Задачи по конечным топологиям

Листок 2

Определение. Пусть X и Y — топологические пространства с топологиями T_X и T_Y соответственно. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если для любого $A \in T_Y$ его полный прообраз $f^{-1}(A)$ открыт в X.

Определение. Пусть S, T — предчумы (множества с предпорядками). Отображение $f\colon S \to T$ называется *монотонным*, если $s_1 \leqslant s_2$ в S влечет $f(s_1) \leqslant f(s_2)$ в T.

Задача 1. Докажите, что непрерывное отображение топологий Александрова — это в точности монотонное отображение соответствующих предчумов. И наоборот.

Задача 2. Пусть X множество с предпорядком, и $x \sim y$ в том и только том случае, когда $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Докажите, что каноническое отображение $X \to X/\sim$ непрерывно в топологиях Александрова.

Задача 3. Пусть $p\colon K \to X_K$ отображение из симплициального комплекса в топологию Александрова на чуме симплексов (определенное на лекции). Докажите, что p непрерывно.

Задача 4. Пусть $p\colon \operatorname{ord}(S) \to S$ отображение из геометрической реализации чума S в его топологию Александрова (определенное на лекции). Докажите, что p непрерывно.

Задача 5. Пусть $p\colon \operatorname{ord}(S) \to S$ отображение из предыдущей задачи. Докажите, что для любого $s \in S$ полный прообраз $p^{-1}(s)$ является стягиваемым пространством (то есть гомотопически эквивалентно точке).

Задача 6. Докажите, что отображение p не является гомотопической эквивалентностью, если в S есть хотя бы пара сравнимых элементов.

Задача 7. Пусть X конечное пространство, $f\colon X \to X$ непрерывно. Докажите, что следующие условия эквиваленты: (1) f сюръективно, (2) f биективно, (3) f гомеоморфизм.

Задача 8. Сколько существует негомеоморфных топологических пространств из трех точек? Сколько среди них удовлетворяют свойству отделимости T_0?