Математический мир

Филдсовская медаль — воспитаннику московской математической школы

В. И. Арнольд

Во время церемонии открытия Международного Математического Конгресса, состоявшегося в Берлине с 18 по 27 августа 1998 года, были оглашены имена 4 лауреатов медали Филдса. Один из них — воспитанник Московского Университета Максим Львович Концевич (сейчас работающий в Институте Высших Научных Исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем).

Филдсовскими эти медали названы в честь канадского математика Дж. Ч. Филдса (1863 – 1962 гг.), бывшего президентом Математического Конгресса в Торонто в 1924 году. Филдс предложил использовать сэкономленные организаторами Конгресса 2 500 канадских долларов для того, чтобы во время каждого Конгресса (которые проводятся раз в четыре года) награждать двух математиков золотой медалью в знак признания их выдающихся заслуг мировым математическим сообществом. При этом заслугой считается как решение давно стоявшей проблемы, так и создание теории, пролагающей новые пути. Формулируя принципы, по которым будут отбираться лауреаты, Филдс подчеркнул, что медаль должна быть не только признанием уже достигнутого (что, конечно, играет основную роль при выборе медалистов), но и залогом будущих достижений (как самого медалиста, так и его последователей).

Хотя подобные слова о будущих успехах были и в завещании Нобеля, их трактовка нобелевским и филдсовским комитетами различна. Филдсовские медали присуждаются только молодым математикам (от старых ожидать новых достижений рискованно). Начиная с московского Конгресса 1966 года, термин «молодой математик» точно определен как «математик, которому в год присуждения исполняется не более сорока лет». М. Концевич (см. фото 1) родился 25 августа 1964 года.

Следует заметить, что используемые в разных обстоятельствах определения молодого математика сильно различаются. Например, Московское математическое общество ежегодно присуждает две чрезвычайно престижных премии молодым математикам, которым исполняется в год присуждения не более тридцати лет. Видимо, такого же принципа придерживается Европейское математическое

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 3, 1999(7–20)

Рис. 1. *М. Л. Концевич* ***Рис. 2.*** *Филдсовская медаль*

общество (премии которого Концевич был удостоен на первом Европейском Математическом Конгрессе в Париже в 1992 году).

Группа французских математиков, объединенных псевдонимом Бурбаки, считает математика молодым до пятидесяти лет (если он не кокотизирован раньше). Кокотизация[1] состоит в том, что математика, молодость которого вызывает сомнения, заставляют выслушать, в присутствии предупрежденных коллег, длиннейшее определение нового математического понятия, составленное так, что ничто, кроме нуля, этому определению не удовлетворяет. Если испытуемый вскричит: «Но ведь это нуль!» — то он спасен, если нет — кокотизирован.

Р. Курант, знаменитый немецкий (впоследствии американский) математик ввел свое определение молодого математика: математик считается молодым, если он в самой неподходящей обстановке говорит о математике. По этому определению Курант оставался молодым до самой смерти (в возрасте восьмидесяти четырех лет).

После смерти Филдса его завещание увеличило предназначенный для награждения фонд, и медаль (которую впервые присудили на Конгрессе в Осло в 1936 году) стала сопровождаться премией. Первоначально размер премии составлял 1 500 канадских долларов. Начиная с московского Конгресса 1966 г., благодаря анонимному вкладу в Филдсовский фонд, число присуждаемых на

[1] Название, видимо, происходит от древнего обычая полинезийских племен испытывать стариков, способны ли они еще приносить пользу племени: старик должен достать кокосовый орех с вершины кокосовой пальмы, которую все племя при этом трясет …

каждом Конгрессе медалей увеличено до четырех и размер премии сейчас составляет уже 15 000 канадских долларов.

Из советских математиков Филдсовской медали были удостоены С. П. Новиков (1970), Г. А. Маргулис (1978), В. Г. Дринфельд (1990), Е. И. Зельманов (1994).

Филдсовский комитет назначается Исполнительным Комитетом Международного Математического Союза, избираемым Генеральной Ассамблеей Союза раз в четыре года. До 1994 года президент Союза был и председателем Филдсовского комитета.

Филдсовская медаль изготавливается из золота (14 карат) по проекту скульптора Р. Т. Маккензи (см. фото 2). На лицевой стороне медали имеется (приписываемая Архимеду) надпись на латыни “Transire suum pectus mundoque poltri” («превзойти свою человеческую ограниченность и покорить вселенную») и изображение Архимеда, а на обороте надпись — “Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere” («математики, собравшиеся со всего света, чествуют замечательный вклад в познания»). Имя Филдса нигде не упомянуто (Филдс возражал бы и против названия медали по его имени — оно принято уже после его смерти).

