Глава 4

Случайные перестройки для параметрической модели

- Напоминание: Параметрическая модель случайных замощений
- Напоминание: обратимые марковские цепи
- Обобщение случая обратимых марковских цепей - “интегрируемые” семейства распределений
- Переворот геометрического распределения
- Приложение к параметрической модели случайных замощений
- Действие симметрической группы на случайных замощениях
- Обращение параметра q (симуляция)
- Дальнейшие идеи и приложения

НАПОМИНАНИЯ

В последней лекции будет излагаться довольно простая новая идея, как строить марковские цепи на параметрических замощениях. Эти цепи сильно отличаются от глауберовой динамики, тем они и хороши. За кулисами построения новых марковских цепей стоит замечательное **уравнение Янга-Бакстера**. Это уравнение - ключ почти ко всей “точно решаемой” статфизике - и, оказывается, дает что-то новое для случайных замощений.

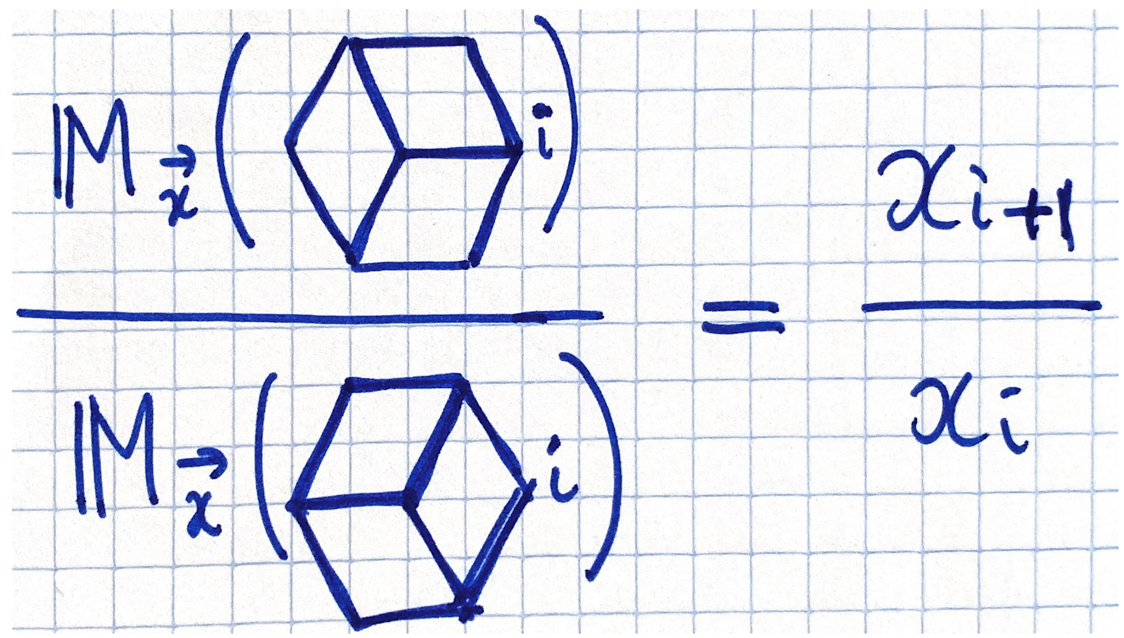
Начнем с напоминаний о том, что нам потребуется сейчас:

- Параметрическая модель случайных замощений
- Обратимые марковские цепи

Параметрическая модель зависит от положительных $x_1, \ldots, x_N$ (N - высота многоугольника), и определяется

$$\mathbb{M}_{\vec{x}}(\pi) = \frac{\text{вклад замощения в многочлен Шура}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)}.$$

Здесь “вклад” - это моном $x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2|-|\vec{\ell}^1|-1} \ldots x_N^{|\vec{\ell}^N|-|\vec{\ell}^{N-1}|-(N-1)}$. Соответственно, статумма - это просто многочлен Шура с переменными $x_1, \ldots, x_N$.



