gamma) \subseteq (S \cap C(Y))$, что невозможно, так как $Y \subset \Gamma$ (отрезок $pq \parallel Y$). Таким образом, прямая $\Pi \cap U'$ и отрезок pq, лежащие в одной плоскости Π, не параллельны. Как и выше, доказывается, что всякий отрезок, параллельный подпространству Y' и имеющий один конец на отрезке pq и другой на прямой $\Pi \cap U'$, целиком лежит на сфере S. Следовательно, пересечение $\Pi \cap S$ имеет внутренние точки относительно плоскости Π, т. е. представляет собой невырожденную (выпуклую замкнутую) плоскую область D.

Возьмем вектор v, не параллельный плоскости Π, порожденное им одномерное подпространство $Y(v)$ и соответствующее двумерное подпространство $U(v)$ (для которого $(S \cap C(Y(v))) \supseteq (S \cap U(v))$). Это подпространство $U(v)$ не может пересекать область D по внутренности, иначе часть D (а значит, и сферы S) лежит вне цилиндра $C(Y(v))$, описанного по кривой $S \cap U(v)$. Итак, для любого вектора v, не параллельного Π, область D лежит в Π по одну сторону от прямой $\Pi \cap U(v)$ (при этом, если вектор v, будучи приставлен к какой-нибудь точке из $\Pi \cap U(v)$, «смотрит» в то из двух подпространств, где лежит S, то его проекция на плоскость Π и область D лежат в Π по разные стороны от прямой $\Pi \cap U(v)$). По непрерывности мы можем утверждать это и для любого вектора v, параллельного Π. Но тогда, как уже было дважды показано выше в подобных случаях, область D вместе с каждой своей точкой p содержит отрезок pq, параллельный v и соединяющий p с точкой $q \in \Pi \cap U(v)$ (при этом вектор $\overline{pq}$ сонаправлен с v).

Итак, мы получили невырожденную выпуклую замкнутую область $D \subset \Pi$, которая по любому направлению v, параллельному плоскости Π, *сама по себе* проектируется на некоторую прямую $l(v) = \Pi \cap U(v)$, *не пересекающую внутренность* D. Такой области не существует (докажите!).

Итак, наше предположение неверно, $(S \cap C(Y)) = (S \cap U(Y))$ для любого одномерного подпространства $Y \subset \tilde{X}$, и по теореме A из п. 1 S — эллипсоид, а $\tilde{X}$ — гильбертово пространство.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 0) полностью доказана.

3) $\Longrightarrow$ 0). Предположим вначале, что пространство X удовлетворяет условию 3) с $k = 2$ (случай Филлипса [10]). Тогда, очевидно, любое трехмерное подпространство $X_3 \subset X$ также удовлетворяет этому условию. Доказав гильбертовость любого такого X_3, мы в силу следствия из леммы A докажем и гильбертовость X.

Итак, надо доказать гильбертовость трехмерного банахова пространства, в котором на каждое двумерное подпространство Y есть проектор π_Y нормы 1. Существование π_Y равносильно существованию такого вектора $\tau(Y)$, определяющего направление проектирования, что $\|y\| = \|\pi_Y(y + \lambda\tau(Y))\| \leqslant \|y + \lambda\tau(Y)\|$ для любого $y \in Y$ и любого числа λ. Это означает, что направление $\tau(Y)$ является опорным к единичной сфере $S = S(X_3)$ во всех точках пересечения $S \cap Y$. По теореме B из п. 1, S — эллипсоид, а значит, X_3 — гильбертово пространство.