Концевич является ярким представителем московской математической школы. Попытаюсь дать хотя бы некоторое представление о математических достижениях М. Концевича. Большая часть этих достижений относится к молодой области, которую можно назвать *квантовой математикой*.

Квантовая математика возникла под влиянием квантовой физики. В большинстве случаев речь идет здесь не о применениях математических результатов к исследованию физических явлений (хотя это и не исключается), а об обратном влиянии физических идей на фундаментальнейшие области математики.

Обычным признаком квантовости является присутствие в теории одного или нескольких параметров. В большинстве случаев параметр один, он обозначается буквой h (и часто называется постоянной Планка). При стремлении параметра к нулю квантовая математика вырождается в обычную. Удивительным выводом из исследований последних десятилетий является тот факт, что более или менее вся математика допускает согласованную деформацию, после которой все математические понятия приобретают совершенно новый смысл, но соотношения между ними (с соответствующими изменениями) сохраняются и в новой, продеформированной теории.

Начиная с обычных формул и производя последовательное квантование, математики пришли к массе новых формул, догадаться о которых иным путем вряд ли возможно.

Таким образом, большая часть квантовой математики является далеко идущим развитием теории возмущений. Со времен работ Р. Фейнмана стало ясно, что фундаментальным объектом всякой теории возмущений являются графы (в простейшем случае — так называемые диаграммы Фейнмана). На языке графов алгебра становится геометрией, что открывает новые возможности.

Простейшими примерами графов являются многоугольники или квадрат с его двумя диагоналями. Граф (см. рис. 3), по определению, состоит из вершин (точек) и ребер (соединяющих эти точки отрезков); число тех и других обычно конечно.

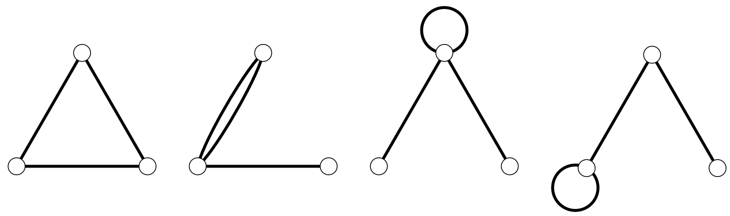

Рис. 3. *Связные графы с тремя вершинами и тремя ребрами*

Важнейшим достижением М. Концевича является введение им в математику фундаментального нового объекта — комплекса графов. Комплексами в математике называются многомерные обобщения графов. Подобно детскому конструктору, комплекс состоит не только из вершин и ребер, но включает также двумерные, трехмерные и т. д. элементы.

Математики называют *точками* (отрезками и т. д.) объекты любой природы (по словам Гильберта — «например, пивные кружки и лавки»), важны лишь соотношения между ними.

«Точками» комплекса графов Концевича являются сами всевозможные графы (с математической педантичностью можно упомянуть, что отрезки, соединяющие вершину с самой собой, здесь не допускаются, хотя в математической общей теории графов такие петли и рассматриваются).

Определение «отрезков», соединяющих такие «точки» (графы), «граней», соединяющих «отрезки», и т. д. вносит в множество всевозможных графов чрезвычайно важную (и ранее не изученную!) комбинаторную структуру — структуру комплекса Концевича, оказавшуюся очень полезной в большом числе задач, на первый взгляд не имеющих к графам и комбинаторике никакого отношения.

Перечислю лишь некоторые задачи, которые Концевичу удалось решить на этом пути. Первая задача относится к классической теории узлов. Узлы[2)] (математики обычно завязывают их на *замкнутой* веревке (см. рис. 4), рассматривая всевозможные вложения окружности в трехмерное пространство) начали систематически изучаться в середине 19-го века, но в искусстве встречались задолго до этого (см. фото 5).

Теория узлов возникла в связи с предположением Кельвина, что различия атомов определяются различиями входящих в их состав микроскопических узлов. Это был явный шаг вперед по сравнению с древней теорией Лукреция, который объяснял различия атомов тем, что математики теперь описывают как различия между тремя типами поверхностей — гладких, комбинаторных (имеющих узлы) и топологических (допускающих, по выражению Лукреция, также и заостренные крючки).

