Студенческие чтения

О некоторых задачах псевдопериодической топологии

Академик РАН В. И. Арнольд

Лекция, прочитанная студентам Математического Колледжа Независимого Московского Университета 14 апреля 1992 г.

Один из моих учителей в математике, Иван Георгиевич Петровский, говорил: «Всем, что я сделал в математике, я обязан не столько тому, что я что-то знал, сколько тому, что я чего-то не знал». И добавлял: «Важнейшей информацией о проблеме является то, что она не решена». В этой лекции я постараюсь рассказать о некоторых нерешенных задачах «псевдопериодической топологии». Псевдопериодическая топология связана с квазикристаллами, поверхностями Ферми физики твердого тела, хаосом в теории динамических систем и с теорией чисел. Чем занимается псевдопериодическая топология, я постараюсь сейчас объяснить.

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Под *периодичностью* некоторого объекта (свойства) будем понимать его инвариантность относительно сдвигов на векторы из $\mathbb{Z}^n$.

Например, линейная функция $ax + by$ не периодична на плоскости, но картина ее линий уровня $ax + by = c = \mathrm{const}$ периодична (см. рис. 1). Если a/b — рациональное число, то картина очень проста: разнесенная сдвигами прямая проходит через узлы решетки (рис. 2). Если a/b иррационально, картина устроена сложнее; в любом случае будем считать ее стандартной.

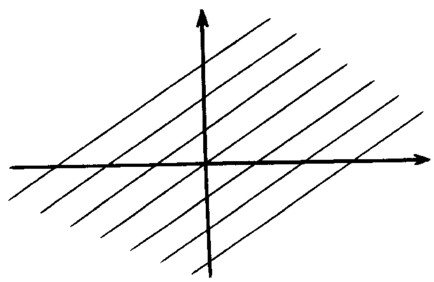

Рис. 1. *Периодичность системы линий уровня линейной функции.*

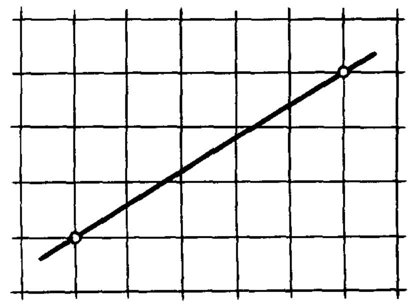

Рис. 2. *Резонансная линия уровня.*

Упражнение 1. *Выявите связь картины линий уровня линейной функции с разложением a/b в цепную дробь.*

Рассмотрим n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (факторпространство). В случае плоскости факторизация означает, что мы вырезаем единичный квадратик и склеиваем его противоположные стороны (рис. 3).

При этом прямая на плоскости превратится в *обмотку тора.* Если a/b иррационально, то эта обмотка является всюду плотной на торе. В трехмерном (аналогично в n-мерном) случае условием всюду плотного заполнения тора поверхностью уровня линейной функции является отсутствие резонанса. *Резонансом* называется такая ненулевая тройка целых чисел k, l, m, что $ak + bl + cm = 0$; здесь a, b, c — коэффициенты линейной функции $ax + by + cz$.

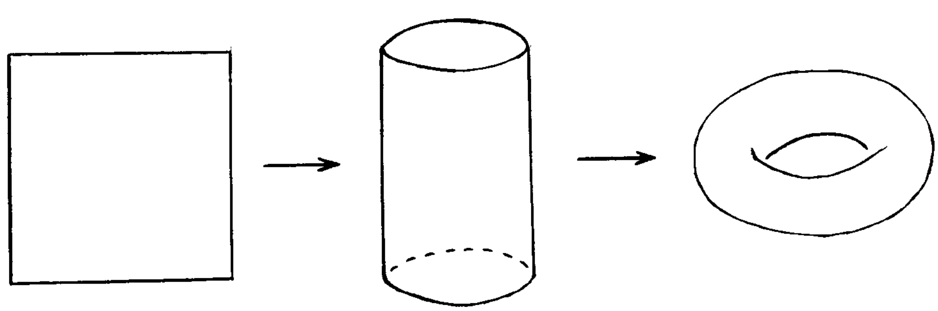

Рис. 3. *Тор как фактор плоскости по решетке.*

Определение. *Функция называется* псевдопериодической, *если она есть сумма нерезонансной линейной и периодической (с равными единице периодами по всем переменным) функций.*

Например, в одномерном случае псевдопериодической является функция $ax + b \cdot \sin 2\pi x$. В случае двух переменных псевдопериодической будет функция $ax + by + f(x, y)$, где

$$f(x + k, y + l) = f(x, y) \quad \forall\, (k, l) \in \mathbb{Z}^2.$$

Поскольку при целочисленных сдвигах линии уровня псевдопериодических функций переходят снова в линии уровня, эти семейства линий можно рассматривать на торе. Всегда ли при проектировании линии уровня на тор будет получаться гладкая кривая?