Пусть теперь исходное пространство X удовлетворяет условию 3) с $k \geqslant 3$. Возьмем в X произвольное подпространство Y размерности k, а в Y — произвольное $(k-1)$-мерное подпространство Y_1. Возьмем также какой-нибудь элемент $c \in \operatorname{Ker}(\pi_Y)$, $c \neq 0$, и порожденное им подпространство $< c >$. Подпространство $Z :=< c > \bigoplus Y_1$ имеет в X размерность k — ту же, что и Y. По условию существует проектор $\pi_Z : X \to Z$ нормы 1. Рассмотрим действие композиции $\pi_Y \circ \pi_Z$ на подпространстве Y. Для всех $y \in Y$ имеем $\pi_Z(y) = y_1 + \lambda c$, где $y_1 \in Y_1$, а λ — число. Отсюда $\pi_Y \circ \pi_Z(y) = \pi_Y(y_1) + \lambda\pi_Y(c) = y_1 + \lambda \cdot 0 = y_1$, т. е. оператор $\pi_Y \circ \pi_Z$ переводит Y в его собственное подпространство Y_1. Поскольку π_Y и π_Z не увеличивают норму, то их композиция также обладает этим свойством. При этом для любого $y_1 \in Y_1$ имеем $\pi_Y \circ \pi_Z(y_1) = y_1$. Таким образом, $\pi_Y \circ \pi_Z = \pi_{Y_1} : Y \to Y_1$ — проектор нормы 1, т. е. Y как банахово пространство удовлетворяет условию 3) с $k = 1$. При этом в рассматриваемом случае Y не менее чем трехмерно.

Точно так же доказывается, что в любом $(k-1)$-мерном подпространстве существует проектор нормы 1 на любое его $(k-2)$-мерное подпространство. Продолжая так далее, за конечное число шагов мы покажем, что в любом трехмерном пространстве $X_3 \subset X$ существует проектор нормы 1 на любое двумерное подпространство, т. е. придем к уже разобранному случаю.

Можно обойтись и без индукции, показав, что для любого $(k-3)$-мерного подпространства U в k-мерном Y в факторпространстве $Y_3 = Y/U$ существует проектор $\pi_V : Y_3 \to V$ нормы 1 на любое двумерное подпространство $V \subset Y_3$. После этого остается только применить лемму B.

Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что условия на n и k в теореме 1 существенны. Если $\dim X \neq \infty$ и $n = \dim X - 1$, то для *любого* n-мерного подпространства $Y \subset X$ оператор метрического проектирования P_Y допускает линейную выборку (именно, проектирование вдоль любого направления $v \neq 0$, для которого $P_Y(v) \ni 0$). В условии 3) равенство $k = 1$ также не годится: в любом банаховом пространстве X есть проектор π_Y нормы 1 на любое одномерное подпространство Y (именно, проектирование идет вдоль гиперплоскости, опорной к единичной сфере S в точках $S \cap Y$).

Существуют «антиподы» гильбертовых пространств — банаховы пространства, в которых нет собственных подпространств Y коразмерности > 1 с линейным оператором метрического проектирования $P_Y : X \to Y$. Таким является, например, пространство $C[0,1]$ с равномерной нормой [11]. Можно построить и (даже трехмерное) пространство X, в котором нет собственных подпространств Y коразмерности > 1 с линейной выборкой из оператора P_Y. В справедливости этого последнего факта мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

3. Поперечники и гильбертовость

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, C — подмножество X, $\Phi = \{F\}$ — некоторое семейство непрерывных отображений из C в X. Рассмотрим величину

$$p_\Phi(C,X) = \inf_{F\in\Phi} \sup_{x\in C} \|x - F(x)\|. \tag{2}$$

Если Φ — совокупность линейных (на линейной оболочке C) отображений, образ которых n-мерен, величина (2) называется *линейным поперечником* $\lambda_n(C,X)$; при том же Φ величина $d^n(C,X) = \dfrac{1}{2}\inf_{F\in\Phi}\sup_{x\in C}\operatorname{diam}[F^{-1}(F(x))]$ называется *поперечником по Гельфанду* множества C. Если Φ — совокупность всех непрерывных отображений F, образ каждого из которых принадлежит некоторой n-мерной плоскости $\Pi = \Pi_n(F)$, величину (2) называют *поперечником по Колмогорову* $d_n(C,X)$. Если же Φ — совокупность всех непрерывных отображений, образ которых — n-мерный комплекс[1)], расположенный в X, то (2) называется *александровским поперечником* (в честь П. С. Александрова) и обозначается $a_n(C,X)$.

