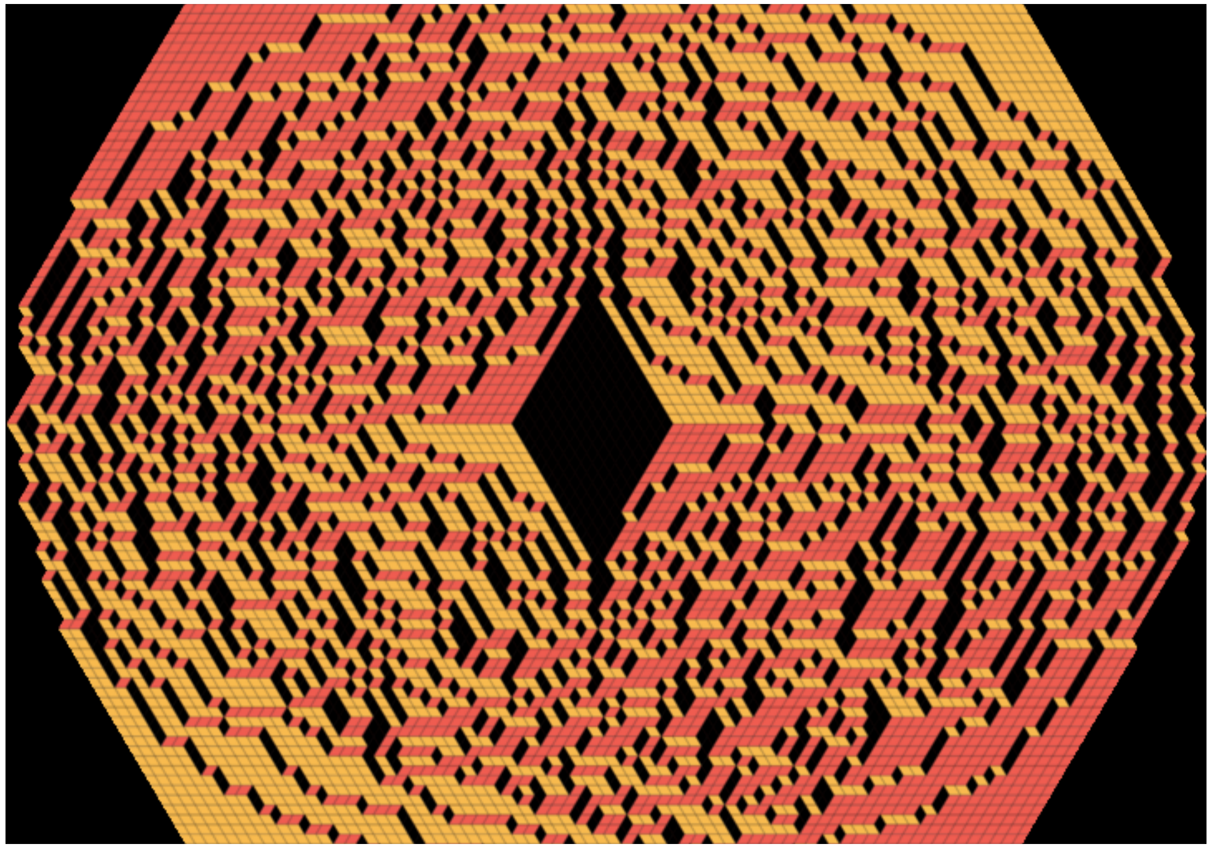
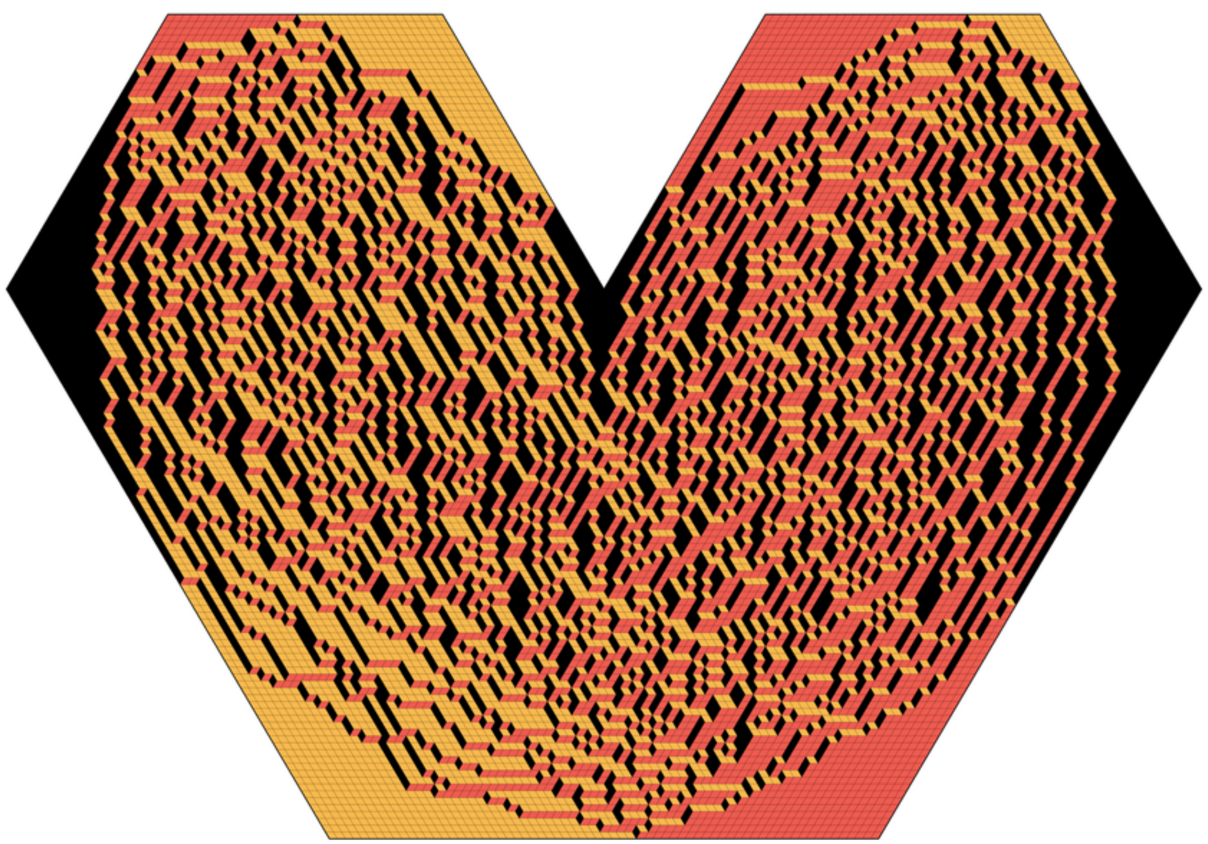
Глава 3

