Комбинаторика, топология и алгебра симплициальных комплексов

Антон Айзенберг*
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
ayzenberga@gmail.com

Введение

Этот курс читался в НОЦ Математического института им. Стеклова весной 2016 года. Тема курса: исследование комбинаторики симплициальных комплексов методами коммутативной и гомологической алгебры и алгебраической топологии. Возникновение и расцвет этой области пришлись на середину 70-х годов прошлого века, когда Ричард Стенли доказал известную в то время Гипотезу о верхней границе, используя принципиально новый метод. Его идея была такова: каждому симплициальному комплексу K можно сопоставить коммутативное кольцо $\Bbbk[K]$, причем топологические свойства симплициального комплекса находят отражение в алгебраических свойствах этого кольца. Из свойств кольца $\Bbbk[K]$ в свою очередь делаются выводы о комбинаторной структуре исходного комплекса K. Эта идея оказалась чрезвычайно плодотворной: новые сильные результаты, опирающиеся на нее, появляются до сих пор.

Чтобы добавить немного конкретики, приведем основной мотивирующий пример. Пусть K — произвольная триангуляция d-мерной сферы, и f_i — число i-мерных симплексов в этой триангуляции. Какими свойствами обладает набор чисел $(f_0, f_1, \cdots, f_d)$? Многие нетривиальные соотношения на числа f_i удается вывести алгебраически, однако описание всех возможных соотношений — открытый вопрос. Аналогичный вопрос можно поставить про триангуляции произвольных многообразий, про триангуляции, обладающие дополнительными свойствами (например про триангуляции, допускающие шахматную раскраску), либо, наоборот, про более общие клеточные разбиения.

Теория колец Стенли–Райснера кажется идеальным кандидатом для серии лекций: в ней сочетаются элементарные формулировки и совершенно нетривиальные идеи и техники доказательств. Имея запас прозрачных мотивирующих примеров из комбинаторики, можно безболезненно освоить многие важные понятия из алгебры и топологии. Наконец, эта область привлекает наличием большого числа открытых гипотез и предположений.

*Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00414).

Курс состоит из основного массива текста, посвященного комбинаторике симплициальных комплексов и двух приложений: топологического (§A) и алгебраического (§B). Топологическое сведения приведены очень схематично — для более подробного изучения подходит любая книга по алгебраической топологии. Для понимания большей части курса достаточно знать, что такое гомологии и эйлерова характеристика. В алгебраическом приложении подробностей чуть больше: для многих технических — но не совсем уж стандартных — утверждений приведены доказательства, или по крайней мере обрисованы основные идеи. Зачастую общность формулировок приносится в жертву краткости: например, большая часть алгебраической теории может быть успешно сформулирована для произвольных локальных колец, но, поскольку для комбинаторики нужны лишь градуированные алгебры, мы только их и рассматриваем. Так или иначе, основная тема курса — комбинаторика, поэтому читатель может смело игнорировать оба приложения, — во всяком случае до тех пор, пока не встретит в тексте незнакомое понятие или утверждение.

Я хотел бы поблагодарить научно-образовательный центр МИАН за предоставленную возможность прочитать этот курс и за работу по его техническому сопровождению. Я крайне признателен Ивану Лимонченко, прочитавшему за меня две лекции, — так получилось, что как раз в эти дни разбирались темы, в которых он — признанный специалист, поэтому я рад, что их рассказал именно он. Наконец, я благодарен своему научному руководителю Виктору Матвеевичу Бухштаберу: помимо общематематических взглядов и образования, у него я научился искать геометрическую составляющую в любом абстрактном понятии.

Содержание

1 Симплициальные комплексы **4**
- 1.1 Определения, конструкции и примеры 4
- 1.2 Симплициальные комплексы из многогранников 6
- 1.3 Сферы и многообразия 8
- 1.4 Распознаваемость 10

2 Числа граней **12**
- 2.1 Общая характеризация f-векторов 13
- 2.2 h-вектор 13
- 2.3 Соотношения Дена–Соммервилля 14
- 2.4 Неравенства на h-числа сфер 17

3 Алгебры Стенли–Райснера сфер **18**
- 3.1 Ряд Гильберта–Пуанкаре алгебры Стенли–Райснера 19
- 3.2 Векторные раскраски и линейные системы параметров 19
- 3.3 Комплексы Коэна–Маколея 20
- 3.4 M-последовательности 22