О свойствах поперечников и их роли в теории приближений можно подробно узнать в гл. 3 обзора [12]. Здесь же мы займемся поперечниками подмножеств гильбертова пространства и теми их свойствами, которые являются характеристическими для гильбертовости.

Для любого отображения F множества C в n-мерную плоскость L величина $\sup_{x\in C}\|x - F(x)\|$ не меньше уклонения C от L. Поэтому $\lambda_n(C,X) \geqslant d_n(C,X) \geqslant \inf_{\dim L = n} d(C,L,X)$. Но, как мы знаем, в гильбертовом пространстве $d(C,L,X) = \sup_{x\in C}\|x - P_L(x)\|$, где P_L — линейный оператор ортогонального проектирования на L, откуда $\lambda_n(C,X) \leqslant \inf_{\dim L=n} d(C,L,X)$. Следовательно, $\lambda_n(C,X) = d_n(C,X)$ для любого множества C в гильбертовом пространстве X.

Далее, для линейного P_L имеем

$$\frac{1}{2}\sup_{x\in C}\operatorname{diam}[P_L^{-1}(P_L(x))] \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in C} 2 \sup_{z\in C: P_L(z)=P_L(x)} \|z - P_L(x)\| = \sup_{x\in C}\|x - P_L(x)\|,$$

откуда $d^n(C,X) \leqslant d_n(C,X)$ (в случае произвольного банахова пространства X поперечники d^n и d_n, вообще говоря, никак не связаны).

Если Y — некоторое подпространство в гильбертовом пространстве X, то оператор P_Y имеет норму 1, откуда $\sup_{x\in C}\|x - F(x)\| \geqslant \sup_{x\in C}\|P_Y(x) - P_Y \circ F(x)\|$. Отсюда для любого поперечника $p_n = \lambda_n, d_n, d^n, a_n$ следует, во-первых,

[1)] Объединение в некотором числе не более чем n-мерных симплексов: точек (нульмерные симплексы), отрезков (одномерные симплексы), треугольников (двумерные симплексы), тетраэдров (трехмерные симплексы) и т. д.

что $p_n(P_Y(C),X) \leqslant p_n(C,X)$, а во-вторых, что если $C \subset Y$, то $p_n(C,Y) = p_n(C,X)$.

При этом для множеств $C \not\subset Y$ поперечник не обязан строго уменьшаться после ортогонального проектирования на подпространство. Докажем, например, что для единичного шара B и любого $(n+1)$-мерного подпространства Y выполняется равенство $a_n(B\cap Y,X) = a_n(B,X) = 1$. Прежде всего, $a_n(B\cap Y,Y) = a_n(B\cap Y,X) \leqslant a_n(B,X) \leqslant 1$ (последнее неравенство следует из того, что для отображения $F : B \to \{0\}$ шара B в нульмерный комплекс $\{0\}$ имеем $\sup_{x\in B}\|x-F(x)\| = 1$). Осталось доказать равенство $a_n(B\cap Y,Y) = 1$. Следуя М. И. Стесину ([13, теорема 1.1.7]), предположим противное: существует такое непрерывное отображение F шара $B_Y = B\cap Y$ в n-мерный комплекс $K_n \subset Y$, что $\|x-F(x)\| \leqslant 1-\delta$, $\delta > 0$, для любого $x \in B_Y$. Возьмем произвольный элемент $y \in Y$, $\|y\| \leqslant \delta/2$, и покажем, что $y \in F(B_Y)$. Если $y \notin F(B_Y)$, то $G(x) := \dfrac{y-F(x)}{\|y-F(x)\|}$ — непрерывное отображение шара B_Y в себя, точнее, в сферу $S_Y = \{y : \|y\| = 1\}$. По теореме Брауэра о неподвижной точке у отображения G существует неподвижная точка x_0: $G(x_0) = x_0$, $\|x_0\| = 1$. Отсюда $F(x_0) = y - \|y-F(x_0)\|x_0$, так что

