XI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?* (Д. Ширяев, И. Рубанов)

Ответ. В 4 раза. **Решение**. Обозначим данные числа через a и b. По условию $(a+1)(b+1) = ab+a+b+1 = 2ab$. Приведя в последнем равенстве подобные члены, получаем $ab–a–b–1 = 0$, откуда $(a–1)(b–1) = ab–a–b+1 = 2$ и $(a^2–1)(b^2–1) = (a–1)(b–1)(a+1)(b+1) = 2·2ab = 4ab$.

2. *Устройство КК42 работает так: если положить в него четыре шарика, то в первый лоток вывалится второй по весу шарик (т. е. шарик веса b, если a > b > c > d), а во второй лоток вывалятся остальные. С другим числом шариков устройство не работает. Имеются 100 одинаковых на вид шариков попарно различных весов. Их пронумеровали числами 1, 2, ..., 100. Как, использовав прибор не более 100 раз, найти самый тяжелый шарик?*(К. Кноп)

Решение. Сначала каждый раз кладем в прибор 4 не отложенных ранее шарика и откладываем тот, который выпал в первый лоток. После 97 проб у нас остались не отложенными самый тяжелый и два самых легких шарика, так как ни один из них выпасть в первый лоток не может. Пусть их номера — x, y, z. Выберем из отложенных любые три шарика a, b, c и проделаем последние три пробы: (x, a, b, c), (y, a, b, c), (z, a, b, c). В результате два раза в первый лоток выпадет второй по весу шарик из a, b, c и один — когда вместе с a, b, c в пробе участвует самый тяжёлый шарик из всех ста — самый тяжелый шарик из a, b, c. Таким образом, самый тяжёлый шарик из всех — это шарик из x, y, z, участвовавший в той из трёх последних проб, в которой в первый лоток выпал не тот шарик, что в двух других.

3. *Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.* (С. Берлов)

Решение. Будем вычеркивать в конце ноль, одну, две, три, ..., 499 цифр. Если всё время получаются степени чисел, меньших 500, то основания каких-то двух из них совпали. Пусть это будут a^x и a^y $(x < y)$. Умножим число a^x на степень десятки так, чтобы в его записи стало столько же знаков, сколько в записи a^y, и вычтем результат из a^y. Разность будет натуральным числом, делящимся на a^x. Но в нём будет не более 499 цифр, а в a^x — не менее 501 цифры. Противоречие.

4. *Дан выпуклый четырёхугольник ABSC. На диагонали BC выбрана точка P так, что AP = CP > BP. Точка Q симметрична точке P относительно середины диагонали BC, а точка R симметрична точке Q относительно прямой AC. Оказалось, что ∠SAB = ∠QAC и ∠SBC = ∠BAC. Докажите, что SA = SR.* (С. Берлов)

Решение. Отметим на отрезке AC такую точку L, что $QL \parallel AP$. Тогда треугольники APC и LQC подобны и $LQ = QC = BP$. Кроме того, $BQ = PC = AP$ и $\angle APB = \angle LQB$, поэтому треугольники ABP и BLQ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BA = BL$. Далее,

$$\angle ALR = \angle ALQ = 180°–\angle CLQ = 180°–\angle ACB = \angle CAB+\angle ABC = \angle ABC+\angle SBC = \angle ABS$$

и $\angle BAS = \angle QAC = \angle LAR$, поэтому треугольники ABS и ALR подобны по двум углам, откуда $AB/AL = AS/AR$. Значит, треугольники ABL и ASR подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними ($\angle SAR = \angle BAC$, поскольку $\angle SAB = \angle QAC = \angle RAL$), но так как $AB = BL$, то $AS = SR$.