3.5 Горенштейновость 22
3.6 g-теорема 23

4 Тор-алгебра симплициального комплекса **25**
4.1 Формула Хохстера 25
4.2 Двойственность Александера в гомологических сферах 29
4.3 Топологическое доказательство теоремы Райснера 29
4.4 Усиления Коэн–Маколеевости 34
4.5 Классическое доказательство теоремы Райснера 35

5 Алгебры Стенли–Райснера многообразий **37**
5.1 Комплексы Буксбаума и теорема Шенцеля 37
5.2 Теоремы Новик–Шварца 38
5.3 Координатное описание идеала Новик–Шварца 40

6 Симплициальные чумы **41**

7 Сбалансированные триангуляции **43**
7.1 Гипотеза Гала 44
7.2 Сбалансированные симплициальные комплексы 45
7.3 Флаговые f- и h-числа 47
7.4 Теорема Кубичке–Мураи 50
7.5 В сторону сбалансированных многообразий 52

8 Комбинаторика градуированных чумов **52**
8.1 Эйлеровы чумы и формула обращения Мёбиуса 53
8.2 Соотношения Байер–Биллеры 55
8.3 cd-индекс 56
8.4 Торический h-вектор 58

A Гомологии и когомологии **59**
A.1 Симплициальные гомологии и когомологии 59
A.2 Сингулярные (ко)гомологии 61
A.3 Комбинаторные следствия 65

B Градуированные алгебры и модули **66**
B.1 Основные определения 66
B.2 Необходимые понятия из гомологической алгебры 69
B.3 Однородные системы параметров и регулярные последовательности . . 74
B.4 Локальные когомологии модулей 80
B.5 Локальная двойственность Гротендика и горенштейновы модули 83

1 Симплициальные комплексы

1.1 Определения, конструкции и примеры

В дальнейшем число элементов множества M обозначается $|M|$ либо $\sharp M$, а 2^M обозначает множество всех подмножеств множества M. Часто будет использоваться обозначение $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Определение 1.1. Симплициальным комплексом на конечном множестве вершин M называется совокупность $K \subset 2^M$ подмножеств множества M, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. если $I \in K$ и $J \subset I$, то $J \in K$;
2. $\varnothing \in K$.

Элементы множества M называются вершинами симплициального комплекса K, элементы $I \in K$ — его симплексами, а если $i \in I$, то говорят, что i есть вершина симплекса I. Множество вершин мы будем иногда обозначать $\mathrm{Vert}(K)$. Число $|I| - 1$ называется размерностью симплекса I и обозначается $\dim I$. Размерность симплициального комплекса K есть по определению максимальная размерность его симплексов. Заметьте, что формально пустой симплекс имеет размерность -1.

Пример 1.2. Симплициальный комплекс размерности 1 — это граф без петель и кратных ребер.

Заметим, что из определения отнюдь не следует, что вершина (рассматриваемая как одноэлементное множество) является симплексом. Назовем вершину $i \in \mathrm{Vert}(K)$ призрачной, если $\{i\} \notin K$. Призрачная вершина не может быть вершиной никакого симплекса в K, как легко следует из определения. Поэтому, как правило, призрачные вершины можно без особого вреда выкинуть. В дальнейшем будет предполагаться, что у симплициального комплекса нет призрачных вершин, а в тех редких случаях, когда призрачные вершины все-таки возникают и избавиться от них не получается, либо не имеет смысла, — это будет специально оговариваться.

Мы привыкли думать о графах в терминах картинок. Полезно также уметь превращать абстрактный симплициальный комплекс в картинку (т.е. в топологическое пространство). Это топологическое пространство (называемое геометрической реализацией симплициального комплекса) можно описать аналогично тому, как это делается с графом: каждой вершине $i \in M$ ставится в соответствие точка e_i, для каждого ребра $\{i, j\} \in K$ рисуется отрезок между e_i и e_j, для каждой тройки $\{i, j, k\} \in K$ рисуется треугольник, натянутый на e_i, e_j, e_k и так далее. Еще, если мы рисуем его в некотором пространстве, то хочется, чтобы этот агрегат не самопересекался, где не следует. Для этого точки e_i надо брать в достаточно общем положении в пространстве достаточно большой размерности, что является мотивацией для следующего определения.

Определение 1.3. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Пусть $e_1, \dots, e_m$ — базис пространства $\mathbb{R}^m$, и пусть $\triangle_I = \mathrm{conv}(e_i \mid i \in I)$ — симплекс, натянутый на базисные векторы, соответствующие индексам из подмножества $I \subset [m]$. Подмножество $R(K) = \bigcup_{I\in K} \triangle_I \subset \mathbb{R}^m$ называется стандартной реализацией симплициального комплекса K. Индуцированная с $\mathbb{R}^m$ топология задает на $R(K)$ структуру компактного топологического пространства. Это топологическое пространство обозначается $|K|$ и называется геометрической реализацией симплициального комплекса K.