Асимптотика

Случайные перестройки как марковские операции

- Модели случайных замощений
- Обзор: как выглядят случайные замощения больших многоугольников
- Как рисовать картинки?
- Вероятностное пространство
- Марковские операторы
- Сходимость марковской цепи к стационарному распределению
- Элементарные примеры
- Обратимость, уравнение детального баланса
- Приложение к замощениям
- Глауберова динамика в равномерном случае
- Глауберова динамика в параметрическом случае





Случайные замощения

Мы будем рассматривать две вероятностные ситуации: **равномерную** и **параметрическую**. Зафиксируем пилообразный многоугольник (например, шестиугольник), и рассмотрим все его замощения.

В **равномерной** модели $\mathbb{M}_1$, разыграем случайное замощение равновероятно среди всех: $\mathbb{M}_1(\pi) = \dfrac{1}{Z}$, где Z - статсумма, нормировочная константа. Мы ее считали:

- для шестиугольника, она дается формулой МакМагона
- Для пилообразной области с верхней строчкой $\overrightarrow{\ell} = (\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_N)$ она равна $s_{\overrightarrow{\ell}}(1,1,\ldots,1)$, что явно выражается формулой размерности Вейля.

Случайные замощения

Параметрическая модель зависит от положительных $x_1, \ldots, x_N$ (N - высота многоугольника), и определяется

$$\mathbb{M}_{\vec{x}}(\pi) = \frac{\text{вклад замощения в многочлен Шура}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)}.$$

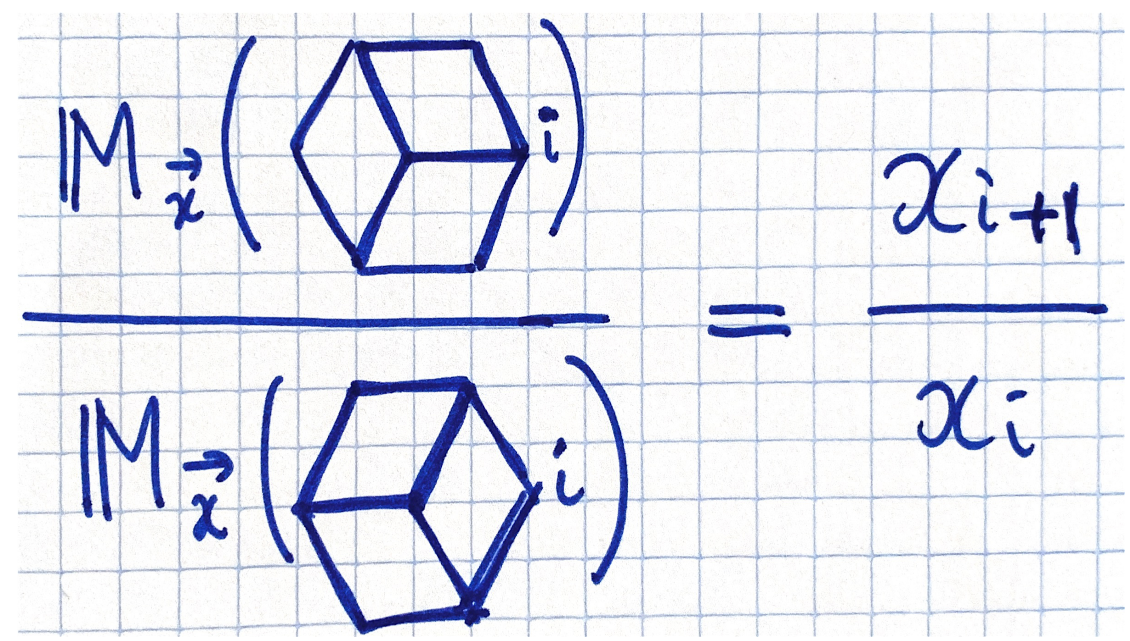
Здесь "вклад" - это моном $x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2|-|\vec{\ell}^1|-1} \ldots x_N^{|\vec{\ell}^N|-|\vec{\ell}^{N-1}|-(N-1)}$. Соответственно, статумма - это просто многочлен Шура с переменными $x_1, \ldots, x_N$.