Чтобы свободно ориентироваться в подобных вопросах, надо превратить функции в привычную реальность! Например, представляйте себе функцию двух переменных как горную страну. Тогда вы увидите, что линии уровня высоты вовсе не обязаны быть гладкими (рис. 4).

Задача. *В том месте, где река вытекает из озера, его берега обычно образуют угол меньше развернутого (Нева, Свирь, Ангара). В месте впадения это не так. Почему?*

Особые точки возникают в тех местах, где касательная плоскость горизонтальна, т. е. $f'_x = f'_y = 0$. Периодическая добавка f к линейной функции $ax + by$ вполне может сделать касательную плоскость горизонтальной: там, где $a + f'_x = b + f'_y = 0$.

Итак, линии на торе могут оказаться как гладкими (пример: $f = 0$), так и с особенностями (рис. 5).

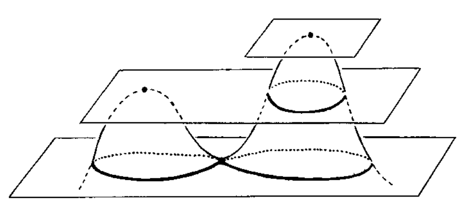

Рис. 4. *Особые и неособые линии уровня высоты.*

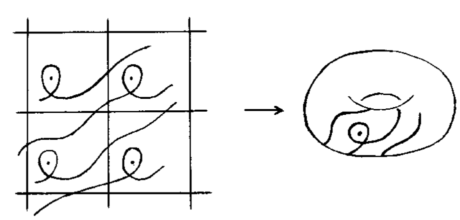

Рис. 5. *Псевдопериодические кривые на плоскости и их проекции на тор.*

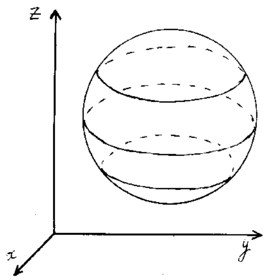

Рис. 6. *Стандартная функция высоты на сфере.*

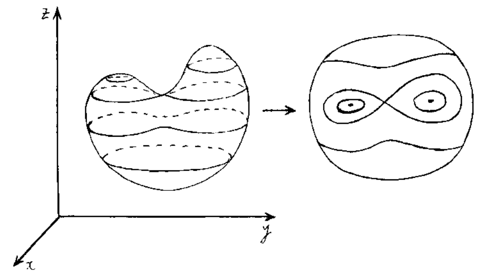

Рис. 7. *Функция высоты на продеформированной сфере.*

В многомерном случае речь идет о соответствующих поверхностях, линиях их особенностей и т. п.

Эта ситуация поставляет многочисленные нерешенные задачи.

Рассмотрим гладкую функцию на сфере. Простейшим примером такой функции является функция z высоты; на рис. 6 изображены ее линии уровня.

Произвольную гладкую функцию тоже можно интерпретировать как высоту на предварительно продеформированной сфере. Проделав обратную деформацию, получим на сфере картину линий уровня (рис. 7).

Займемся множеством *компонент связности* линий уровня. В случае функции z на сфере оно параметризуется значением функции, и *пространство компонент* представляет собой отрезок (рис. 8). Для примера, изображенного на рис. 7, пространство компонент представляет собой букву «Y» (рис. 9).