Замечание 1.4. Имеется более канонический и прямолинейный способ определить топологическое пространство $|K|$, не использующий никаких вложений (см. конструкцию 6.2).

Определение 1.5. Симплекс $I \in K$ называется максимальным по включению, если не существует такого $J \in K$, что J строго содержит I. Симплициальный комплекс K называется чистым (или размерностно однородным) если все его максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность.

Следующее определение не очень содержательно, но должно присутствовать из соображений строгости.

Определение 1.6. Симплициальные комплексы K и L называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, индуцирующая биекцию между K и L.

Первые примеры Пусть $n\,\mathrm{pt}$ обозначает симплициальный комплекс, состоящий из n точек (формально, $n\,\mathrm{pt} = \{\varnothing, \{1\}, \dots, \{n\}\} \subset 2^{[n]}$). Для простоты, будем писать pt вместо $1\,\mathrm{pt}$.

Обозначим через Δ_M полный симплициальный комплекс на множестве вершин M, т.е. комплекс, содержащий все подмножества множества M ($\Delta_M = 2^M$). Через $\partial\Delta_M$ будем обозначать симплициальный комплекс, который состоит из всех подмножеств множества M кроме самого M ($\partial\Delta_M = 2^M \backslash \{M\}$). Будем называть Δ_M симплексом на множестве M, а $\partial\Delta_M$ — границей симплекса на множестве M.

Читателю предлагается проверить, что стандартная реализация комплекса Δ_M — это действительно симплекс (в выпукло-геометрическом смысле), а стандартная реализация комплекса $\partial\Delta_M$ — это граница симплекса.

Пример 1.7. $\Delta_{[2]}$ — это отрезок, а $\partial\Delta_{[2]}$ — это граница отрезка, т.е. комплекс, состоящий из пары точек: $\partial\Delta_{[2]} = 2\,\mathrm{pt}$. Также имеем $\Delta_{[1]} = 1\,\mathrm{pt}$, а $\partial\Delta_{[1]}$ — это комплекс, состоящий из одной призрачной вершины.

Основные конструкции

Определение 1.8. Пусть K_1 и K_2 — симплициальные комплексы на множествах M_1 и M_2 соответственно. Джойном $K_1 * K_2$ называется симплициальный комплекс на несвязном объединении $M_1 \sqcup M_2$, чьи симплексы имеют вид $I_1 \sqcup I_2 \subset M_1 \sqcup M_2$, где $I_1 \in K_1$, $I_2 \in K_2$.

Симплициальный комплекс $K * \mathrm{pt}$ называется конусом над K (с вершиной конуса pt) и обозначается $\mathrm{Cone}\, K$. Симплициальный комплекс $K*(2\,\mathrm{pt})$ называется надстройкой над K и обозначается ΣK.

Нетрудно проверить, что $|K_1 * K_2| \cong |K_1| * |K_2|$, $|\,\mathrm{Cone}\, K| \cong \mathrm{Cone}\,|K|$ и $|\Sigma K| \cong \Sigma |K|$, где в правой части стоят стандартные топологические операции джойна, конуса и надстройки топологических пространств.

В определениях ниже K — симплициальный комплекс на множестве вершин M.

Определение 1.9. Пусть $l \geqslant 0$ — целое число. Симплициальный комплекс $K^{(l)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{I \in K \mid \dim I \leqslant l\}$ на M называется l-мерным остовом комплекса K.

Определение 1.10. Пусть $J \subset M$ — произвольное подмножество вершин. Симплициальный комплекс $K_J \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{I \in K \mid I \subseteq J\}$ называется полным подкомплексом комплекса K на множестве J.

Определение 1.11. Пусть $I \in K$. Звездой симплекса I в комплексе K называется симплициальный комплекс $\mathrm{star}_K I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{J \subseteq M \mid J \cup I \in K\}$. Линком симплекса I в комплексе K называется симплициальный комплекс $\mathrm{link}_K I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{J \subset M \backslash I \mid J \sqcup I \in K\}$.

Замечание 1.12. Формально, линк — это симплициальный комплекс на множестве $M \backslash I$. Однако на практике часто оказывается, что большинство из этих вершин — призрачные. Это как раз тот случай, когда не жалко все эти призрачные вершины отбросить.