$$\|x_0 - F(x_0)\| = \|x_0(1+\|y-F(x_0)\|) - y\| \geqslant \|x_0\|(1+\|y-F(x_0)\|) - \|y\| \geqslant \geqslant \|x_0\| - \delta/2 > 1-\delta,$$

что противоречит предположению. Поэтому образ $F(B_Y)$ содержит $\left(\frac{\delta}{2}\right)$-окрестность нуля и не может быть n-мерным комплексом (напомним, наше пространство Y имеет размерность $n+1$), так что действительно $a_n(B_Y,Y) = 1$. Заметим, что это рассуждение Стесина годится для любого $(n+1)$-мерного банахова пространства.

Если X — произвольное банахово пространство с $\dim X \geqslant n+1$, то, вообще говоря, $a_n(B\cap Y,X) \leqslant 1$. В то же время для колмогоровских поперечников всегда $d_n(B\cap Y,X) = 1$.

Как показывает следующая теорема, выполнение любого из выявленных нами (не)равенств при каком-то фиксированном n является характеристическим свойством гильбертовых пространств.

Теорема 2. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $\dim X \geqslant 3$. Следующие условия эквивалентны:*

0) *X — гильбертово;*

1) *существует такое число $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant \dim X - 2$, что для любого множества $C \subset X$ справедливо равенство $d_n(C,X) = \lambda_n(C,X)$;*

2) *существует такое число $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant \dim X - 2$, что для любого множества $C \subset X$ справедливо неравенство $d^n(C,X) \leqslant d_n(C,X)$;*

3) *существует такое число $n \in \mathbf{Z}_+$, $n \leqslant \dim X - 3$, что для любого $(n+2)$-мерного подпространства $Y \subset X$ и любого множества $C \subset Y$ справедливо равенство $d_n(C,Y) = d_n(C,X)$;*

4) *существует такое число $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant \dim X - 2$, что для любого $(n+1)$-мерного подпространства $Y \subset X$ справедливо равенство $a_n(B\cap Y,X) = 1$.*

В этой теореме утверждение о равносильности 0) и 3) доказано в [14]. Статья одного из авторов (В. М. Тихомиров), в которой были сформулированы эквивалентности 0) $\Longleftrightarrow$ 1) $\Longleftrightarrow$ 2), осталась неопубликованной. Равносильность условий 0) и 4) доказана М. И. Стесиным [13].

Доказательство. Выполнение каждого из условий 1), 2), 3) и 4) в гильбертовом пространстве уже отмечалось выше. Докажем обратные утверждения.

1) $\Longrightarrow$ 0). Пусть Y_n — произвольное n-мерное подпространство в X. Положим $C = Y_n + B = \{x \in X : \rho(x, Y_n) \leqslant 1\}$. Очевидно, $d_n(C, X) = d(C, Y_n, X) = 1$. Отсюда $\lambda_n(C, X) = 1$, и подпространство Y_n является экстремальным также и для этого поперечника (если π_k — линейные проекторы множества C на n-мерные плоскости Y_{n_k} и $\sup_{x\in C} \|x - \pi_k(x)\| \to 1$ при $k \to \infty$, то все $Y_{n_k} \parallel Y_n$, $d(Y_{n_k}, Y_n, X) \to 1$, а $\pi_k(x) \to P(x)$, где $P : C \to Y_n$ — линейный проектор, $\sup_{x\in C} \|x - P(x)\| = 1$). Итак, существует линейный проектор $P : X \to Y_n$ с условием $\forall x \in C \quad \|x - P(x)\| \leqslant 1$. Рассуждая точно так же, как при доказательстве импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) в теореме 1, доказываем, что P является линейной выборкой из оператора метрического проектирования P_{Y_n}. По теореме 1 X — гильбертово.