ОБРАТИМОЕ И ИНТЕГРИРУЕМОЕ

Пусть есть вероятностное распределение p на конечном множестве W. Маяковская цепь на W называется обратимой относительно p, если для всех $w_1, w_2 \in W$ выполняется

$$p(w_1)T(w_1, w_2) = p(w_2)T(w_2, w_1).$$

Если цепь обратима, то p является ее стационарным распределением (не меняется под действием марковской цепи). Кроме того, при некоторых условиях на T (типа “перемешивания”), если стартовать цепь с какого-то фиксированного элемента, и сделать много шагов, то в пределе мы увидим само распределение p.

Таким образом, чтобы сделать выборку из какого-то сложно устроенного распределения, достаточно придумать обратимую марковскую цепь для этого распределения, и “прокрутить” ее достаточно много раз.

Можно обобщить эту конструкцию так. Пусть у нас есть несколько марковских цепей T_i и несколько распределений p_j на одном и том же множестве W, причем $p_jT_i = p_{f_i(j)}$. То есть, действуя каждой цепью на каждое из распределений, получим какое-то другое распределение. Мы таким образом имеем перестановку $f_i(j)$, которая отвечает цепи T_i.

Эта ситуация может показаться немного странной, но давайте вспомним, что для замощений у нас было много распределений $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$, зависящих от параметров $\overrightarrow{x}$. Имея много цепей, можно делать много операций над $\overrightarrow{x}$. В частности, можно было бы пробовать менять параметры, или менять их порядок (или и то, и то).

В квантовой механике интегрируемость - это наличие в системе многих коммутирующих операторов (читай матриц). В нашем мартовском случае замощений наличие многих “хороших” операторов над $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$ тоже отвечает некоторой “интегрируемости”.

Мы построим операторы, которые переставляют метки в $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$. (Кстати, нормировочная константа для всех перестановок одна - многочлен Шура)

Геометрическое распределение

Немного вероятностной классики.

Пусть есть монетка с вероятностью орла $q \in (0,1)$. Будем ее бросать до тех пор, пока не выпадет решка. Вероятность того, что будет сделано $k \geq 0$ бросков до решки (не включая саму решку), равна $(1-q)q^k$.

1. Посчитайте эту вероятность и среднее число бросков

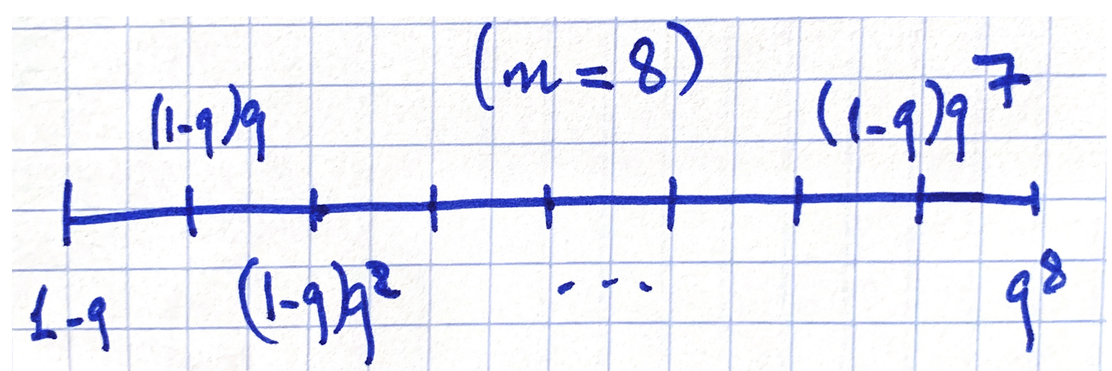
Это так называемое **геометрическое распределение**.

А теперь рассмотрим более реалистичную ситуацию - зададимся наперед каким-то числом шагов m, после которого ждать перестанем. Тогда вероятность, что будет сделано m шагов, равна q^m (а потом ждать перестали). Это так называемое **усеченное геометрическое распределение**.