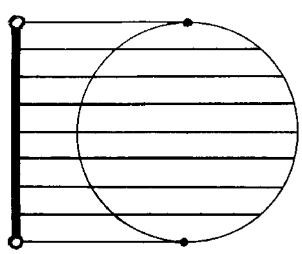

Рис. 8. *Пространство компонент линий уровня стандартной функции*

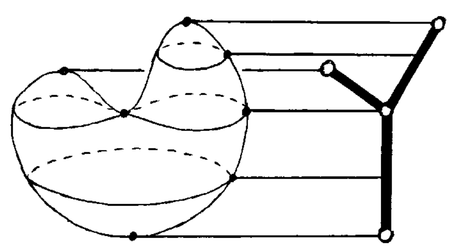

Рис. 9. *Дерево компонент множеств уровня функции высоты.*

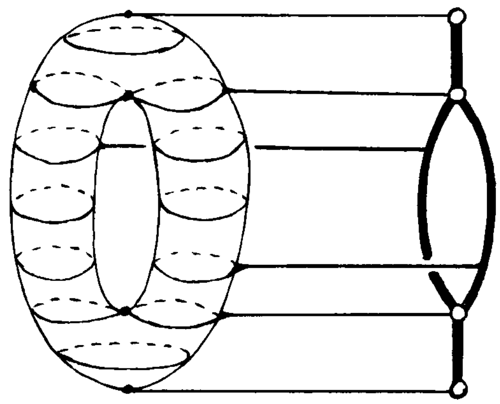

Рис. 10. *Пространство компонент линий уровня функции высоты на торе.*

Теорема. *Пространство компонент гладкой функции общего положения на сфере является конечным деревом; любое конечное дерево реализуется подходящим многочленом.*

Упражнение 2. *Дайте определение конечного дерева. Докажите, что число его вершин на 1 больше числа ребер.*

Замечание. Под функцией общего положения понимается функция из подходящего открытого всюду плотного множества в пространстве функций. Такую функцию в окрестности каждой критической точки подходящей заменой координат можно привести к виду $\pm(x^2+y^2)$ или xy.

Следствие (формула Эйлера). *Для гладкой функции на сфере*

$$(\textit{число максимумов}) + (\textit{число минимумов}) - (\textit{число седел}) = 2.$$

Теперь рассмотрим гладкие функции на торе. Для функции высоты пространство компонент изображено на рис. 10. Пристраивая к этому циклу деревья, получим пространства компонент для более сложных функций.

Теорема. *Для любой гладкой функции общего положения на торе пространство компонент состоит из одного цикла с присоединенными деревьями.*

При попытке доказать эти теоремы наибольшую неприятность доставляют «кратеры» (рис. 11). На рисунке изображены вид графика функции, линии уровня (черточка показывает направление минус-градиента,

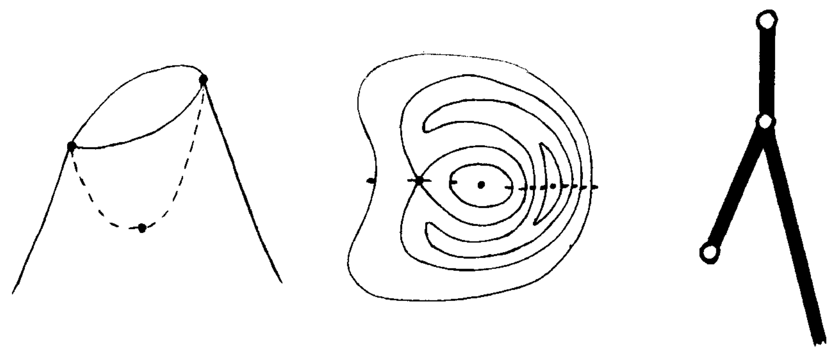

Рис. 11. *Линии уровня и пространство компонент вблизи кратера.*

т. е. быстрейшего убывания функции; в картографии ее называют «берг-штрих»), а также соответствующая часть пространства компонент.

Становится ясным ход обобщений. Для «кренделя» (рис. 12) пространство компонент содержит два цикла, …, для поверхности рода n («сфера с n ручками» или «крендель с n дырками») — n циклов.

До сих пор мы занимались случаем периодических функций ($a = b = 0$). Если же функция на плоскости по-настоящему псевдопериодическая (один из коэффициентов линейной части не 0), то она уже не определена на торе. Однако, на торе появляется перенесенная с плоскости система линий уровня функции $g(x, y) = ax + by + f(x, y)$, где f — периодическая. Если $f = 0$, то уравнение $g = \text{const}$ задает на плоскости систему прямых, если $f \neq 0$, но достаточно мала (малое возмущение), то эта система линий уровня не имеет особенностей.