Из формальных определений следует, что $\mathrm{link}_K \varnothing = K$.

Критические для понимания упражнения, которые будут использоваться в дальнейшем:

Упражнение 1.13. $\dim \mathrm{link}_K I \leqslant \dim K - |I|$. Если K чистый, то $\dim \mathrm{link}_K I = \dim K - |I|$.

Упражнение 1.14. $\mathrm{star}_K I = \Delta_I * \mathrm{link}_K I$. В частности, звезда любого непустого симплекса — стягиваема (т.е. ее геометрическая реализация стягиваема).

Упражнение 1.15. Пусть x — точка, лежащая в относительной внутренности (геометрического) симплекса $\triangle_I$. Тогда подпространство $\partial \triangle_I * |\,\mathrm{link}_K I|$ является деформационным ретрактом пространства $|\,\mathrm{star}_K I| \backslash x$

1.2 Симплициальные комплексы из многогранников

Подробную информацию о многогранниках см. в [22, 47].

Определение 1.16. Выпуклая оболочка Q конечного числа точек в $\mathbb{R}^d$ называется выпуклым многогранником. Размерностью многогранника Q называется размерность его аффинной оболочки.

Мы будем считать, что многогранник полноразмерен, т.е. $\dim Q = n$ (иными словами, у многогранника есть внутренние точки). В противном случае, вместо исходного пространства $\mathbb{R}^n$ можно взять аффинную оболочку Q, для которой это верно.

Для многогранника стандартным образом определяется грань[1]. Грани размерности 0 (соотв., 1, $n-1$) называются вершинами (соотв. ребрами, гипергранями) многогранника Q.

Определение 1.17. Многогранник Q называется симплициальным, если все его собственные грани (т.е. все, кроме самого Q) являются симплексами.

Каждый симплициальный многогранник Q позволяет построить симплициальный комплекс, вершины которого суть вершины многогранника, а симплексы — собственные грани Q (плюс пустое множество, конечно). Допуская определенную вольность терминологии, мы будем обозначать этот симплициальный комплекс ∂Q. Вольность объясняется тем, что геометрическая реализация этого комплекса, как нетрудно проверить, совпадает с топологической границей множества $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.18. n-мерный многогранник P называется простым, если каждая его вершина содержится ровно в n ребрах, или, что эквивалентно, ровно в n гипергранях.

Легко проверить, что каждая грань простого многогранника — вновь простой многогранник.

Конструкция 1.19. Имеется конструкция геометрической (или полярной) двойственности. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — многогранник, содержащий начало координат в своей внутренности. Рассмотрим подмножество $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ двойственного пространства, определенное следующим образом:

$$\{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, y\rangle + 1 \geqslant 0 \text{ для всех } y \in P\}.$$

Известно, что P^* — это вновь выпуклый многогранник размерности n, причем частично упорядоченное множество граней P^* совпадает с ч.у. множеством граней P с обращенным порядком. Иными словами, каждой грани $F \subset P$, $\dim F = k$ однозначно соответствует грань $D(F) \subset P^*$, $\dim D(F) = n-k-1$, и при этом $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow D(F_2) \subset D(F_1)$. В частности, вершинам P соответствуют гиперграни P^* и наоборот. Отсюда нетрудно вывести, что многогранники двойственные к симплициальным — простые, а двойственные к простым — симплициальные.

Каждому простому многограннику P можно поставить в соответствие симплициальный комплекс ∂P^* (границу двойственного симплициального многогранника).

В утверждениях и задачах используется следующее соображение. Пусть $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ — гиперграни простого многогранника P, соответствующие вершинам $1, \ldots, m$ симплициального комплекса ∂P^*. Рассмотрим пересечение k различных гиперграней:

[1]Грань — это непустое пересечение Q с опорной гиперплоскостью, либо сам многогранник Q. Опорная гиперплоскость — это такая аффинная гиперплоскость, что Q лежит с одной стороны от нее.

$F_{i_1,\ldots,i_k} = \mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ многогранника P. Имеется альтернатива: либо $F_{i_1,\ldots,i_k} = \varnothing$ (в этом случае подмножество $\{i_1,\ldots,i_k\}$ не является симплексом комплекса ∂P^*), либо $F_{i_1,\ldots,i_k}$ есть грань многогранника P, имеющая коразмерность k (в этом случае $\{i_1,\ldots,i_k\}$ является симплексом комплекса ∂P^* — и это в точности та грань симплициального многогранника P^*, которая соответствует грани $F_{i_1,\ldots,i_k} \subset P^*$). Любая грань простого многогранника однозначно представляется в виде $\mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ для некоторого симплекса $\{i_1,\ldots,i_k\} \in \partial P^*$.