Для различения узлов, которые нельзя перевести друг в друга непрерывной деформацией без разрезания веревки, математики изобрели множество разнообразных инвариантов. Инварианты узлов — это *локально постоянные функции*

[2)] Теория узлов — тема этого номера «Математического просвещения». См. с. 56 – 126. — *Прим. ред.*

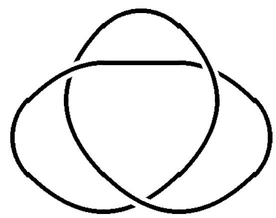

Рис. 4. *Простейший узел*

Фото 5. *Узел на саламандре — тотеме французского короля Франциска I (замок Азай ле Ридо)*

на пространстве вложений окружности в трехмерное пространство. Хотя пространство вложений и является бесконечномерным, исследование функций на нем оказывается достаточно интересной и не вполне безнадежной математической задачей.

В 1989 году московский математик В. А. Васильев выделил среди всех инвариантов узлов *инварианты конечного порядка*, занимающие в теории инвариантов узлов такое же фундаментальное место, какое занимают многочлены в обычной теории функций. Теперь эти инварианты называются *инвариантами Васильева*, и им посвящено множество глубоких работ во всем мире. Между прочим, филдсовский комитет Конгресса в Цюрихе (из которого я вышел как бывший научный руководитель своего ученика, являвшегося кандидатом на медаль) почему-то пропустил Васильева при выборе медалистов, а в 1998 году Васильеву уже было больше сорока лет.

Технические достижения Концевича позволили ему дать явное выражение для всех инвариантов Васильева в виде кратных интегралов по соответствующим конфигурационным пространствам. Эти формулы являются грандиозным обобщением электродинамической формулы Гаусса, выражающей коэффициенты зацепления (см. рис. 6) двух замкнутых кривых в трехмерном пространстве в виде двойного интеграла (коэффициент зацепления определяет (алгебраическое) число прохождений одной кривой сквозь другую при их растаскивании в удаленные части пространства).

Между прочим, в этой теории до сих пор остается открытым острейший вопрос: позволяют ли найденные инварианты различить *любые* два узла (недеформируемые друг в друга без самопересечений)?

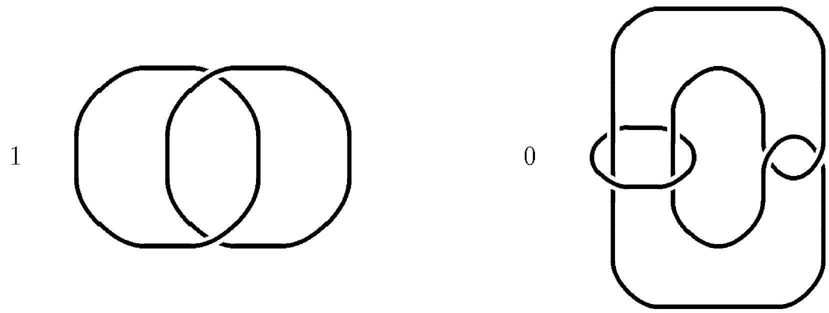

Рис. 6. *Зацепления двух кривых с коэффициентами зацепления один и нуль*

Официально научным руководителем диссертации Концевича считается работающий в Бонне Дон Загир, но сам Концевич назвал своими учителями (при награждении его премией Европейского математического общества молодым математикам на первом Европейском Математическом Конгрессе 1992 года в Париже) И. М. Гельфанда, Ю. И. Манина, В. И. Арнольда. Позже Концевич подчеркивал, как многому он научился также у более молодых московских математиков: А. Гончарова, А. Бейлинсона, В. А. Гинзбурга, Б. Фейгина, М. Капранова и у многих других.

Однажды в Математическом Институте Макса Планка в Бонне директор Института, профессор Ф. Хирцебрух (иностранный член РАН и один из самых знаменитых математиков нашего времени), спросил меня: почему это Концевич до сих пор не защитил диссертации? Давайте завтра устроим защиту — Загир, я и Вы составим жюри, все мы хорошо знаем его замечательные работы и напишем отзывы. Но через два дня после защиты Максим говорит: знаете, а работа-то об узлах была неверная! Только что из Гарварда пришел контрпример Бар Натана, он прав — моя интегральная формула для инвариантов Васильева не может быть верной! Исправление ошибки заняло еще несколько дней; исправленная формула верна, доказывается почти так же, как и исходная неверная (которая просто решает немного другую задачу). В условиях Бонна все эти волнения не имели никакого практического значения для оценки работ Концевича: всем было ясно, что они замечательны и что было бы нелепо требовать от него тратить время на оформление диссертации и нудные бюрократические процедуры.