Давайте будем обозначать это распределение $X_m(q)$. Здесь параметр q должен быть от 0 до 1.

2. Почему веса суммируются в единицу?

3. Посчитайте среднее усеченного распределения.



Перенормированное распределение

Рассмотрим другой вариант геометрического распределения – **перенормированное геометрическое распределение** на множестве $\{0,1,\ldots,m\}$. Это распределение получается, если бросать монетку, ожидая первой решки, но при этом наложить условие, что число бросков не превосходит m.

Тогда вероятность, что будет ровно k бросков ($k = 0,1,\ldots,m$) пропорциональна q^k, и равна, соответственно,

$$\mathrm{Prob}(k) = \frac{q^k}{1+q+\ldots+q^m} = \frac{1-q}{1-q^{m+1}}\,q^k.$$

Давайте будем обозначать это распределение $Y_m(q)$.

Отметим, что здесь параметр q не обязательно должен быть меньше 1, и может быть любым положительным числом. В случае $q=1$ распределение становится равномерным.

4. Посчитайте среднее перенормированного распределения.

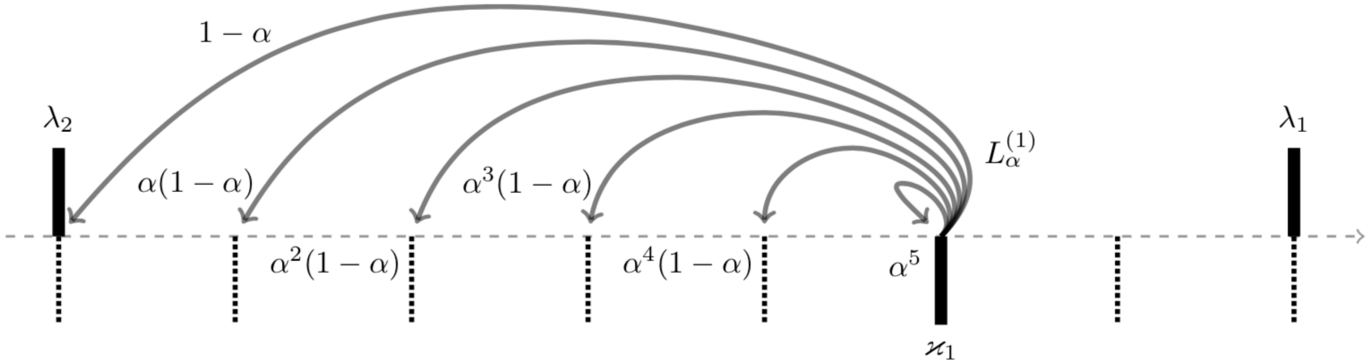
$1 \quad q \quad q^2 \quad - \; - \; - \quad q^7 \;\Big/\; 1+q+\ldots+q^7$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

$$\sum_{k=0}^{m} k q^k \cdot \frac{1}{1+\ldots+q^m} = \frac{1}{1-q} + m - \frac{m+1}{1-q^{m+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} k q^k (1-q) + m q^m = q\frac{1-q^m}{1-q}.$$

ЛЕММА О ПЕРЕВОРОТЕ



Оказывается, что если начать с перенормированного геометрического распределения с параметром α, и сделать прыжок налево, пользуясь усечённым распределением с этим же параметром, то в результате параметр α перенормированного распределения **перевернётся**.

Этот факт проверяется «руками», однако обнаружить его мне помогло уравнение Янга-Бакстера.