Упражнение 1.20. Разобрать написанное в предыдущем абзаце на примерах: P — трехмерный куб; призма с пятиугольным основанием; додекаэдр.

Упражнение 1.21. $(P^*)^* = P$.

Упражнение 1.22. Пусть P — простой многогранник, и $F \neq \varnothing$ — его грань (как следствие, множество F само по себе является простым многогранником). Пусть $I = D(F) \subset P^*$ — грань симплициального многогранника P^*, соответствующая F. Будем рассматривать I как симплекс симплициального комплекса ∂P^*. Доказать, что симплициальный комплекс ∂F^* изоморфен линку $\operatorname{link}_{\partial P^*} I$

Упражнение 1.23. Декартово произведение двух многогранников — многогранник. Декартово произведение двух простых многогранников — простой многогранник. В этом случае, симплициальный комплекс $\partial(P \times Q)^*$ изоморфен $\partial P^* * \partial Q^*$

Вывод: понятия линка и джойна симплициальных комплексов суть естественные обобщения понятий грани и декартова произведения многогранников.

1.3 Сферы и многообразия

Граница выпуклого симплициального многогранника задает триангуляцию сферы. Однако, существуют более общие симплициальные комплексы, которые во многом похожи на сферы. Границы выпуклых симплициальных многогранников мы будем для простоты называть выпуклыми сферами.

Определение 1.24. Триангуляцией сферы (размерности d) называется симплициальный комплекс K, такой что $|K| \cong S^d$. Триангуляцией многообразия называется симплициальный комплекс K, такой что $|K|$ является топологическим многообразием.

Напомним, что топологическое пространство X называется топологическим многообразием, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$, гомеоморфная открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Также обычно требуется, чтобы X было хаусдорфовым и паракомпактным. Для $|K|$ эти свойства выполнены автоматически.

Пусть $\Bbbk$ — основное кольцо коэффициентов. Везде далее будет предполагаться, что $\Bbbk$ — это поле, либо кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ (причем, в алгебраических разделах $\Bbbk$ всегда будет полем).

Общая информация о сингулярных и симплициальных (ко)гомологиях приведена в Приложении А.

Определение 1.25. Чистый симплициальный комплекс K размерности d называется гомологическим многообразием размерности d над $\Bbbk$ (соотв. ориентируемым, связным и т.д.), если таковым является его геометрическая реализация. Гомологическое многообразие K (над $\Bbbk$) размерности d называется гомологической сферой (над $\Bbbk$), если K имеет гомологии (с коэффициентами в $\Bbbk$) как у d-мерной сферы.

Это определение будет для нас особенно важным, поэтому необходимо более подробное объяснение. Напомним, что (паракомпактное, хаусдорфово) топологическое пространство X называется гомологическим многообразием над $\Bbbk$ размерности d, если для любой точки $x \in X$ выполнено

$$H_j(X, X\backslash x; \Bbbk) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq d; \\ \Bbbk, & \text{если } j = d. \end{cases}$$

Предложение 1.26. *Топологическое многообразие является гомологическим многообразием.*

Доказательство. По определению топологического многообразия, у точки $x \in X$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству $\mathbb{R}^d$. Выберем в этой окрестности маленький открытый шарик B, содержащий x и пусть $Z = X\backslash B$. Тогда, по свойству вырезания, $H_j(X, X\backslash x; \Bbbk) \cong H_j(X\backslash Z, (X\backslash x)\backslash Z; \Bbbk) = H_j(B, B\backslash x; \Bbbk)$. Поскольку шарик B стягиваем, из точной последовательности пары

$$\cdots \to \widetilde{H}_j(B; \Bbbk) \to H_j(B, B\backslash x; \Bbbk) \to \widetilde{H}_{j-1}(B\backslash x; \Bbbk) \to \widetilde{H}_{j-1}(B; \Bbbk) \to \cdots$$

заключаем, что $H_j(B, B\backslash x; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-1}(B\backslash x; \Bbbk)$. Пространство $B\backslash x$ гомотопически эквивалентно $(d-1)$-мерной сфере, а значит его приведенные гомологии тривиальны в размерностях $j \neq d-1$ и изоморфны $\Bbbk$ в размерности $d-1$. Значит $H_j(X, X\backslash x; \Bbbk) = 0$, при $j \neq d$, и $H_d(X, X\backslash x; \Bbbk) = \Bbbk$, что и требовалось доказать. ☐

Замечание 1.27. Приведенное в доказательстве рассуждение должно убедить в справедливости следующего факта: группы $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ описывают свойства пространства X в сколь угодно малой окрестности точки x (т.е. локальные свойства). Поэтому часто группу $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ называют группой локальных гомологий пространства (а $H^*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ — локальными когомологиями).

