Задачи по представлениям SL_2

Иван Лосев

25 июля 2019 г.

Задача 1

Вычислите алгебры Ли следующих алгебраических групп:

1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ всех комплексных $n \times n$-матриц с определителем 1.

2) $\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) | A^T = A^{-1}\}$.

3) более общо, группы $\mathrm{O}(V, B)$, где V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, а B – билинейная форма на V. Эта группа состоит из всех обратимых линейных операторов $V \to V$, которые сохраняют форму B.

4*) Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$, где A – конечномерная алгебра.

Задача 2

1) Проверьте, что следующие формулы задают представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$:

$$eP := -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P, \quad fP := \sum_{i=1}^{d} x_i^2 P, \quad hP := -(k + 2d)P$$

для однородного многочлена P степени произвольной степени k[1].

2*) Проверьте, что P является (бесконечной) прямой суммой неприводимых модулей Верма.

3) Пусть N_k – это размерность пространства однородных многочленов степени k, удовлетворяющих уравнения $\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} P = 0$ (функции, удовлетворяющие этому уравнению называются *гармоническими*, они очень важны в анализе). Воспользуйтесь 2), чтобы доказать следующее тождество формальных степенных рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k = \frac{1 - t^2}{(1 - t)^d}.$$

[1]Предыдущая версия этого пункта содержало ошибку, обнаруженную Иваном Карповым.

Задача 3

В этой задаче мы объясним, откуда приходит элемент Казимира $C := ef + fe + \dfrac{h^2}{2} \in U(\mathfrak{sl}_2)$.

1) Покажите, что представление SL_2 в $\mathfrak{sl}_2$ посредством $g.x := gxg^{-1}$ поднимается до действия SL_2 на $U(\mathfrak{sl}_2)$ автоморфизмами алгебры.

2) Докажите, что, над $\mathbb{C}$, элемент $a \in U(\mathfrak{sl}_2)$ центральный тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно SL_2.

3) Докажите, что, опять же над $\mathbb{C}$, пространство инвариантов $(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2)^{\mathrm{SL}_2}$ одномерно.

4) Докажите, что элемент Казимира – это образ ненулевого вектора в $(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2)^{\mathrm{SL}_2}$ при естественном отображении $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \to U(\mathfrak{sl}_2)$.

Задача 4

Докажите, что, как топологическое пространство, группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ гомотопна трехмерной сфере, и, в частности, связна и односвязна.

Задача 5

Опишите алгебраические представления группы $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

Задача 6

Цель этой задачи – доказать, что в любой ассоциативной алгебре A над $\mathbb{F}_p$, разность $(x+y)^p - x^p - y^p$ – это полином Ли от x, y, который, как полином Ли, не зависит от выбора A и x, y. Мы предполагаем, что теорема ПБВ верна для любой алгебры Ли (утверждение, которое нам нужно для $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ может быть выведено из теоремы ПБВ для $\mathfrak{sl}_2$, доказанной на лекции). Ниже $\mathbb{K}$ – это поле.

1) Определите *свободную* алгебру Ли $\mathfrak{l}_2$ от переменных x, y, и докажите, что ее универсальная обертывающая алгебра – это свободная ассоциативная алгебра $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ от переменных x, y.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$. Докажите, что существует единственный гомоморфизм алгебр $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ (*копроизведение*) с $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

3) Докажите, что если $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$, то $\Delta(x^p) = x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p$.

4) Воспользуйтесь теоремой ПБВ, чтобы доказать следующее утверждение: если $a \in U(\mathfrak{g})$ записывается как многочлен степени $< p$ от элементов $\mathfrak{g}$, и $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, то $a \in \mathfrak{g}$.

5) Докажите, что в свободной алгебре $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ элемент $(x+y)^p - x^p - y^p$ – это полином Ли. Это завершает доказательство утверждения в начале задачи.