2) $\Longrightarrow$ 0). Возьмем произвольное $(n+2)$-мерное подпространство $X_{n+2} \subset X$, а в нем — произвольное n-мерное подпространство Y_n. Положим опять $C = Y_n + B$. Имеем $1 = d^n(B, X) \leqslant d^n(C, X) \leqslant d_n(C, X) = 1$, так что $d^n(C, X) = 1$. Пусть $\rho_k = \frac{1}{2} \sup_{x\in C} \operatorname{diam}[F_k^{-1}(F_k(x))] \to 1$, где $F_k : X \to Y_n^{(k)}$ — линейные проекторы на некоторые n-мерные подпространства $Y_n^{(k)}$ (при определении поперечника по Гельфанду можно ограничиться отображениями только на n-мерные подпространства). Для любого элемента $q \in \operatorname{Ker}(F_k) \cap C$ весь отрезок $[-q, q] \subset (\operatorname{Ker}(F_k) \cap C)$, поэтому $\frac{1}{2} \operatorname{diam}[-q, q] \leqslant \rho_k$, т.е. $\|q\| \leqslant \rho_k$. Ядра $\operatorname{Ker}(F_k)$ трансверсальны Y_n, поэтому в X_{n+2} можно рассмотреть линейные проекторы $\pi_k : X_{n+2} \to Y_n$ вдоль двумерных подпространств $X_{n+2} \cap \operatorname{Ker}(F_k)$. Для любого элемента $x \in X_{n+2}$, $x = y + q$, $y \in Y_n$, $q \in \operatorname{Ker}(F_k)$ имеем

$$\|\pi_k(x) - x\| = \|q\| \leqslant \rho(q, Y_n) \left\| \frac{q}{\rho(q, Y_n)} \right\| \leqslant \rho(q, Y_n)\rho_k = \rho(x, Y_n)\rho_k \to \rho(x, Y_n).$$

Далее, в X_{n+2} из последовательности π_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность, и для предельного проектора $\pi : X_{n+2} \to Y_n$ будет $\|\pi(x) - x\| \leqslant \rho(x, Y_n)$, так что π — линейная выборка из оператора метрического проектирования $P_{Y_n} : X_{n+2} \to Y_n$. По теореме 1 X_{n+2} — гильбертово, а значит, X тоже гильбертово.

В доказательстве оставшихся утверждений теоремы 2 существенную роль будет играть один результат А. Л. Гаркави. Прежде чем формулировать его, напомним, что нулевой колмогоровский поперечник $d_0(C, X)$ называется также *чебышевским радиусом* множества C (infimum радиусов шаров, содержащих C), а точка $t = t(C)$, для которой $d_0(C, X) = \sup_{x\in C} \|x - t\|$, (если она существует) — *чебышевским центром* множества C.

Лемма С (А. Л. Гаркави, [15]). *Вещественное банахово пространство X, $\dim X \geqslant 3$, является гильбертовым тогда и только тогда, когда для* *любых трех точек некоторый их чебышевский центр принадлежит их линейной оболочке.*

Как видим, здесь критерием гильбертовости выступает ослабленное условие 3) при $n = 0$ из теоремы 2.

Доказательство леммы C. Необходимость уже отмечалась. Докажем достаточность.

Возьмем произвольное трехмерное подпространство $X_3 \subset X$, двумерное подпространство $Y_2 \subset X_3$ и точку $x \in X_3 \setminus Y_2$. Обозначим $S_r = \{y \in Y_2 : \|x-y\| = r\}$. Если $y_1, y_2, y_3 \in S_r$, то шары $B(y_j, r) = \{z \in X_3 : \|z - y_j\| \leqslant r\}$, $j = 1, 2, 3$, имеют общую точку в плоскости Y_2 (иначе никакой чебышевский центр трех точек $\{y_j\}_{j=1}^3$ не лежит в Y_2). Отсюда по теореме Хелли ([16, гл. I, § 7]) существует общая точка $z_r \in Y_2$, принадлежащая всем шарам $B(y, r)$ при $y \in S_r$.