Итак, чтобы проверить, что некое пространство является гомологическим многообразием, надо перебрать все его точки, и посчитать для каждой из них локальные гомологии. К счастью, когда мы работаем с геометрическими реализациями симплициальных комплексов, достаточно перебирать лишь конечное множество точек.

Для начала сформулируем полезную лемму. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс и $I \in K$, $I \neq \varnothing$. Напомним, что $\triangle_I$ обозначает геометрический симплекс, являющийся подмножеством геометрической реализации $|K|$. Обозначим его относительную внутренность через $\triangle_I^\circ$ (имеем $\triangle_I^\circ = \triangle_I \backslash \bigcup_{J \subsetneq I} \triangle_J$). Тогда для любой точки $x \in |K|$ однозначно определен непустой симплекс, во внутренности которого она лежит.

Лемма 1.28 (см. Prop.2.2.14 в [18]). *Пусть $x \in |K|$ лежит во внутренности симплекса $I \in K$. Тогда $H_j(|K|, |K| \backslash x; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-|I|}(\operatorname{link}_K I; \Bbbk)$.*

Доказательство. Имеем

$$H_j(|K|, |K|\backslash x; \Bbbk) \cong H_j(|\operatorname{star}_K I|, |\operatorname{star}_K I|\backslash x; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-1}(|\operatorname{star}_K I|\backslash x; \Bbbk) \cong \\ \cong \widetilde{H}_{j-1}(\partial\triangle_I * |\operatorname{link}_K I|; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-|I|}(|\operatorname{link}_K I|; \Bbbk). \quad (1.1)$$

Первый изоморфизм — свойство вырезания (из пары $(|K|, |K|\backslash x)$ вырезается дополнение к звезде симплекса I). Второй изоморфизм следует из гомологической точной последовательности пары и того факта, что звезда — стягиваема (упр.1.14). Третий изоморфизм следует из того, что $|\operatorname{star}_K I|\backslash x$ гомотопически эквивалентно $\partial\triangle_I * |\operatorname{link}_K I|$ (упр.1.15). Последний изоморфизм — итерированный изоморфизм надстройки. □

Получаем простой вычислительный критерий, когда симплициальный комплекс является гомологическим многообразием.

Предложение 1.29. *Симплициальный комплекс K размерности d является гомологическим многообразием размерности d тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{H}_j(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } j < d - |I| \\ \Bbbk, & \text{если } j = d - |I|. \end{cases}$$

для всех непустых симплексов $I \in K$, $I \neq \varnothing$.

Доказательство. Заметим, что $\widetilde{H}_j(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) = 0$ при $j > d - |I|$ по соображением размерности (см. упр. 1.13). Остальное следует из Леммы 1.28. □

Предложение 1.30. *Симплициальный комплекс K размерности d является гомологической сферой тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{H}_j(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } j < d - |I| \\ \Bbbk, & \text{если } j = d - |I|. \end{cases}$$

для всех симплексов $I \in K$.

Доказательство. Единственное отличие этого утверждения от предыдущего в том, что пустой симплекс $I = \varnothing$ включен в рассмотрение. Поскольку $\operatorname{link}_K \varnothing = K$, утверждение напрямую следует из определения. □

1.4 Распознаваемость

В предыдущих разделах были определены три класса симплициальных комплексов: выпуклые сферы (границы выпуклых симплициальных многогранников), триангулированные сферы и гомологические сферы. Каждый следующий класс строго содержит предыдущий в размерностях начиная с 3. Для двумерных сфер все эти понятия совпадают — упражнение.

Замечание 1.31. Также за рамками этого спецкурса остается еще один класс — PL-сферы, — являющийся более общим, чем выпуклые сферы, и более частным, чем триангулированные сферы. То, что включения всех классов строгие — нетривиальный факт, о котором можно прочитать, например, в [17]. См. также упражнения в конце этого подраздела.