1. Параметрическая модель не зависит от одновременной перенормировки переменных x_i, однако зависит от их перестановки

Частные случаи параметрической модели - меры $\propto q^{\pm\mathrm{vol}(\pi)}$, то есть, где вес замощения пропорционален q в степени плюс или минус объем. В наших обозначениях получаем

- $q^{+\mathrm{vol}(\pi)}$: $x_i = q^{1-i}$, обозначение $\mathbb{M}_q$
- $q^{-\mathrm{vol}(\pi)}$: $x_i = q^{i-1}$, обозначение $\mathbb{M}_{1/q}$

Проще всего это понять, если не смотреть на вес всего замощения, а только на то, как параметрический вес $\mathbb{M}_{\vec{x}}$ меняется при элементарных перестройках:



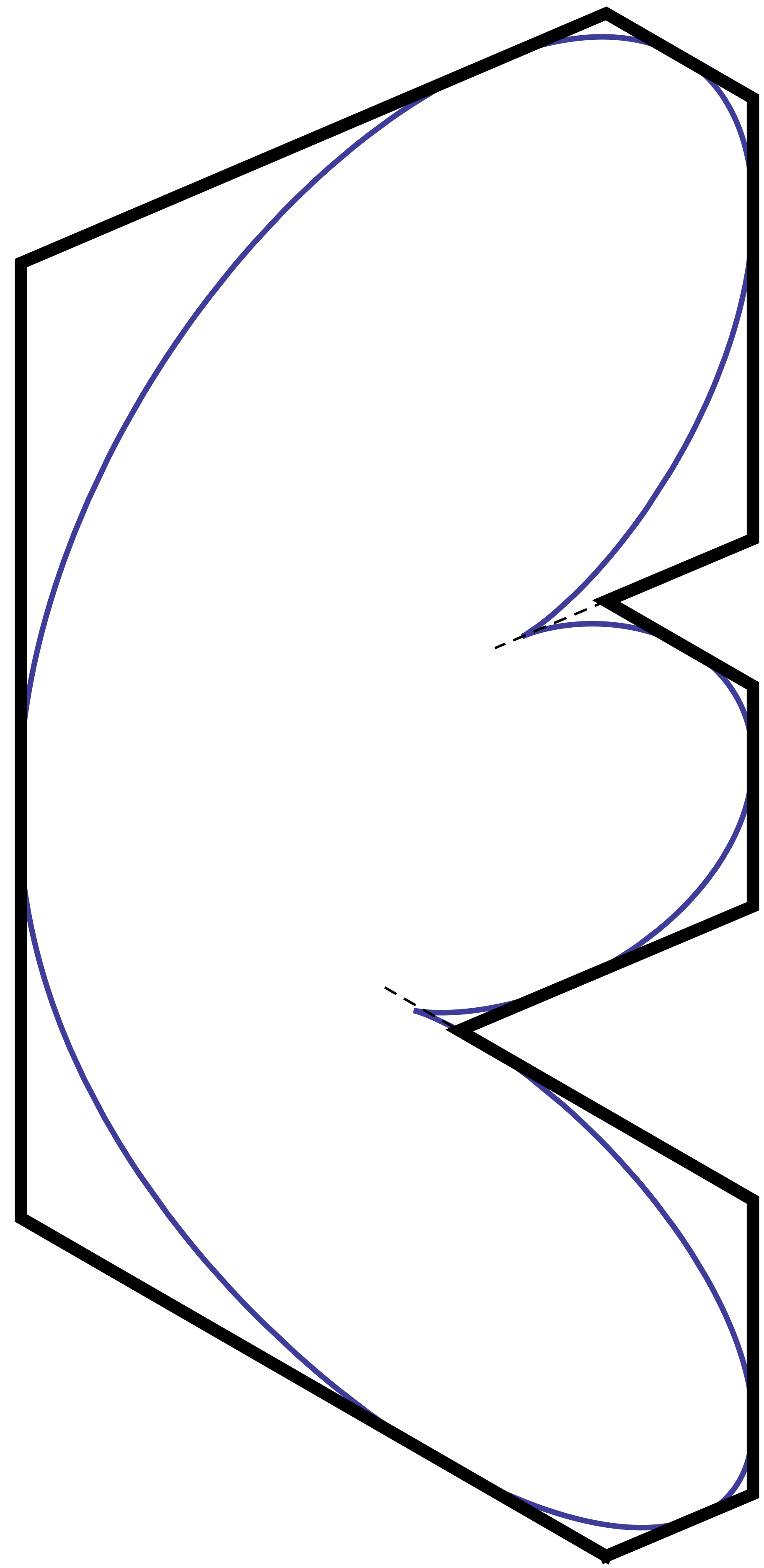
То есть, при увеличении объема вероятностный вес умножается на x_i/x_{i+1}. Именно поэтому в геометрических прогрессиях получается так, как выше.