Я всегда вспоминаю эту защиту, когда сталкиваюсь с нашими московскими порядками. Теперь, когда все московские зарплаты стали неразличимыми бесконечно малыми, многие талантливейшие молодые математики предпочитают не тратить время на бюрократические процедуры оформления и защиты диссертаций и остаются неостепененными; высвободившееся время они используют для новых открытий. Именно к этой категории молодых московских математиков относится и Максим Концевич.

Поразительно, что идеи одного происхождения позволяют математикам решать совершенно не сходные между собой на вид задачи.

Построенная Концевичем теория позволила ему дать явные интегральные формулы не только для инвариантов Васильева узлов, но и для квантования

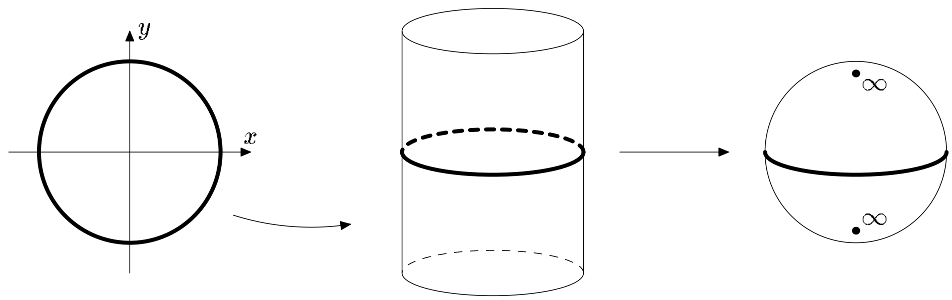

Рис. 7. *Вещественная и комплексная окружность*

скобок Пуассона. Члены рядов, выражающих такое квантование, нумеруются графами. Коэффициент, с которым в ряд входит данный член, выражается интегралом по конфигурационному пространству, составленному из вложений множества вершин графа в плоскость Лобачевского. Подинтегральное выражение, которое нужно интегрировать, поразительно похоже на подинтегральное выражение, доставляющее инварианты Васильева узлов, и интегрировать в обоих случаях приходится по конфигурационному пространству.

Задача о нахождении квантования скобок Пуассона (т. е. классической механики) — одна из старейших задач квантовой математики, которая возникла — в слегка другой формулировке — вместе с квантовой механикой (т. е. уж никак не позже тридцатых годов). При этом до работы Концевича не только не были известны найденные им явные формулы универсального квантования, но подвергалось сомнению и само его существование.

Быть может, наиболее яркие достижения современной математики связаны с идеями квантовой теории поля, пронизывающими столь разные области науки, как теория чисел, теория четырехмерных многообразий, алгебраическая геометрия и симплектическая топология (т. е. топология фазовых пространств классической механики).

Концевичу принадлежат и здесь фундаментальные результаты, позволившие решить трудные задачи. Уже в своей диссертации он доказал поразительную гипотезу американского физика Э. Виттена, связавшую топологические характеристики пространств модулей алгебраических кривых с отмеченными точками со знаменитым уравнением Кортевега – де Фриза теории мелкой воды.

Алгебраические кривые — это кривые, задаваемые алгебраическими уравнениями, вроде окружности, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 = c$ (рис. 7). Комплексные векторы, удовлетворяющие подобному уравнению, образуют в плоскости двух комплексных переменных (x, y) (т. е. в вещественно четырехмерном пространстве) вещественно двумерную *риманову поверхность*. Например, «комплексная окружность», определенная тем же уравнением, что и вещественная, но с комплексными x и y, представляет собой с топологической точки зрения цилиндр. Добавляя две «бесконечно-удаленные» точки, математики получают риманову поверхность окружности, топологически эквивалентную обычной сфере.

Более сложные уравнения приводят к более сложным поверхностям. Например, уравнение третьей степени $y^2 = x^3 + ax + b$ приводит к поверхности тора —