Докажем теперь, что все шары вида $B(y, \|x-y\|)$, $y \in Y_2$, имеют общую точку. Достаточно доказать это для любых трех шаров $B(y_j, \|x - y_j\|)$, $j = 1, 2, 3$ (а потом опять применить теорему Хелли). Положим $a = \max\{\|x-y_j\| : j = 1, 2, 3\}$, и пусть y_j' — такая точка из S_a, что отрезок $[z_a, y_j']$ содержит y_j, $j = 1, 2, 3$ (при этом, конечно, $y_j' = y_j$ по крайней мере для одного j). Имеем $\|z_a - y_j\| + \|y_j - y_j'\| \leqslant$ $\leqslant a = \|x - y_j'\| \leqslant \|x - y_j\| + \|y_j' - y_j\|$, т.е. $\|z_a - y_j\| \leqslant \|x - y_j\|$, а значит, $z_a \in B(y_j, \|x - y_j\|)$, $j = 1, 2, 3$, что и требовалось.

Если точка $z \in B(y, \|x-y\|) \cap Y_2$ для всех $y \in Y_2$ (существование такой точки только что доказано), то $\|y - z\| \leqslant \|y - x\|$ для всех $y \in Y_2$. А это означает, что существует проектор $\pi : X_3 \to Y_2$ нормы 1. Действительно, каждый элемент $v \in X_3$ можно однозначно представить в виде $v = \alpha(x - z) + y$, где $y \in Y_2$, а α — некоторое число, и можно определить отображение $\pi : v \to y$. Это линейный проектор, и его норма равна 1:

$$\|v\| = \|\alpha(x - z) + y\| = |\alpha|\|x - (z - \frac{y}{\alpha})\| \geqslant |\alpha|\|z - (z - \frac{y}{\alpha})\| = \|y\| = \|\pi(v)\|.$$

Итак, в пространстве X_3 существует проектор нормы 1 на каждое двумерное подпространство Y_2. По теореме 1 X_3 — гильбертово. Следовательно (по следствию из леммы A), гильбертовым является и исходное пространство X.

Лемма C доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.

3) $\Longrightarrow$ 0). Пусть X не гильбертово. По лемме C существуют три точки $x_1, x_2, x_3 \in X$, никакой чебышевский центр которых не лежит в их линейной оболочке. Можно считать, что эта линейная оболочка — двумерное подпространство Y_2, 0 — чебышевский центр множества $C_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ относительно Y_2 и $d_0(C_0, Y_2) = 1 \geqslant d_0(C_0, X)$.

Покажем, что $\|x_j\| = 1$, $j = 1, 2, 3$. Менее чем для двух точек это равенство выполняться не может, иначе 0 не является чебышевским центром C_0 в Y_2. Предположим, что $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, а $\|x_3\| < 1$. Если $\|x_1 - x_2\| < 2$, то для $z(\alpha) = \alpha \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\alpha \in (0, 1)$, при $j = 1, 2$ имеем

$$\|x_j - z(\alpha)\| \leqslant \|\alpha(x_j - \frac{x_1 + x_2}{2})\| + \|(1 - \alpha)x_j\| = \alpha\|\frac{x_1 - x_2}{2}\| + 1 - \alpha < 1,$$

в то время как $\|x_3 - z(\alpha)\| < 1$ при всех достаточно малых α, так что опять получаем, что 0 — не чебышевский центр. Если же $\|x_1 - x_2\| = 2$, то $d_0(C_0, X) \geqslant$

$\geqslant d_0(\{x_1, x_2\}, X) = 1$, что опять противоречит условиям на точки x_j. Поэтому наше предположение неверно, и все три точки лежат на единичной сфере $S(Y_2)$ подпространства Y_2.

