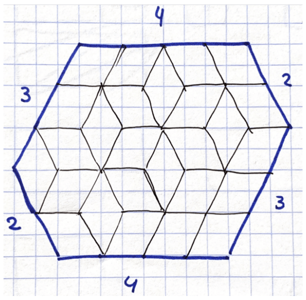
Доминошки

1. Вычислите число замощений прямоугольника $2 \times n$ доминошками 1×2 и 2×1. (Начните с рекуррентной формулы.)

2. (*) Выпишите рекуррентные формулы для числа замощений прямоугольника $3 \times n$ доминошками 1×2 и 2×1. (Здесь n должно быть четным.) Число замощений прямоугольника $3 \times n$ выражается через число замощений прямоугольника $3 \times (n-2)$ и число замощений прямоугольника $3 \times (n-1)$ с вырезанным угловым квадратиком.

   Сколькими способами можно замостить доминошками прямоугольник 3×4?

Ромбики



3. Докажите, что если шестиугольник на треугольной решетке (с параллельными противоположными сторонами) можно замостить ромбиками, то его противоположные стороны равны.

   Шестиугольник на треугольной решетке со сторонами a, b, c, a, b, c обозначается $\Omega_{a,b,c}$

4. Посчитайте число замощений $\Omega_{a,b,1}$.

5. (*) Используя метод Гесселя-Вьенно, посчитайте число замощений $\Omega_{a,b,2}$.

Формулы МакМагона

Формулы МакМагона (пока без доказательства)

$$\#\mathrm{Tilings}(\Omega_{a,b,c}) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}, \qquad \sum_{\pi\in\mathrm{Tilings}(\Omega_{a,b,c})} q^{\mathrm{vol}(\pi)} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}.$$

Здесь $\mathrm{vol}(\pi)$ — число блоков $1 \times 1 \times 1$ под трехмерной поверхностью, соответсвующей замощению.

6. Используя формулу МакМагона, получите заново ответы для числа замощений $\Omega_{a,b,1}$ и $\Omega_{a,b,2}$. Выпишите формулу для числа замощений $\Omega_{a,b,3}$.

7. q-формула МакМагона — это утверждение о равенстве двух многочленов от q (в частности, знаменатели в правой части обязаны сократиться). Какова степень этого многочлена (в зависимости от a, b, c)?

8. Пусть $0 < q < 1$. Перейдите к пределу при $a, b, c \to \infty$ в q-формуле МакМагона, и получите производящую функцию плоских разбиений.

   Плоское разбиение можно представлять себе как набор блоков $1 \times 1 \times 1$, сдвинутых в один угол (без дырок и перекрытий). Число блоков может быть сколь угодно большим. Объем плоского разбиения — это число блоков. Производящая функция определяется как $\sum_\pi q^{\mathrm{vol}(\pi)}$ (сумма по всем плоским разбиениям).