ОБЗОР АСИМПТОТИКИ

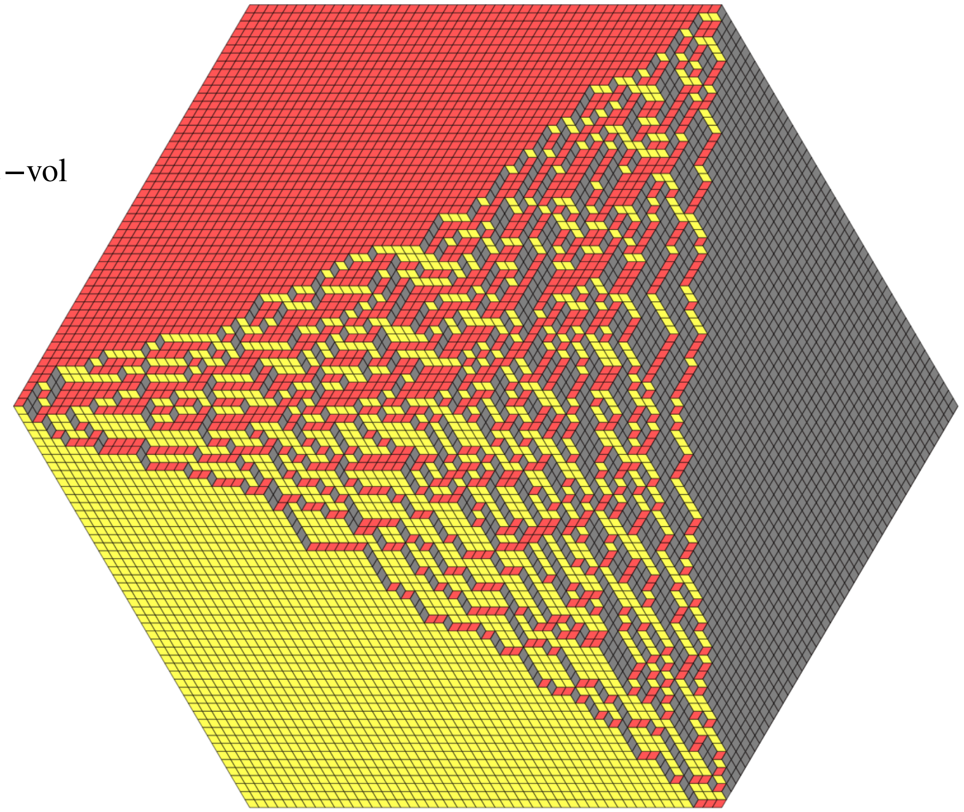
Асимптотика равномерной модели хорошо изучена, а параметрической - в основном только в q-случае, да и там сделано сильно меньше. В равномерной модели $\mathbb{M}_1$:

- Замороженная граница - алгебраическая кривая минимальной степени, касающаяся всех сторон или продолжений
- Предельная форма трехмерной картинки имеет алгебраическую нормаль
- Глобальные флуктуаций вокруг предельной формы - гауссово свободное поле (один из конформных объектов из лекции С.К. Смирнова)
- В решеточном пределе в "гуще" - экстремальная мера на замощениях (постоянной плотности) всей плоскости
- На границе вокруг замороженной границы - кривые Эйри
- Еще бывают замещения с дырками…

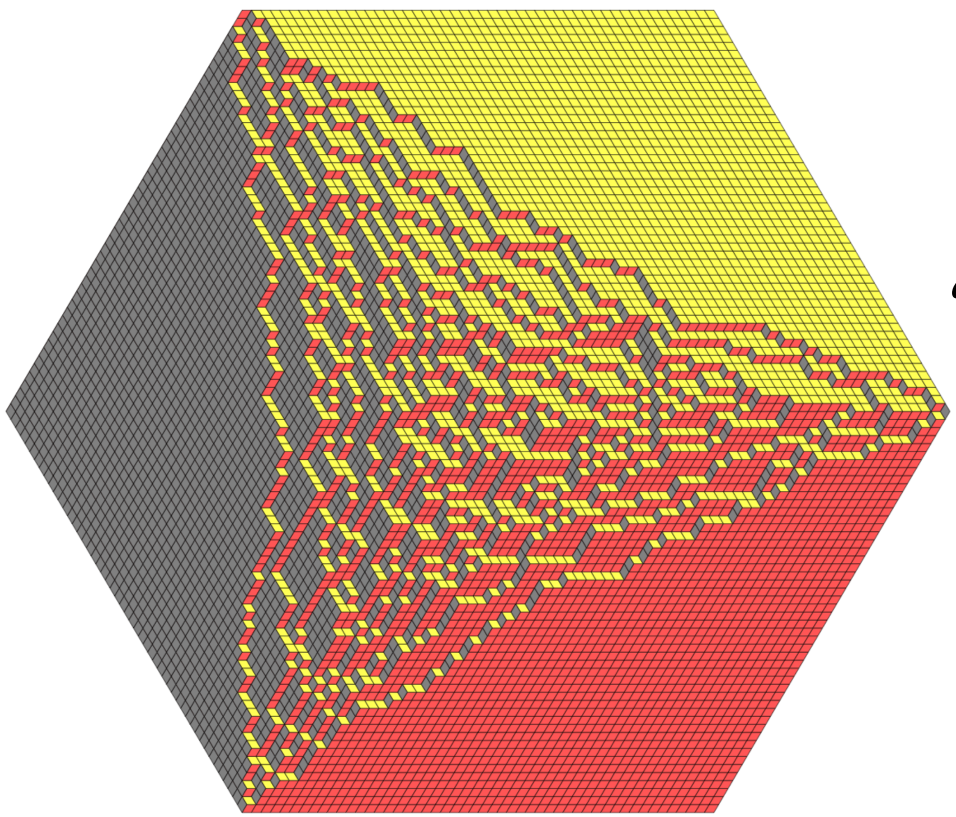
В этой науке еще очень много недоказанных гипотез, и почти ничего не известно для общей параметрической модели $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$.