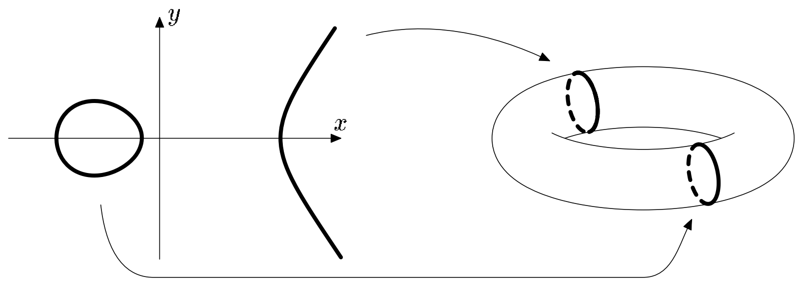

Рис. 8. *Вещественная и комплексная эллиптическая кривая*

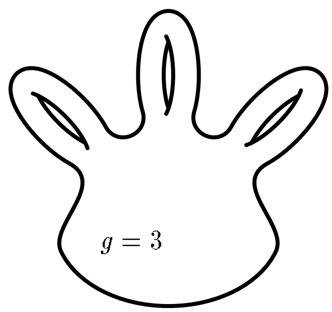

Рис. 9. *Поверхность рода три (сфера с тремя ручками)*

так называемой *эллиптической кривой*, геометрия которой играет решающую роль в недавнем решении знаменитой проблемы Ферма, данном английским математиком А. Уайлсом (рис. 8).

При изменении коэффициентов уравнения кривая может вырождаться. Например, тор, заданный приведенным выше уравнением третьей степени, вырождается в сферу при $4a^3 - 27b^2 = 0$ (когда многочлен в правой части уравнения имеет кратные корни).

Все комплексные кривые (вещественные поверхности) с топологией сферы одинаковы (переводятся друг в друга взимнооднозначными комплексно-гладкими отображениями). Но торов (а также и более сложных кривых рода g, получаемых из сферы приклеиванием g ручек; для тора $g = 1$) много (рис. 9). Все кривые рода g топологически одинаковы, но они различаются комплексными структурами: одну можно отобразить гладко на другую в смысле вещественной геометрии, но, вообще говоря, не в смысле комплексной.

Пространство существенно различных кривых рода g имеет вещественную размерность $6g - 6$ при $g > 1$ и 2 при $g = 1$. Это пространство имеет естественную комплексную структуру, и его комплексная размерность равна $3g - 3$ при $g > 1$ и 1 при $g = 1$, 0 при $g = 0$.

Пространство классов эквивалентных кривых называется *пространством модулей* кривых. Это пространство не компактно: при изменении кривой она может вырождаться (в этот момент род g уменьшается, например, тор может выродиться в сферу). Концевичу принадлежит важнейшее понятие стабильного

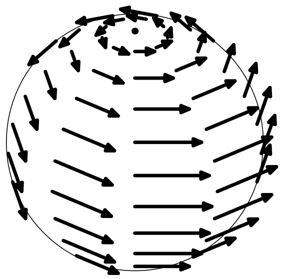

Рис. 10. *Векторное поле с двумя особыми точками на сфере*

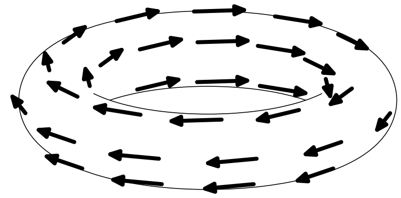

Рис. 11. *Векторное поле без особых точек на торе*

отображения комплексной кривой с отмеченными точками в комплексное пространство, позволившее правильно компактифицировать пространство отображений (путем добавления «бесконечно-удаленных» вырожденных кривых) и затем применить к полученному компактному (хотя и не совсем гладкому) комплексному многообразию могучие методы современной топологии.

Простейший пример здесь — пространство сфер с четырьмя (упорядоченными) отмеченными точками. Это пространство естественно отождествляется со сферой без трех точек (которыми можно считать 0,1 и ∞ на сфере Римана). Действительно, первые три точки можно поместить в 0,1 и ∞ соответственно при помощи подходящего дробно-линейного преобразования сферы Римана (переводящего комплексное число z в $(az+b)/(cz+d)$). Четвертая точка определяет тогда класс сферы с отмеченными точками. При компактификации сферы без трех точек получается просто обычная сфера.

В классической топологии гладкие многообразия классифицируются при помощи их инвариантов — характеристических чисел. Простейшим инвариантом является число Эйлера (или эйлерова характеристика), измеряющая препятствия к одновременной нигде не исчезающей деформации многообразия. Деформация задается векторным полем на многообразии (рис. 10), сопоставляющим каждой точке скорость ее движения. При попытке построить ненулевое поле на сфере (или на любой поверхности рода бо́льшего единицы) мы обнаруживаем, что поле без особых точек построить не удается. Более того, алгебраическое (считаемое со знаками) число особых точек оказывается не зависящим от поля, но зависящим лишь от многообразия. Например, на поверхности сферы с g ручками это число равно $2 - 2g$. Для тора ($g = 1$) это число равно нулю. И действительно, тор можно сдвигать по себе без неподвижных точек (рис. 11). На сфере число особых точек любого поля (считаемых со знаками) равно двум. Поле ровно с двумя особыми точками изображено на рис. 10.