Задача. *Пусть* $|f'_x| < a$, $|f'_y| < b$. *Докажите, что в этом случае система линий* $g = \text{const}$ *на торе выпрямляема, т. е. существует гладкая*

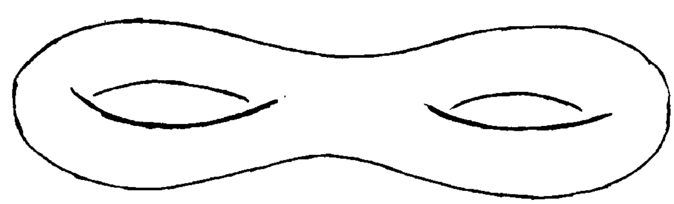

Рис. 12. *Крендель (сфера с двумя ручками).*

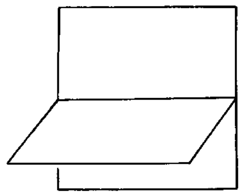

Рис. 13. *Невозмущенная береговая линия.*

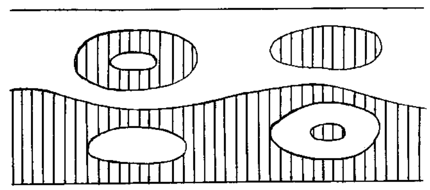

Рис. 14. *Возмущенная псевдопериодическая береговая линия.*

периодическая замена переменных, переводящая систему линий $g = \mathrm{const}$ *на торе в систему параллельных прямых.*

Решение этой задачи имеется, например, в [2].

Гораздо интересней случай большого возмущения. Рассмотрим множество $M_c = \{(x, y) : ax + by + f(x, y) < c\}$. Его легко себе представить наглядно. Горную страну — график функции g — затопим водой до уровня c. Получим воду, сушу и береговую линию.

Например, если $f = 0$, то береговой линией будет прямая (рис. 13), в общем случае картина может быть сложной (рис. 14).

Например, на суше могут быть озера, на озерах — острова, в море — острова, на островах — озера и т. п. Если c — неособый уровень, то имеется конечной ширины полоса возмущения, вне которой с одной стороны — только суша, а с другой — только вода. Интересно изучить геометрию этой полосы. Заранее не ясно, может ли в море быть приходящая из бесконечности «коса», или на суше — приходящий из бесконечности «канал»? Формально говоря, существуют ли отличные от океана неограниченные компоненты множества M_c?

Задача. *Пусть $a/b \notin \mathbb{Q}$, функция f — достаточно гладкая. Тогда неограниченная компонента множества M_c ровно одна.*

Задача. *Верно ли это для непрерывной f?*

(Ответ: неверно.)

Упражнение 3. *Пусть $a/b \in \mathbb{Q}$. Постройте пример, когда неограниченных компонент больше одной.*

В случае гладких функций n переменных неограниченных компонент тоже не более одной (см. [3]).

Вот еще несколько задач псевдопериодической топологии плоских кривых.

Задача. *Пусть f — гладкая периодическая функция трех переменных с периодом 1 по каждому из них. Рассмотрим неособую кривую*

$$f(x, y, ax + by) = 0$$

на плоскости с координатами (x, y) ($a, b, 1$ несоизмеримы, так что $pa+$ $+qb + r \neq 0$ при целых $p, q, r \neq 0$). Верно ли, что каждая ее компонента связности лежит в полосе, ограниченной двумя параллельными прямыми (гипотеза С. П. Новикова) [4][1]?

Задача. *Рассмотрим пять векторов v_i, ведущих из центра в вершины правильного пятиугольника на плоскости. Составим функцию на плоскости*

$$H(z) = \sum_{i=1}^{5} \cos\langle v_i, z\rangle$$

(где скобки означают скалярное произведение) — сумму пяти плоских волн с нормалями v_i. Верно ли, что все связные компоненты ее линий уровня ограничены? Существует ли сколь угодно большая компонента, охватывающая нуль?