$q^{-\mathrm{vol}}$



$q^{+\mathrm{vol}}$



В случае шестиугольника с равномерной мерой, замороженная граница - это просто вписанный эллипс.

В случае шестиугольника с мерой $q^{\pm\mathrm{vol}}$ эллипс деформируется (или, что то же самое, записывается в новых экспоненциальных координатах), и получаются фигуры типа таких ⬅️

Как рисовать картинки?

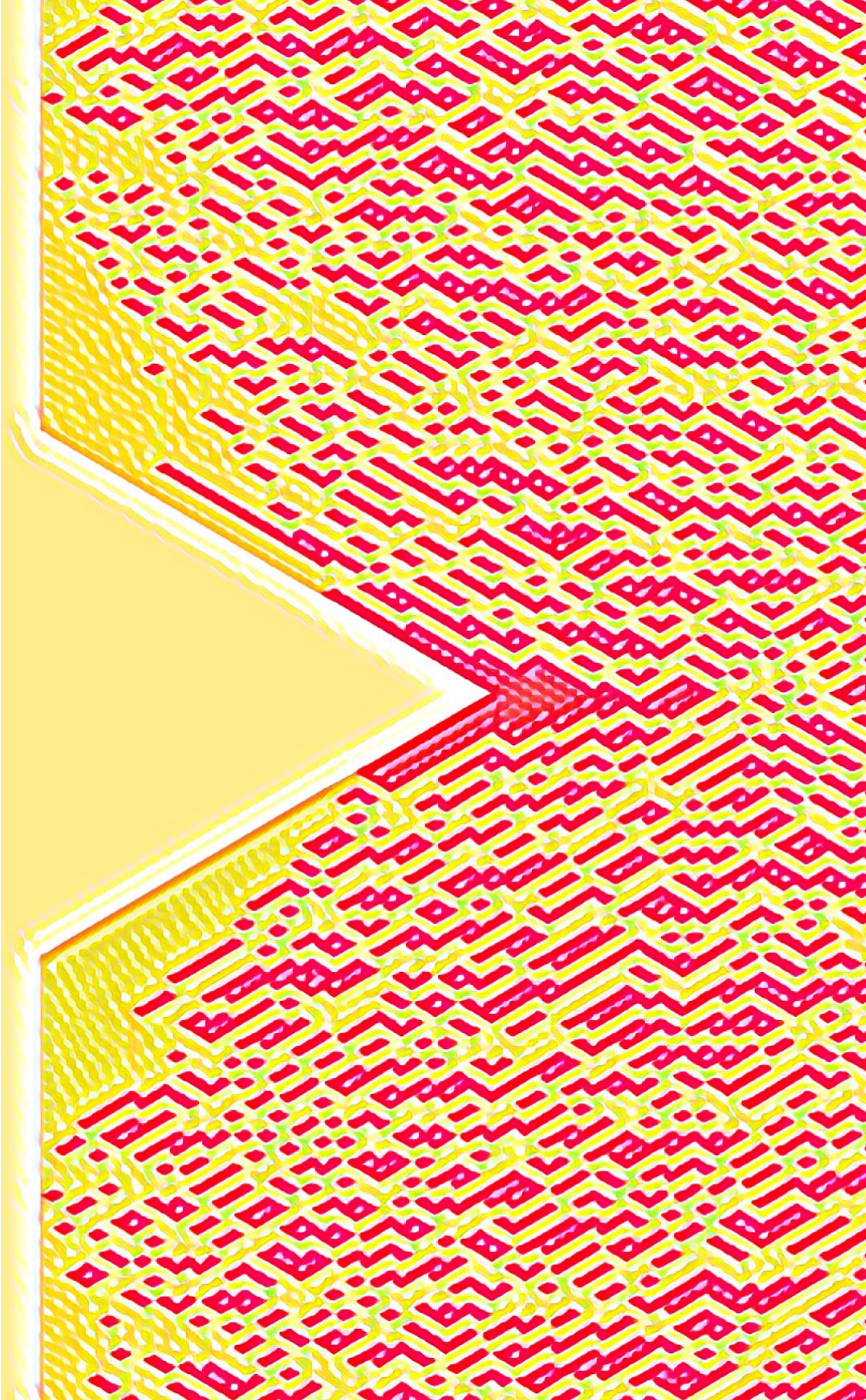
Как нарисованы многочисленные картинки в этом конспекте?

Оказывается, замощений данной большой формы ОЧЕНЬ. МНОГО. Например $\#\Omega_{4,4,4} = 232{,}848$, $\#\Omega_{10,10,10} \approx 9.26 * 10^{33}$, $\#\Omega_{20,20,20} \approx 1.6 * 10^{136}$. То есть, просто перечислить все замощения и выбрать среди них одно наугад (для $\mathbb{M}_1$) вряд ли удастся.