Если в Y_2 провести прямые l_j, опорные к $S(Y_2)$ в точках x_j, $j = 1, 2, 3$ (в одной точке может быть много опорных прямых — выберем какую-нибудь), то эти прямые будут образовывать треугольник T, содержащий внутри себя сферу $S(Y_2)$ (докажите!).

Возьмем в X какое-нибудь $(n+3)$-мерное подпространство X' (напомним, $\dim X \geqslant n+3$), содержащее Y_2, а в нем — гиперплоскости Γ_j, опорные к единичной сфере $S(X')$ в точках x_j и содержащие в себе прямые l_j, $j = 1, 2, 3$. Пересечение трех подпространств $\Gamma_j^0 \subset X'$, параллельных Γ_j, по крайней мере n-мерно. Возьмем в этом пересечении n-мерное подпространство Y_n и положим $C = C_0 + Y_n$, $Y = Y_2 + Y_n$. Размерность Y равна $n+2$, поскольку Y_n трансверсально Y_2.

Очевидно, $d_n(C, X) \leqslant d_0(C, X) < 1$. Для получения противоречия с условием 3) осталось доказать, что $d_n(C, Y) = d_0(C_0, Y_2) = 1$.

Если $d_n(C, Y) < 1$, то существует такая n-мерная плоскость $\Pi \subset Y$, параллельная Y_n, что $\forall x \in C \quad \rho(x, \Pi) \leqslant 1 - \delta$, где $\delta > 0$ (плоскость Π не может быть не параллельна Y_n, иначе $d(C, \Pi, Y) = \infty$). Это равносильно тому, что расстояние от точки $p = \Pi \cap Y_2$ до множества C не превосходит $1 - \delta$, откуда $\rho(p, \Gamma_j) \leqslant \rho(p, x_j + Y_n) \leqslant 1 - \delta$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно, точка p при каждом j лежит в той из двух полуплоскостей в $Y_2 \setminus (Y_2 \cap \Gamma_j^0)$, где лежит x_j. Но эти три полуплоскости не пересекаются именно в силу того, что треугольник T, образованный прямыми l_j, содержит внутри себя сферу $S(Y_2)$ (проверьте!).

4) $\Longrightarrow$ 0). Будем опять доказывать от противного: предположим, что X не гильбертово, возьмем те же точки $x_1, x_2, x_3 \in Y_2$ и треугольник T, что и в предыдущем пункте.

Как и в предыдущем пункте, возьмем в X какое-нибудь $(n+2)$-мерное подпространство X' (напомним, $\dim X \geqslant n+2$), содержащее Y_2, а в нем — гиперплоскости Γ_j, опорные к единичной сфере $S(X')$ в точках x_j и содержащие в себе прямые l_j, $j = 1, 2, 3$. Пересечение трех подпространств $\Gamma_j^0 \subset X'$, параллельных Γ_j, по крайней мере $(n-1)$-мерно. Возьмем в этом пересечении $(n-1)$-мерное подпространство Y_{n-1} и положим $Y = Y_2 + Y_{n-1}$. Размерность Y равна $n+1$, поскольку Y_{n-1} трансверсально Y_2.

Из включения $B \cap Y \subset T + Y_{n-1}$ вытекает неравенство $a_n(B \cap Y, X) \leqslant a_1(T, X)$ (действительно, если для какого-то непрерывного отображения F треугольника T в одномерный комплекс K_1 имеем $s = \sup_{t \in T} \|t - F(t)\|$, то для непрерывного отображения $\tilde{F} : x = t + z \mapsto F(t) + z, \quad t \in T, z \in Y_{n-1}$ пересечения $B \cap Y$ в некоторый n-мерный комплекс из суммы $K_1 + Y_{n-1}$ будет справедливо неравенство $\sup_{t \in B \cap Y} \|t - \tilde{F}(t)\| \leqslant s$).