Число особых точек поля (считаемых со знаками) называется характеристическим именно потому, что оно не зависит от поля и является характеристикой многообразия. Кроме эйлеровой характеристики, имеются и другие характеристические числа. Они определяются более или менее таким же способом (грубо говоря, полей берется несколько и особые точки определяются несколько иначе).

В описанном выше простейшем случае многообразия модулей сфер с четырьмя отмеченными точками единственным характеристическим числом является эйлерова характеристика (равная двум), единственным полем — касательное сфере поле, характеризующее скорость движения четвертой точки (при всевозможных ее положениях).

Если вместо четырех точек взять больше или вместо сферы взять поверхность бо́льшего рода, то возникнет много характеристических чисел, обобщающих эйлерову характеристику сферы. Для описания всех этих чисел Виттен предложил построить по ним функцию, используя их в качестве коэффициентов степенного ряда (после подходящей нормировки). Между частными производными полученной функции было экспериментально обнаружено странное соотношение

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx}.$$

Это соотношение было за сто лет до того обнаружено Д. Кортевегом и Г. де Фризом в совершенно другой теории — в теории распространения волн на мелководье. Одно из поразительных открытий математики последних десятилетий (у истоков которого стоят попытки Э. Ферми использовать компьютер для моделирования и проверки гипотез статистической физики) состоит в универсальности этого «вполне интегрируемого» уравнения математической физики. Открытие неожиданных связей между разнородными математическими теориями играет в математике такую же роль, как, например, открытие сходства между восточным берегом Америки и западным берегом Африки (приведшее к современной глобальной тектонике плит[3)]).

В случае связи между характеристическими числами пространств модулей кривых с отмеченными точками и дифференциальным уравнением теории мелководья, роль глобальной тектоники играет квантовая гравитация. Однако физик Виттен (кстати, тоже удостоенный математиками Филдсовской медали) не доказал существование этой связи, а лишь подметил ее (что, конечно, тоже очень важно и в случае геологии соответствует вкладу Вегенера).

Доказательство гипотезы Виттена (потребовавшее построения большой новой математической теории) — заслуга М. Концевича.

Достижения Концевича существеннейшим образом использовались в ряде недавних работ, посвященных решению еще нескольких важнейших задач из разных областей современной математики. Одной из таких задач явилось доказательство гипотезы «зеркальной симметрии», выдвинутой физиками. Эта гипотеза устанавливает удивительную связь двух совершенно различных (и на первый, и на второй взгляд) областей математики. Одна из областей — это симплектическая геометрия, т. е. классическая механика гамильтоновых консервативных систем (без диссипации энергии). Другая область — теория комплексных многообразий (многомерных обобщений римановых поверхностей, о которых шла речь выше).

Явление зеркальной симметрии состоит в том, что симплектическая геометрия одного многообразия оказывается связанной с комплексной геометрией другого. Симплектическая геометрия этого второго многообразия оказывается при этом связанной таким же образом с комплексной геометрией исходного.

[3)]Истоком которой послужила теория дрейфа материков немецкого геофизика Вегенера (1880 – 1930), создавшего ее в 1912 г.

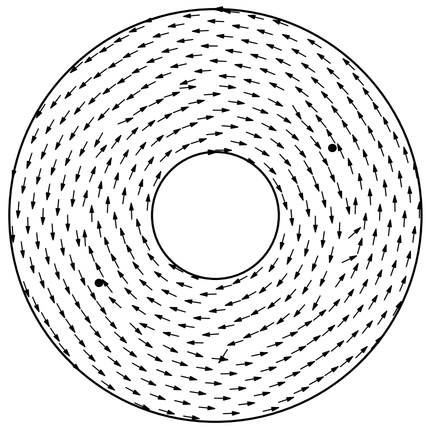

Рис. 12. *Неподвижные точки симплектического отображения кольца в себя*

Математическая теория этого явления создана другим воспитанником московской математической школы, А. Б. Гивенталем (которому я бы тоже присудил Филдсовскую медаль), ныне работающим в Беркли. Он использовал, среди прочего, достижения Концевича.

Другой сенсацией последнего года явилось доказательство (несколькими группами математиков, работающих в разных странах) старых (1965) гипотез о неподвижных точках симплектоморфизмов, т. е. о периодических движениях в соответствующих гамильтоновых системах (например, в небесной механике или в теории ускорителей). Теория стабильных отображений кривых, построенная Концевичем ради доказательства гипотезы Виттена, оказалась полезнейшим техническим средством при исследовании этого вопроса симплектической топологии.