На помощь приходят **цепи Маркова**. А именно, вместо того, чтобы перебирать всевозможные замощения, будем перебирать замощения *случайно*. Начнем с какого-нибудь (например, с “пустого”), и будем случайно его менять, добавляя или убирая кубики. Оказывается, за относительно небольшое число шагов (порядка $\max\{a, b, c\}^4$ для шестиугольника) то, что мы будем видеть, почти совпадет с желаемым распределением.

Используя более хитрый coupling from the past, можно получить *точную* выборку из искомого распределения.

Обсудим, **как** надо случайно менять замощение.



Вероятностное пространство

(Конечное) **вероятностное пространство** - это некоторое конечное множество $W = \{w\}$, и функция $p: W \to [0,1]$, называемая **вероятностью** или **вероятностной мерой**, такая, что $\sum_{w \in W} p(w) = 1$. Мы мыслим себе, что w кодирует результат какого-то эксперимента, и результат этот случайный.

- Пусть есть монетка с вероятностью выпадения орла p и решки $1 - p$. Вероятностное пространство для двух бросаний монетки имеет вид

ω	OO	OP	PO	PP
$p(\omega)$	p^2	$p(1-p)$	$p(1-p)$	$(1-p)^2$

- Пусть W - множество всех замощений шестиугольника $\Omega_{a,b,c}$, а $p(w)$ соответствует, например, $\mathbb{M}_1$ (то есть, $p(w)$ одинаково для всех замощений).
- В случае параметрической модели, $p(w) = \mathbb{M}_{\vec{x}}(w)$ уже зависит от замощения w, как было определено выше.

Теперь наша задача - разобраться с **марковскими операторами**, которые моделируют случайные перестройки замощений. Формальное определение такое.

Марковским оператором T на пространстве W называется матрица $T(w, w')$, $w, w' \in W$, с неотрицательными элементами, и такая, что $\sum_{w' \in W} T(w, w') = 1$ для каждого $w \in W$.
(Иногда также говорят “стохастическая матрица”.)

Марковский оператор действует линейно на вероятностных мерах p, то есть, меняет вероятность.

Марковские операторы

Пусть p - вероятностная мера на W и T - Марковский оператор. Тогда определим другую вероятностную меру pT так:

$$pT(w) = \sum_{w' \in W} p(w')T(w', w).$$

2. pT - тоже вероятностная мера

Если представить себе лягушку, которая случайно прыгает по пространству W, и что $T(w, w')$ - вероятность прыгнуть в w' из w, то смысл pT такой. Пусть лягушка сначала выбрала себе место согласно p, и потом прыгнула по правилу T. Тогда pT - это новое распределение лягушки после прыжка.

3. Распределение лягушки после n прыжков имеет вид pT^n, где T^n - степень матрицы.

Рассмотрим примеры для пространства про 2 бросания монетки. Пусть T_1 - шаг, отвечающий перебору второй монетки, а при T_2 мы сначала выбираем монетку случайно с вероятностью $1/2$, и потом ее перебрасываем. Матрицы будут такие (строки и столбцы нумеруют конфигурации OO, OP, PO, PP):

$$\mathtt{T1} := \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{T2} := \begin{pmatrix} p & (1-p)/2 & (1-p)/2 & 0 \\ p/2 & 1/2 & 0 & (1-p)/2 \\ p/2 & 0 & 1/2 & (1-p)/2 \\ 0 & p/2 & p/2 & 1-p \end{pmatrix}$$

Стационарное распределение

Если лягушка прыгает долго, то она может забыть свое начальное состояние, и ее распределение сходится к так называемому стационарному p_{st}, где

$$p_{st}T = p_{st}.$$

Это линейное однородное уравнение, которое в зависимости от структуры T имеет одномерное или более пространство решений. Из решений однородного уравнения мы выбираем те, для которых сумма элементов p_{st} равна единице. Таким образом, мы получаем одну или больше вероятностную меру. Такие меры p_{st} называются **стационарными**.

Посмотрим на степени матриц T_1 и T_2 для конкретного $p = 0.3$.

4. Матрица T_1 идемпотентна, то есть, в любой степени совпадает с собой

Матрица T_2 в большой степени выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \end{pmatrix}$$

Если все строчки одинаковые (для T_1 это не так, а для T_2 так), это значит, что стационарное распределение единственно, и лягушка к нему сходится. Заметим, что для T_2 мы сходимся к распределению двух бросаний монетки - потому что понятно, что за один шаг T_2 его сохраняет.

В чем проблема с T_1, почему оно не сходится? Оказывается, потому что оно не затрагивает первую монетку, то есть, не *перемешивает* пространство.

Если цепь “перемешивает” все пространство, то стационарное распределение единственно, и к нему есть сходимость.

ОБРАТИМОСТЬ

Пусть цепь “перемешивает”. Как теперь понять, какое распределение будет стационарным? Решать уравнение $p_{st}T = p_{st}$ может быть очень сложно (вспомните, что замощений очень много). На помощь приходят обратимые цепи Маркова, для которых проверить стационарность очень просто.

Цепь T называется **обратимой** относительно распределения p_{rev}, если

$$p_{rev}(w)T(w, w') = p_{rev}(w')T(w', w)$$

для всех $w, w' \in W$. (В физике это соотношение называется **уравнением детального баланса**).