Рассмотрим теперь псевдопериодические кривые в трехмерном пространстве, а именно, линии уровня пары псевдопериодических функций

$$\begin{cases} ax + by + cz + f(x, y, z), \\ px + qy + rz + g(x, y, z), \end{cases}$$

где f, g — периодические функции периода 1 по каждой переменной. При отсутствии возмущений ($f = g = 0$) эти линии — прямые, как линии пересечения плоскостей уровня каждой линейной функции по отдельности. Если коэффициенты линейных функций несоизмеримы, то проекция каждой такой прямой на трехмерный тор всюду плотна на нем.

Если возмущения присутствуют, то все компоненты кривой уровня лежат в пределах конечного расстояния от указанной прямой, так как для каждой отдельной функции ее график отклоняется на ограниченное расстояние от невозмущенной плоскости.

Проблема. *Сколько неограниченных компонент может иметь эта кривая?*

[1] В 1993 г. И.Дынников доказал эту гипотезу для почти всех a, b, однако для некоторых исключительных a/b она неверна (М. Дынников, Г. Царев).

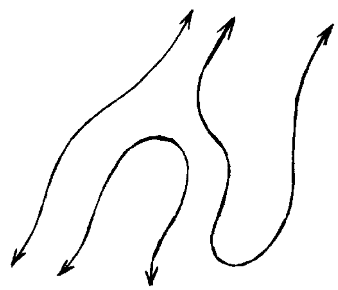

Рис. 15. *Неограниченные линии уровня пары псевдопериодических функций.*

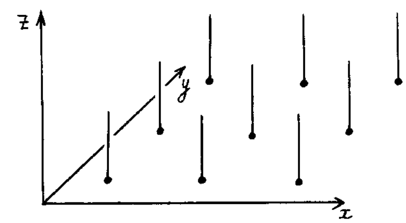

Рис. 16. *Невозмущенное отображение пространства на плоскость и его слои.*

Гипотеза. Одну.

Доказано [7], что неограниченных компонент нечетное число[2)].

Если функции f, g аналитические (т. е. разлагаются в окрестности каждой точки в сходящийся ряд Тейлора), то любая неограниченная компонента либо замкнута, либо уходит обоими концами в бесконечность (рис. 15). Для бесконечно гладких f, g это не всегда так (почему?).

Пример. Если $f = 0$, то можно свести вопрос к случаю меньшей размерности. Из условия $ax + by + cz =$ const выразим z: $z = \alpha x + \beta y$ и подставим во вторую функцию, получим

$$\tilde{p}x + \tilde{q}y + g(x, y, \alpha x + \beta y) = 0,$$

где функция g периодическая по трем переменным. Это уравнение можно записать в виде

$$\tilde{p}x + \tilde{q}y + \tilde{g}(x, y) = 0.$$

Правда, функция $\tilde{g}$ уже не будет периодической, но она будет *почти периодической.*

Задача. *Сколько неограниченных компонент может иметь кривая на плоскости (x, y), заданная этим уравнением? Может ли их число быть больше 1?*

[2)] Д. Пановым (см. [8]) показано, что количество компонент может быть сколь угодно велико.

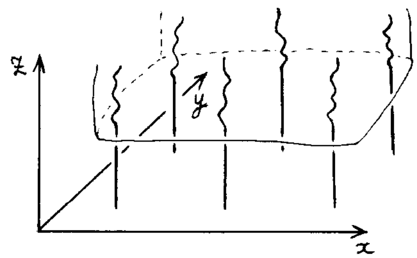

Рис. 17. *Слои возмущенного отображения.*

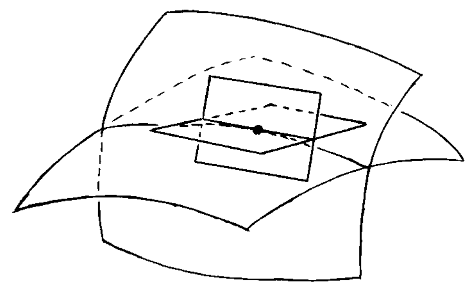

Рис. 18. *Построение касательной к слою.*

Этот вопрос открыт[3)] даже для случая, когда g — тригонометрический многочлен (есть гипотеза, что число компонент не более 1). Но контрпримеры неизвестны и в случае, когда g — периодическая непрерывная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь отображение проектирования:

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: \ (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

$\mathbb{R}^3$ расслаивается на вертикальные прямые — прообразы точек; можно считать, что прямые параметризованы точками плоскости $\mathbb{R}^2$ (рис. 16). Теперь локально возмутим наше проектирование, т. е. рассмотрим отображение

$$\begin{cases} u = x + f(x, y, z), \\ v = y + g(x, y, z), \end{cases}$$

где f, g — гладкие финитные (т. е. отличные от 0 лишь в ограниченной области) функции. Прообразами точек теперь станут кривые, совпадающие с исходными прямыми вне ограниченной области (рис. 17).