Тот факт, что комплексная геометрия доставляет полезный инструмент исследования вопросов симплектической топологии, был впервые обнаружен ленинградским математиком М. Л. Громовым, ныне работающим во Франции. То, что он — не филдсовский лауреат, всегда меня удивляло. Думаю, что это объясняется причинами не научного характера (сыграло роль, что Россия не поддержала российского математика Громова; филдсовский комитет всегда был очень политизирован, как это и описано в недавно опубликованных мемуарах члена этого комитета, известного антисемита и замечательного математика Л. С. Понтрягина).

Простейший пример теоремы о неподвижных точках в симплектической топологии был указан еще Пуанкаре (в его посмертной «последней геометрической теореме»): если круговое кольцо отображено на себя так, что граничные окружности поворачиваются в разные стороны, а площади областей сохраняются, то такое отображение имеет не менее двух неподвижных точек (рис. 12).

Небольшое размышление показывает, что этот факт вытекает из следующей более общей теоремы: сохраняющее площади отображение тора в себя имеет не менее трех неподвижных точек, если оно не сдвигает с места «центр тяжести» тора. При этом число неподвижных точек даже не меньше четырех, если

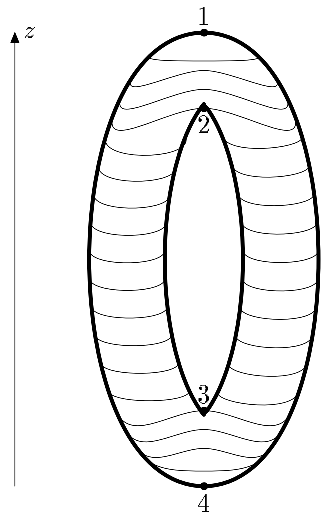

Рис. 13. *Функция высоты на торе и ее четыре критические точки*

учитывать вырожденные точки (в которых сливается несколько неподвижных точек) с их кратностями. Числа 3 и 4 здесь — это наименьшие числа критических точек (считая и максимумы, и минимумы, и седла и т. п.) гладкой функции на торе (их не меньше четырех, если считать с кратностями, и не менее трех из них геометрически различны).

Наука о критических точках гладких функций называется *теорией Морса – Люстерника – Шнирельмана* по имени американского (М. Морс) и российских (Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман) математиков, получивших оценки снизу для чисел критических точек любой функции (на поверхности или на многообразии бо́льшего числа измерений) через топологические инварианты — так называемые числа Э. Бетти в случае теории Морса. Например, сумма чисел Бетти тора равна четырем, поэтому функция на торе имеет не менее четырех (учитывая кратности) критических точек (рис. 13).

Гипотезы симплектической топологии, о которых шла речь, утверждают, что точно такие же оценки снизу, как для числа критических точек гладких функций, справедливы и для неподвижных точек симплектоморфизмов фазовых пространств, определяемых системами гамильтоновых дифференциальных уравнений классической механики. Эти неподвижные точки или замкнутые орбиты оказываются критическими точками соответствующей «функции» на *бесконечномерном* многообразии. Стабильные отображения Концевича (вместе с теорией Громова и его последователей) открывают замечательную возможность распространения теории Морса на бесконечномерный случай в ситуации, где (как и в квантовой теории поля, для нужд которой эти стабильные отображения были изобретены) обычная техника вариационного исчисления и функционального анализа не работает.

Еще три недавние работы Концевича также доставляют неожиданные связи между совсем разными областями математики. Перекладывания отрезков —

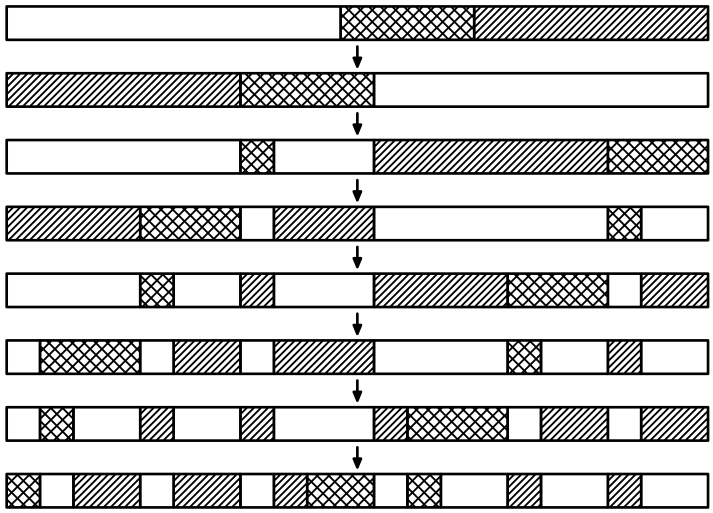

Рис. 14. *Перекладывание трех отрезков*

классический пример в теории динамических систем, перемешивания и «хаоса». Разобъем отрезок на несколько частей, переставим их в каком-либо порядке и снова склеим в отрезок. Повторяя эту процедуру много раз, мы заставим каждую точку отрезка блуждать по нему более или менее хаотическим образом (рис. 14).