Хотя триангулированные сферы являются в некотором смысле наиболее естественным классом, их в дальнейшем мы обсуждать не будем. Причин две. Во-первых, большинство утверждений, обсуждаемых далее, имеют гомологическую природу, и уж если они верны для топологических сфер, то как правило верны и для гомологических сфер (а открытые гипотезы открыты для обоих классов одновременно). Во-вторых, топологические сферы нельзя распознать, в отличие от гомологических и выпуклых.

Теорема 1.32 (Теорема Новикова о нераспознаваемости сфер [20, §10])**.** *Пусть $|K|$ — d-мерное многообразие, $d \geqslant 5$. Не существует алгоритма, проверяющего справедливость утверждения $|K| \cong S^d$.*

Иными словами, не существует общего способа определить, является ли симплициальный комплекс топологической сферой. Однако определить, является ли комплекс гомологической сферой, — задача вполне решаемая: достаточно перебрать все линки и для каждого из них посчитать гомологии. Это можно сделать на компьютере и для этого есть разный софт[2].

Задача распознавания выпуклых сфер также алгоритмически разрешима. Верен даже более общий факт. Назовем абстрактной схемой на конечном множестве M произвольный набор S подмножеств множества M, содержащий все одноэлементные подмножества и не содержащий само M. Каждый выпуклый многогранник P задает схему, элементы которой имеют вид $\mathrm{Vert}(F)$, где F — собственная грань P. Такие схемы будем называть реализуемыми. В частности, если многогранник симплициален, то его схема по определению совпадает с симплициальным комплексом ∂P.

Теорема 1.33 (см. [22, sect.5.5])**.** *Существует алгоритм, который определяет, реализуема данная схема при помощи выпуклого многогранника или нет.*

Эта теорема опирается на алгоритм Тарского в математической логике, позволяющий определить истинность или ложность любой замкнутой арифметической формулы первого порядка с вещественными переменными. Вывод Теоремы 1.33 из теоремы Тарского см. в [22]. О теореме Тарского можно прочитать в [30].

Упражнение 1.34. Пусть S — абстрактная схема на конечном множестве $[m]$. Проверьте, что реализуемость этой схемы выпуклым многогранником размерности n эк-

[2]Например, есть среда GAP и в ней есть пакет simpcomp, умеющий вычислять симплициальные гомологии

вивалентна истинности следующей арифметической формулы:

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^n \ \exists x_2 \in \mathbb{R}^n \ \cdots \ \exists x_m \in \mathbb{R}^n \qquad \backslash\backslash\text{существуют точки}$$

$$\left[\mathop{\&}_{I \in S} (\exists l_I \in \mathbb{R}^n \ \exists c_I \in \mathbb{R} \ (\mathop{\&}_{i \in I} (\langle l_I, x_i \rangle + c_I = 0) \& (\mathop{\&}_{i \notin I} \langle l_I, x_i \rangle + c_I > 0))) \right]$$

$$\backslash\backslash\text{существуют опорные гиперплоскости}$$

Упражнение 1.35. Стандартный пример гомологической сферы, не являющейся топологической сферой, — сфера Пуанкаре. Как гладкое многообразие ее можно построить, взяв фактор группы $\mathrm{SO}(3)$ по подгруппе движений, сохраняющих икосаэдр (фактор в смысле действия умножением слева). Обозначим это многообразие через M. Известно, что $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а группа собственных движений икосаэдра изоморфна A_5 — группе четных перестановок пяти элементов. Значит, $\pi_1(M)$ вписывается в короткую точную последовательность групп $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \pi_1(M) \to A_5 \to 1$. Группа $\pi_1(M)$ называется бинарной группой икосаэдра. Известно, что коммутант этой группы совпадает с ней самой, и, поскольку $H_1(M;\mathbb{Z})$ есть абелианизация $\pi_1(M)$, получаем, что $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$. Многообразие M — замкнуто, компактно и ориентируемо, следовательно $H_2(M;\mathbb{Z}) = 0$ и $H_3(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ по двойственности Пуанкаре. Значит, M является гомологической сферой (над $\mathbb{Z}$ и над любым полем). При этом M не гомеоморфно S^3 (фундаментальная группа сферы тривиальна, а у M — нет). Заметим напоследок, что любое компактное гладкое многообразие можно триангулировать, а значит можно считать, что $M = |K|$ для некоторого симплициального комплекса K.