Итак, **лемма**. Пусть $0 \le \alpha \le 1$ и $m \ge 0$. Если начать с $Y = Y_{\alpha^{-1}}(m)$ и разыграть случайную величину с распределением $X_Y(\alpha)$, то полученная случайная величина имеет распределение $Y_m(\alpha)$. Другими словами, "лягушка" прыгает только влево так, как будто мы разыгрываем усеченное распределение на $\{0,1,\ldots,Y\}$. Это отвечает марковской цепи

$$T(k,k') = \begin{cases} \alpha^k, & k = k' \\ (1-\alpha)\alpha^{k'}, & k' < k \\ 0, & k' > k \end{cases}$$

Доказательство. Нормировка $\sum_{k=0}^{m} \alpha^k$ у $Y_m(\alpha)$ и $Y_m(\alpha^{-1})$ одинакова, поэтому ее можно не писать. Запишем теперь:

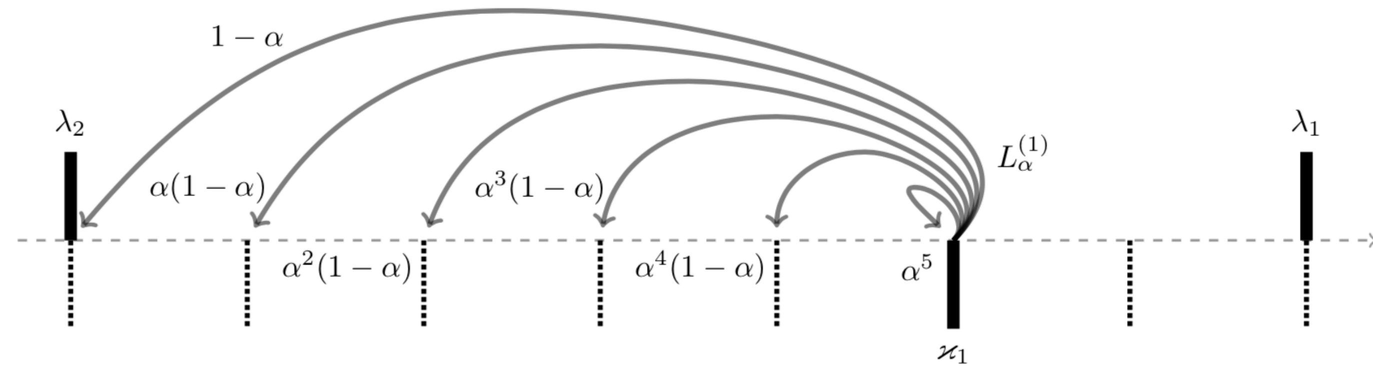
$$\sum_{k=0}^{m} \alpha^{-k} T(k,k') = \sum_{k=k'+1}^{m} \alpha^{-k}(1-\alpha)\alpha^{k'} + \alpha^{-k}\alpha^{k}$$
$$= \alpha^{k'-m} - 1 + 1 = \alpha^{k'-m}.$$

Мы видим, что результат пропорционален $\alpha^{k'}$, что и требовалось. ∎

5. Как работает лемма о перевороте в крайних случаях $\alpha = 0$, $\alpha = 1$?

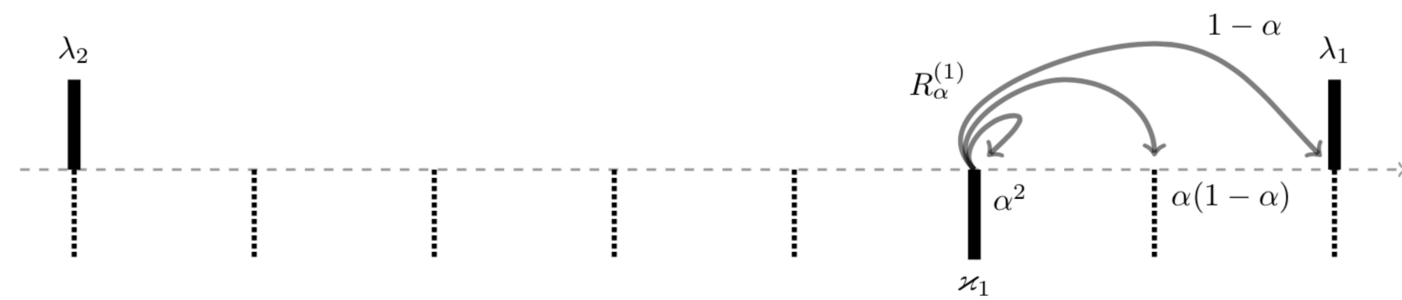
Замечания о перевороте

- Переворот параметра в $Y_m(\alpha)$ путем левого прыжка возможен только в одну сторону, от $Y_m(\alpha^{-1})$ к $Y_m(\alpha)$. Иначе вероятности в цепи T будут отрицательными, а нам так не надо.