Московский математик А. В. Зорич (сейчас работающий в Ренне, в Бретани) обнаружил в компьютерных экспериментах поразительные асимптотические статистические свойства этого перемешивания. Эти свойства оказались универсальными в том смысле, что асимптотическое поведение отклонений от средних оказалось не зависящим от длин отрезков разбиения (при почти любом их выборе), хотя и сильно зависящим от вида перестановки частей исходного отрезка и от числа разрезаний.

Анализируя вместе с Зоричем эти асимптотики, Концевич обнаружил, что они теснейшим образом связаны с геометрией $(6g-6)$-мерных пространств модулей римановых поверхностей подходящего рода g, о которых говорилось выше. Эта связь совершенно поразительна, даже если учесть, что перекладывания были введены (в 1963 г.) именно в качестве модели для исследования эргодических свойств псевдопериодических динамических систем, заданных гамильтоновыми векторными полями на римановых поверхностях рода g, большего единицы. Это была одна из исходных задач псевдопериодической топологии — молодой области науки, значение которой для теории поверхностей Э. Ферми в физике твердого тела было впоследствии обнаружено в замечательных работах учителя А. В. Зорича, московского математика С. П. Новикова, филдсовского медалиста 1970 г.

Столь же поразительна недавно открытая М. Концевичем (вместе с московским математиком Ю. М. Суховым, ныне работающим в Кембридже) универсальность статистических свойств многомерных цепных дробей.

Цепной дробью называется выражение вида $a + 1/\big(b + 1/(c + \ldots)\big)$. Вопрос о статистических свойствах целых чисел $(a, b, c, \ldots)$, входящих в разложение в цепную дробь случайного числа, был решен К. Ф. Гауссом и Р. О. Кузьминым. До этого вопрос обсуждался шведским астрономом Х. Гильденом и шведскими математиками А. Виманом и Т. Броденом. Важность этого вопроса объясняется тем, что статистика разложений случайных чисел в цепные дроби сказывается в небесной механике на резонансах между движениями планет и астероидов, будучи существенной для установления устойчивости как планетных систем, так и пучков частиц в ускорителях и даже плазмы в токамаках, управляя заодно и потоками космических частиц, ответственных за полярные сияния.

Концевич с Суховым объяснили, как аналогичные теории Гаусса – Кузьмина вопросы об универсальной статистике для многомерных цепных дробей связаны с геометрией пространств модулей решеток в евклидовом пространстве (изучавшейся, между прочим, другим московским лауреатом медали Филдса, Г. А. Маргулисом, ныне работающим в Йельском университете в США). Поразительно, что, в отличие от Гаусса, авторы доказывают *существование* универсальной статистики, вовсе ее не находя. Вопрос о явном вычислении статистики Концевича – Сухова (либо с помощью суммирования соответствующих рядов по полилогарифмам, либо хотя бы прямым компьютерным моделированием соответствующих задач целочисленного линейного программирования, к которому по существу относится теория многомерных цепных дробей) остается пока открытым и ждет энергичных исследователей.

Упомяну в заключение совместную работу Концевича с московским математиком С. А. Баранниковым (ныне работающим во Франции) о геометрии каустик и волновых фронтов задач геометрической оптики, вариационного исчисления и теории оптимального управления. Эта работа объяснила загадочные связи этой области математики с теорией фробениусовых структур (развитой московским математиком Б. А. Дубровиным, ныне работающим в Триесте), выросшей, опять-таки, из квантовой теории гравитации.

Французы обычно сразу же выбирают своих филдсовских лауреатов в Академию наук. Пример М. Концевича показывает, что московская математическая школа продолжает активнейшим образом работать, причем вокруг таких лидеров, как Концевич, собираются, несмотря на географическую разобщенность, большие и сильные коллективы. Жаль только, что полученные ими замечательные достижения (которые я попытался хотя бы отчасти описать выше) у нас мало известны, а Концевич даже не был избран в РАН.