Эти кривые могут иметь особенности. Действительно, каждая кривая получается как пересечение поверхностей уровня каждой функции по отдельности. Линия их пересечения гладкая в тех точках, где имеется касательная. А касательная наверняка определена там, где касательные плоскости к поверхностям различны: прямая пересечения этих плоскостей и есть касательная к нашей кривой (рис. 18). Там же, где касательные плоскости совпадают, могут появиться особенности кривой.

[3)]После того, как эта лекция была прочитана, этот вопрос был решен И. Дынниковым: компонента всегда одна. Однако общая проблема, в которой и f, и g не равны 0, остается открытой.

Пример. Нулевая линия уровня поверхности $z = xy$ имеет особенность (рис. 19).

Алгебраически условие несовпадения касательных плоскостей есть условие, что ранг некоторой матрицы из частных производных (сообразите, какой) равен двум.

Теорема. *Для пары функций f, g общего положения множество особых точек слоев (где касательные плоскости поверхностей $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ совпадают) является гладкой кривой.*

Далее, особые точки могут быть *эллиптическими*, как в случае модельного отображения $u = z$, $v = z + x^2 + y^2$, и *гиперболическими*, как в случае $u = z$, $v = z + x^2 - y^2$. Вид слоев в окрестности эллиптической и гиперболической точки показан на рис. 20, 21 соответственно.

Вдоль линии особых точек их характер может меняться (рис. 22).

Пример. Для отображения $u = z$, $v = z + x - zx + y$ с течением «времени» происходят перестройки (рис. 23).

В описанной ситуации возникают интересные проблемы:

- ▷ Найти пространство компонент (в невозмущенном случае это плоскость, в общем — некоторый двумерный комплекс; надо его описать).
- ▷ Как влияет топология многообразия-прообраза ($\mathbb{R}^3$ в нашем случае) на этот комплекс?

Пример. Для отображения $u = z$, $v = z + x^3 + (z^2 - 1)x + y^2$ комплекс компонент имеет вид плоскости с приклеенным по диаметру полукругом (рис. 24). Точки полукруга соответствуют замкнутым компонентам, ограничивающим его дуги — точечные компоненты (рис. 25).

Де Рам и Бюрле сформулировали гипотезу Пуанкаре (односвязное замкнутое трехмерное многообразие диффеоморфно сфере) в таких терминах: *всякое замкнутое односвязное трехмерное многообразие имеет отображение на плоскость, у которого все особые точки эллиптические* [5].

Задача. *Верно ли, что каждая замкнутая ограниченная компонента прообраза точки при отображении общего положения $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, совпадающем с линейным расслоением $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ вне шара, зацеплена с кривой особых точек? Имеет ненулевой коэффициент зацепления с ней?*