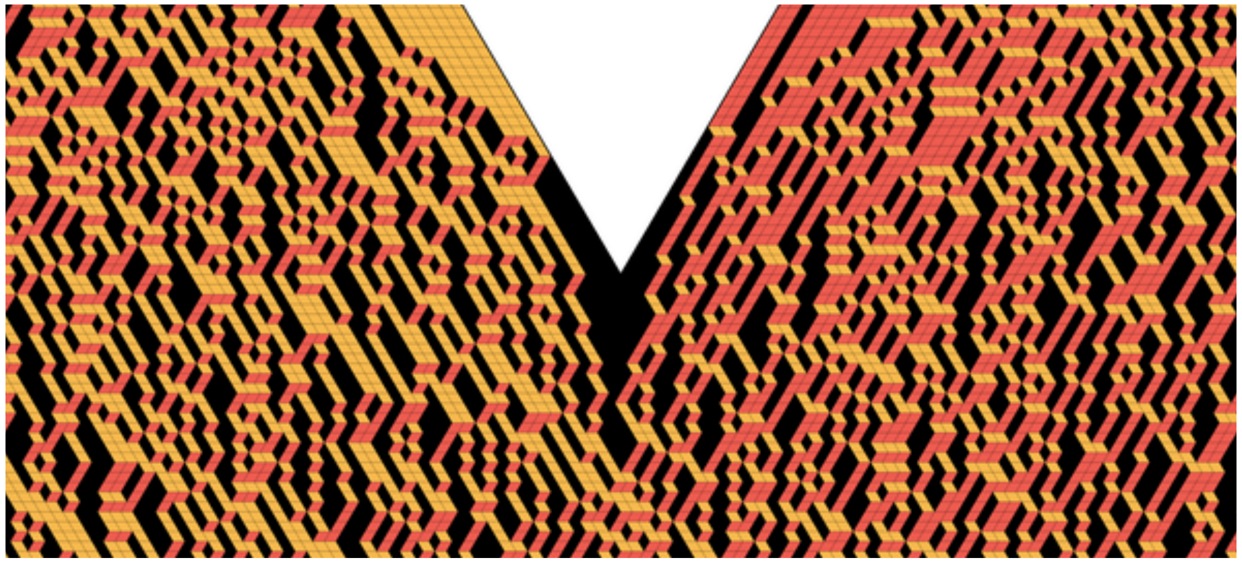
5. Для обратимой цепи имеем $p_{rev}T = p_{rev}$.

В итоге: если цепь “перемешивает” и обратима относительно распределения p_{rev}, то, начиная с любого элемента $w \in W$ и делая много шагов цепи, лягушка будет распределена почти как p_{rev}.

В приложении к замощениям, у нас уже есть p_{rev} - это наши меры $\mathbb{M}_1$ или $\mathbb{M}_{\vec{x}}$.

Задача состоит в построении марковской цепи на замощениях, которая “перемешивает” и обратима относительно p_{rev}. Желательно, чтобы цепь была попроще - так ее можно будет реализовать на компьютере. Тогда, начиная с любого замощения (например, с пустого), и делая много шагов, мы получим картинку, которая будет неотличима от искомого равномерного распределения.

В задачах есть также улучшение этой идеи - каплинг из прошлого (coupling from the past) - который позволяет достигать точной выборки за конечное (но случайное) число шагов.



Глауберова динамика

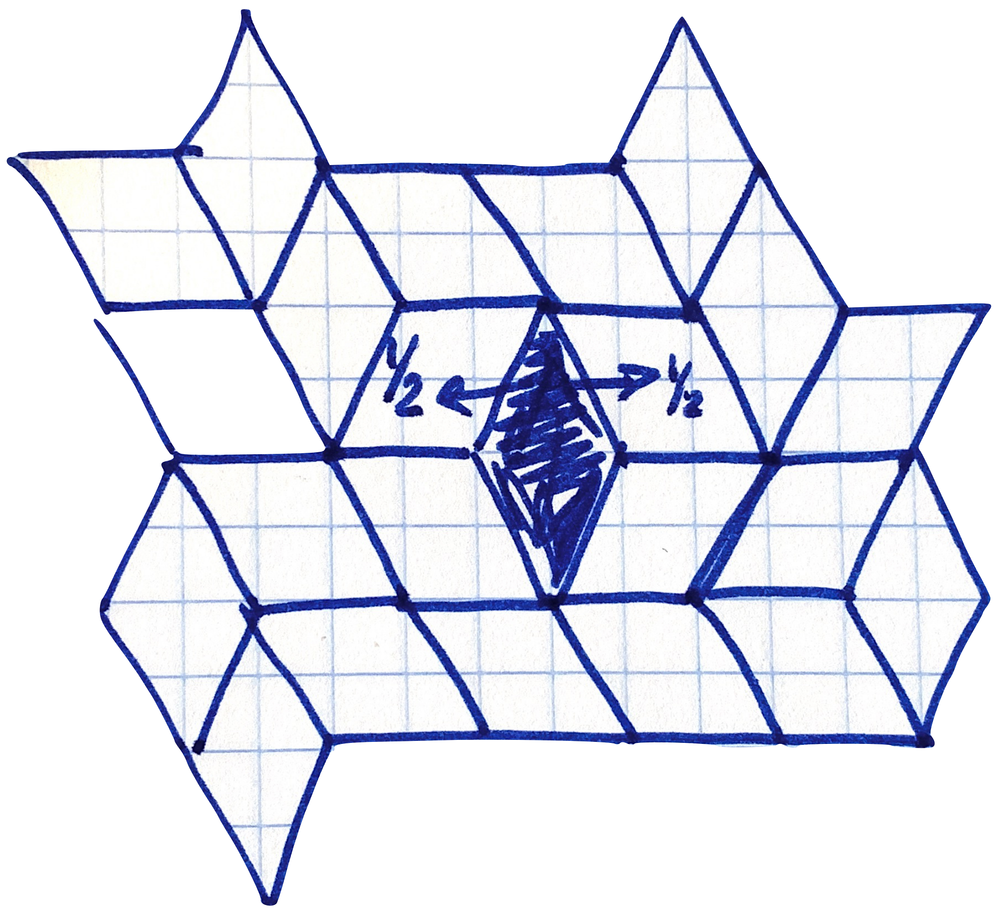
Сосредоточимся на равномерном случае $\mathbb{M}_1$. Мы хотим построить (как можно более простую) цепь на замощениях шестиугольника $\Omega_{a,b,c'}$ так, чтобы она "перемешивала" и была обратимой относительно равномерного распределения $\mathbb{M}_1$. Обратимость означает, что для любых двух замощений w, w' имеем $T(w, w') = T(w', w)$ (действительно, ведь $\mathbb{M}_1(w) = \mathbb{M}_1(w')$).