- Зато в другую сторону, от $Y_m(\alpha)$ к $Y_m(\alpha^{-1})$, можно перейти, прыгая вправо!

- Заметим, что переворот (в любую из сторон) можно делать гораздо проще (и не случайно, а детерминированно) – просто возьмем и отразимся относительно середины отрезка.



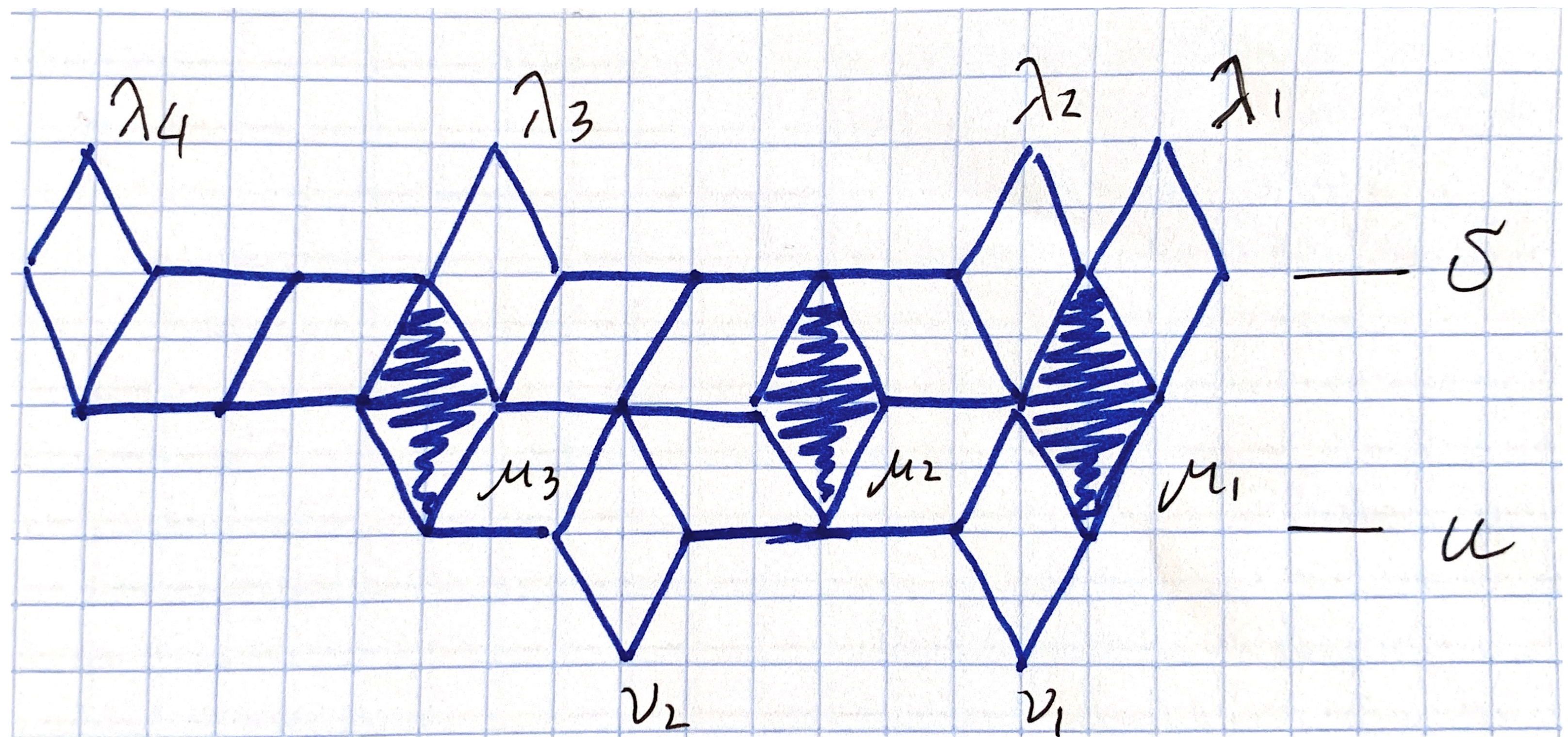
- По сравнению с детерминированным отражением, у наших операций L и R (левого и правого прыжков) есть преимущества:
  - Случайность добавляет свойство “перемешивания”
  - Есть некоторая дополнительная “марковость” - для свойства “мы прыгнули на расстояние ближе чем n от края” знания исходной точки левого прыжка не требуется! (Только того, что она была дальше чем n)