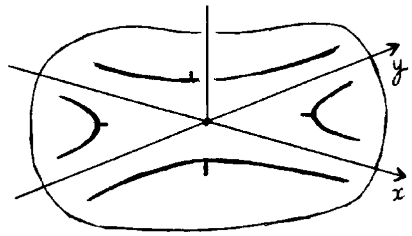

Рис. 19. *Негладкое пересечение параболоида и плоскости.*

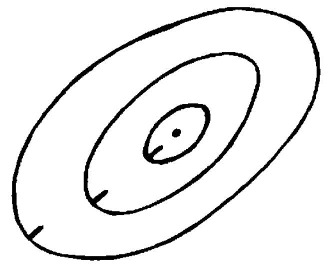

Рис. 20. *Слои вблизи эллиптической особой точки.*

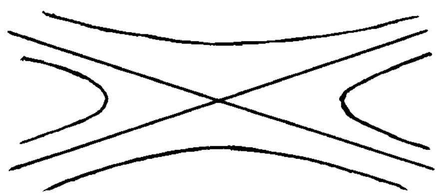

Рис. 21. *Слои вблизи гиперболической особой точки.*

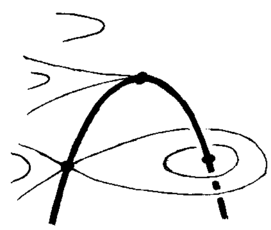

Рис. 22. *Перестройка на границе гиперболических и эллиптических особых точек.*

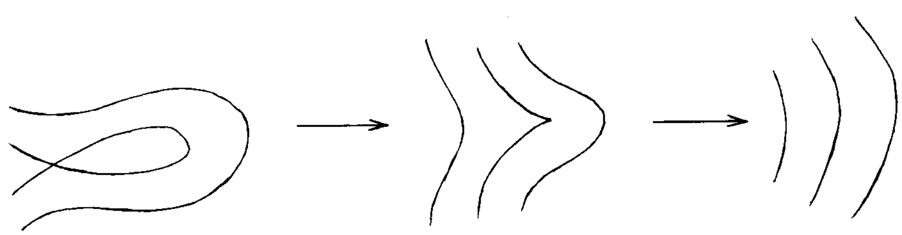

Рис. 23. *Перестройка семейства линий уровня гладкой функции на плоскости.*

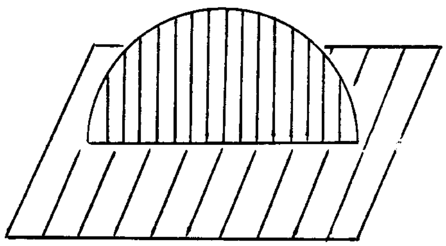

Рис. 24. *Комплекс компонент.*

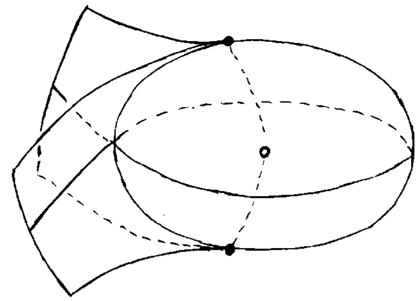

Рис. 25. *Ячейка замкнутых слоев и особые слои.*

Задача. *Существует ли отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, совпадающее с линейным расслоением $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ вне шара, имеющее гиперболические и не имеющее эллиптических особых точек?*

(Ответ: существует.)

Как выглядит соответствующий комплекс? (Указание: множество критических значений может иметь вид восьмерки.)

Задача. *Рассмотрим семейство псевдопериодических кривых – слоев (прообразов точек) при отображении*

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} u = ax + by + cz + g(x, y, z), \\ v = dx + ey + fz + h(x, y, z), \end{cases}$$

где a, b, c, d, e, f — числа общего положения, g и h — 1-периодические по трем переменным гладкие функции. Верно ли, что каждый неособый слой ($u = u_0$, $v = v_0$) имеет ровно одну неограниченную компоненту? (Конечно, достаточно рассмотреть случай, когда $b = 1$, $c = 0$, $f = 1$, $e = 0$.)

Задача. *Предположим, что отображение предыдущей задачи не имеет особых точек. Докажите, что отображение выпрямляется периодическим диффеоморфизмом трехмерного пространства (приводится к виду, где g и h тождественно равны нулю).*

Список литературы

[1] *Кронрод А. Г.* О функциях двух переменных // УМН. Т. 5, вып. 1. 1950. С. 24–134.

[2] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. Т. 93, №5. 1953. С. 763–766.

[3] *Арнольд В. И.* Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами // Функц. анализ и его прилож. Т. 25, вып. 2. 1991. С. 1–12.

[4] Topologocal Methods in Modern Mathematics // J. Milnor's Jubiley Volume. Houston: Publish or Perish. 1993.

[5] *Burlet O., De Rham G.* Sur certains applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan // Enseignement Mathematique. **XX**. 1974. P. 275–292.

[6] *Арнольд В. И.* Полиинтегрируемые потоки // Алгебра и анализ. Т. 4, вып. 6. 1992. С. 54–62.

[7] *Дынников И. А.* О пересечениях поверхностей уровня псевдопериодических функций // УМН. Т. 49, вып. 1. 1994. С. 213–214.

[8] *Панов Д. А.* Многокомпонентные псевдопериодические отображения // Функц. анализ и его прилож. Т. 30, вып. 1. 1996. С. 30–38.