Для получения противоречия с условием 4) осталось доказать неравенство $a_1(T, X) < 1$. Возьмем какую-нибудь точку $w \in X$ с условием $\|w - x_j\| = \rho < 1$, $j = 1, 2, 3$. Такая точка существует, поскольку $d_0(C_0, X) < 1$, и заведомо не лежит в Y_2. Обозначим через y_k вершины треугольника T — так, чтобы стороны l_i и l_j пересекались в точке y_k с $k \neq i, j$. Построим теперь отображение F треугольника T в комплекс $[w, y_1] \cup [w, y_2] \cup [w, y_3]$ следующим образом: в маленьком треугольнике $x_1 x_2 x_3 \subset T$ положим $F(x) = w$, а в каждом из трех оставшихся маленьких треугольников $x_i x_j y_k \subset T$, где i, j, k — отличные друг от друга числа из набора $\{1, 2, 3\}$, определим $F(x)$ как такую точку на отрезке $[w, y_k]$, для которой отрезок $[F(x), x]$ параллелен плоскости треугольника $w x_i x_j$. Нетрудно видеть, что отображение F непрерывно и $\|x - F(x)\| \leqslant \rho$ для любой точки $x \in T$. Отсюда следует требуемое неравенство $a_1(T, X) < 1$.

Теорема 2 полностью доказана.

Известно множество других критериев гильбертовости банахова пространства; в настоящее время их число достигает нескольких сотен и постоянно увеличивается. В связи с этим ценность каждого нового критерия невелика, да и формулировки их, как правило, весьма естественны. Одним из немногих аргументов в пользу результатов этого типа может служить, пожалуй, возможность получения из них геометрических характеристик эллипсоидов в классе всех выпуклых замкнутых центрально-симметричных поверхностей в многомерных пространствах. Так, теоремы 1 и 2 дают многомерные обобщения теорем Бляшке-Александрова и Бляшке-Какутани (см. [9], [8], [15]).

Мы, впрочем, и не стремились побудить читателя заняться изобретением новых критериев гильбертовости, а лишь хотели познакомить его с несколькими изящными фактами из геометрии и теории приближений, возникающими при доказательстве таких критериев.

Список литературы

[1] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[2] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М., 1971.

[3] *Jordan P., Neumann J. von.* On inner products in linear metric spaces // Ann. Math. (2). 1935. V. 36. P. 719-723.

[4] *Бляшке В.* Круг и шар. М., 1967.

[5] *Александров А. Д.* О выпуклых поверхностях с плоскими границами теней // Матем. сборник. 1939. Т. 5, № 2. С. 309-316.

[6] *Kakutani S.* Some characterizations of euclidian spaces // Japan. J. Math. 1939. V. 16, No 2. P. 93-97.

[7] *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М., 1959.

[8] *Бородин П. А.* Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 8. С. 63-74.

[9] *Rudin W., Smith K. T.* Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids // Indag. Math. 1961. V. 23, No 1. P. 97-103.

[10] *Phillips R. S.* A characterization of euclidian spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. V. 46, No 12. P. 930-933.

[11] *Бородин П. А.* О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C // Матем. заметки. 1998. Т. 63, вып. 6. С. 812-820.

[12] *Тихомиров В. М.* Теория приближений. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 14. ВИНИТИ, 1987. С. 103-260.

[13] *Стесин М. И.* Александровские поперечники множеств в банаховых пространствах. Канд. дисс. М.,1975.

[14] *Тихомиров В. М., Исмагилов Р. С., Бабаджанов С. Б.* Геометрия банахова пространства и поперечники множеств // Изв. АН Узбекской ССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 4. С. 25-32.

[15] *Гаркави А. Л.* О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // УМН, 1964. Т. 19, № 6. С. 139-145.

[16] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М., 1985.

[17] *Никольский С. М.* Некоторые вопросы приближений функций полиномами // Международный Математический Конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961.