6. Выпишите и проверьте лемму о перевороте через правые прыжки.

7. Сформулируйте четко и докажите свойство “дополнительной марковости”

Условное распределение на одном уровне в замощениях

Пусть на каком-то уровне есть параметры $u, v > 0$ (то есть, $x_i = u,\ x_{i+1} = v$). Утверждается, что если зафиксировать конфигурации λ и ν выше данной μ (как на рисунке), то тогда условное распределение μ имеет вероятностные веса, пропорциональные$v^{|\lambda|-|\mu|}u^{|\mu|-|\nu|}$, что в свою очередь пропорционально $(v/u)^{|\mu|}$.



Почему так, легко видеть по аналогии с формулой отношения двух вероятностных весов при добавлении одного кубика.

А дальше с вероятностным весом $(v/u)^{|\mu|}$ можно сделать следующее - оказывается, этот вес - это просто произведение весов индивидуальных μ_i, а вес каждого из них - перенормированное геометрическое распределение. То есть, мы доказали следующий факт:

Утверждение. При фиксированных λ и ν распределение каждого μ_i – независимое перенормированное геометрическое распределение с параметром v/u, помещенное на отрезок от $\max(\lambda_{i+1}, \nu_i)$ до $\min(\lambda_i, \nu_{i-1})$ (здесь крайние случаи описываются очевидным образом).

Переворот замощений и симметрическая группа

Теперь вспомним, что левый прыжок можно применять, когда отношение $v/u \leq 1$, а правый - когда $v/u \geq 1$. (Если $u = v$, то и левый, и правый сдвиги - это тождественное преобразование.)

Определим операции $L^{(j)}$, $R^{(j)}$ на замещениях: левый прыжок $L^{(j)}$ – это просто одновременное выполнение левых прыжков независимо для каждого μ_i, с параметром x_{j+1}/x_j. Аналогично для $R^{(j)}$.

Пусть теперь $S^{(j)}$ - это $L^{(j)}$ если $x_{j+1} \leq x_j$, и $R^{(j)}$ иначе. Мы получаем следующее утверждение:

Теорема. Марковские операторы $S^{(j)}, j = 1,\ldots,N-1$, образуют действие симметрической группы на множестве параметрических распределений $\{\mathbb{M}_{\overrightarrow{y}}\}$ на замощениях заданной пилообразной фигуры с заданной верхней строчкой $\overrightarrow{\ell}$. Здесь $\overrightarrow{y}$ пробегает все перестановки данного вектора $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ (с положительными компонентами).

Теперь рассмотрим частный случай, когда $x_1 > x_2 > \ldots > x_N$ (в частности, это включает в себя меру $q^{-\mathrm{vol}}$, соответствующую $x_i = q^{i-1}$, $0 < q < 1$).