Построим цепь, которая действует по таким правилам:

- Выберем случайно один из вертикальных ромбиков, которые внутри шестиугольника
- Бросим монетку (орел или решка с вероятностью $1/2$)
- Если орел и наш ромбик может подвинуться вправо, то подвинем его вправо ("добавим кубик")
- Если решка и наш ромбик может подвинуться влево, то подвинем его влево ("уберем кубик")

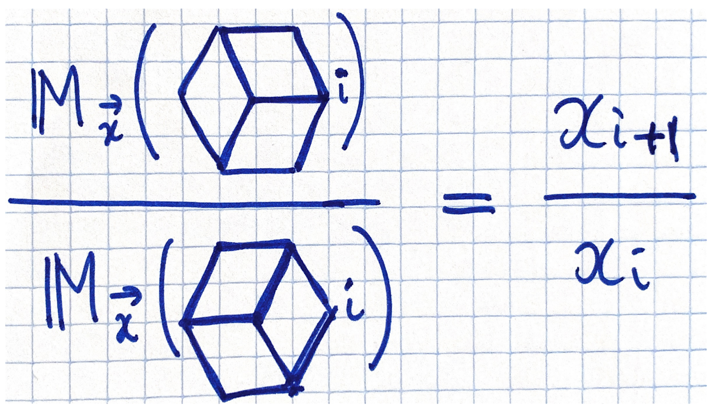
6. Проверьте обратимость для этой цепи

Таким образом, если гнать эту цепь очень долго, то получится равномерное распределение. Toninelli & Laslier доказали, что число шагов, необходимых до равномерного распределения - порядка четвертой степени линейного размера многоугольника.

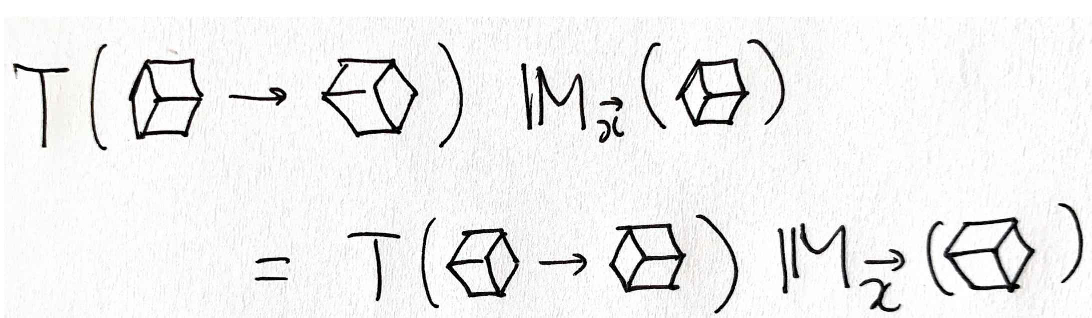


ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Если вместо равномерной меры взять $\mathbb{M}_{\vec{x}}$ (в частности, $q^{\pm\mathrm{vol}}$), то аналогичную цепь тоже можно построить. Для этого вспомним соотношение весов при добавлении/удалении кубика:



Таким образом, мы хотим, чтобы на i-м уровне в замощении было выполнено следующее уравнение детального баланса:



7. Проверьте обратимость для цепи с параметрами

Этого можно достичь, если честную монетку из предыдущей марковской цепи заменить на монетку, зависящую от номера уровня, и с вероятностью “вправо”, равной

$$p_i = \frac{x_i}{x_i + x_{i+1}}.$$

Для $q^{\pm\mathrm{vol}}$ получаем, что все p_i одинаковые, и равны, соответственно, $\dfrac{q}{1+q}$ для плюс объема, и $\dfrac{1}{1+q}$ для минус объема.

Глауберова динамика хороша для рисования картинок, но она “**не интегрируемая**” (то есть, ее сложно анализировать асимптотически - хотя и удается). В следующей главе мы рассмотрим еще одно семейство мартовских цепей на замощениях, для которых интегрируемость “более явная”.