Тогда полный переворот $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_N) \to \overrightarrow{x}^{op} = (x_N, \ldots, x_1)$ можно осуществить применением только L операторов (причем, многими способами - способов столько, сколько приведенных слов для перестановки полного переворота). Значит, вертикальные ромбики будут всегда прыгать налево (и, кроме того, будет выполнена та загадочная "марковость" на краю).

Для q-распределений такие полные перевороты можно симулировать на компьютере (см. следующую страницу). Это можно использовать для выборки из распределений, если гнать такие цепи достаточно долго (вопрос еще требует изучения).

СИМУЛЯЦИИ ПЕРЕВОРОТА

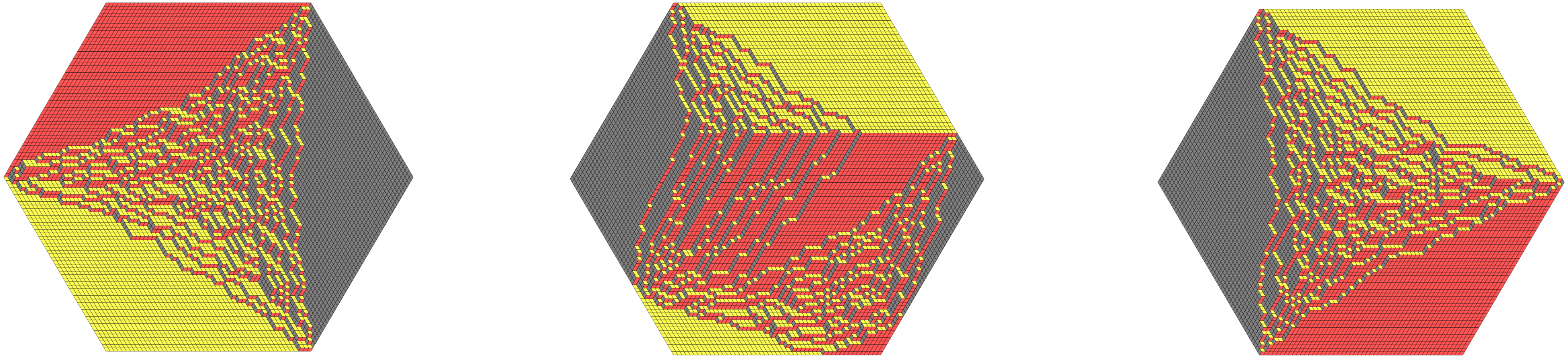
https://lpetrov.cc/simulations/2019-04-30-qvol/

Пока основное приложение для конечных замощений – марковская цепь для перевода случайного разбиения $q^{-\mathrm{vol}}$ в $q^{+\mathrm{vol}}$, при котором все вертикальные ромбики едут налево, а левая граница меняется независимо от всей остальной конфигурации.

Ссылка на видеофайлы – выше ⬆️

Начало, середина, и конец одного такого мультика изображены ниже ⬇️

Начало мультика $q^{-\mathrm{vol}}$ - точный семпл по алгоритму Бородина-Горина-Райнса (статья 1, статья 2, ссылка на программу тут внизу страницы)



Дальнейшие приложения

- Оказывается, с помощью переворотов с левыми прыжками, и пользуясь “дополнительной марковостью”, можно “отправить в прошлое” одну замечательную случайную систему частиц под названием TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process). TASEP моделирует неравновесную термодинамическую ситуацию: заполнили пол-комнаты газом, а во второй половине вакуум - и открыли перегородку.
  Отправка в прошлое достигается путем рассмотрения бесконечных замощений и переходом к пределу $q \to 1$. Это наводит некоторую новую (пока не до конца понятную) “обратимость” на необратимую термодинамическую модель. Это результат весны 2019 года (LP & Axel Saenz, https://arxiv.org/abs/1907.09155)

- Что можно еще так переворачивать, кроме усеченного геометрического распределения? Есть много деформаций, связанных с $q-$ и эллиптической комбинаторикой и алгеброй…