Замечание 1.36. Есть явные примеры триангулированных сфер, не являющихся границами выпуклых многогранников: например, сфера Барнетта и сфера Брюкнера [8]. Более того, зачастую невыпуклые сферы производят китайским методом: сразу много, дешево, но с некоторой долей брака. Например, существует конструкция сферы Бира [12], которая позволяет по любому симплициальному комплексу L построить триангулированную сферу $\mathrm{Bier}(L)$. Подсчитано, что асимптотически эта конструкция производит гораздо больше сфер, чем существует выпуклых симплициальных многогранников (с точностью до эквивалентностей). А это значит, что почти все сферы Бира — невыпуклые. Правда, естественный вопрос "а какие конкретно сферы Бира — невыпуклы?" пока остается открытым.

Пример 1.37. Теорема Кэннона–Эдвардса (см. [17, Теор.2.43 и ссылки]) утверждает, что двукратная надстройка над гомологической сферой является топологической сферой. Используя этот факт и упр. 1.22, доказать, что двукратная надстройка над любой триангуляцией сферы Пуанкаре не является выпуклой сферой.

2 Числа граней

Положим $n = \dim K + 1$. Пусть f_j — число j-мерных симплексов в K. Формально имеем $f_{-1} = 1$ (поскольку пустое множество является симплексом размерности -1). Набор $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ называется f-вектором симплициального комплекса K.

Центральная тема курса такова: какими свойствами обладают f-векторы симплициальных комплексов заданного класса (например, триангуляций сфер или триангуляций многообразий)?

2.1 Общая характеризация f-векторов

Полная характеризация f-векторов всех возможных симплициальных комплексов дается теоремой Катоны–Краскэла–Шутценбергера.

Упражнение 2.1. Пусть N, j — два положительных целых числа. Тогда существует единственный способ записать N в виде

$$N = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{n_k}{k}, \text{ где } n_j > n_{j-1} > \dots > n_k \geqslant k \geqslant 1.$$

Используя запись через биномиальные коэффициенты, описанную в упражнении, определим число

$$N^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n_j}{j+1} + \binom{n_{j-1}}{j} + \dots + \binom{n_k}{k+1}.$$

Теорема 2.2 (Теорема Катоны–Краскэла–Шутценбергера [3])**.** *Последовательность целых чисел $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ является f-вектором симплициального комплекса тогда и только тогда, когда $0 \leqslant f_j \leqslant f_{j-1}^{(j)}$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$.*

Есть менее точный, но легче запоминаемый аналог этой теоремы. Пусть $\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{j!}$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Функция $\binom{x}{j}$ строго возрастает при $x > j-1$.

Теорема 2.3 (Ловаш, [3])**.** *Пусть f_j — f-числа симплициального комплекса K. Пусть $f_{j-1} = \binom{x}{j}$, $x \geqslant j$. Тогда $f_j \leqslant \binom{x}{j+1}$.*

2.2 h-вектор

Определение 2.4. Определим числа $h_0, h_1, \dots, h_n$ по формуле

$$\sum_{j=0}^{n} h_j t^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} f_{j-1}(t-1)^{n-j}, \tag{2.1}$$

где t — формальная переменная. Набор чисел $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ называется h-вектором симплициального комплекса K.

Заметим, что формулу (2.1) можно использовать и в обратную сторону, т.е., зная h-вектор, можно вычислить f-вектор. Таким образом, f- и h-векторы несут одну и ту же информацию, поэтому задача характеризации f-векторов эквивалентна задаче характеризации h-векторов. Однако с h-векторами, как мы убедимся в дальнейшем, намного удобнее работать. Формулу (2.1) можно переписать в виде

$$h_l = \sum_{j \leqslant l} (-1)^{l-j} \binom{n-j}{n-l} f_{j-1}, \qquad f_{l-1} = \sum_{j \leqslant l} \binom{n-j}{n-l} h_j. \tag{2.2}$$

На практике удобно вычислять h-вектор, пользуясь мнемонической схемой:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & f_0 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & f_1 & & & & \\
 & & & & & & x & & y & & & & & \\
 & & 1 & & & & & y-x & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & f_{n-1} \\
h_0 & & h_1 & & h_2 & & & & & & & & h_n &
\end{array}$$

По левой боковой стороне треугольника пишутся единицы, по правой стороне f-вектор, и треугольник заполняется по правилу: под каждыми двумя элементами пишется их разность. В основании треугольника получится h-вектор.

Замечание 2.5. Видно, что в линейном преобразовании, выражающем f-вектор через h-вектор все коэффициенты неотрицательны. У этого факта есть важное следствие. Пусть K и L — два симплициальных комплекса одинаковой размерности и пусть h-вектор K покомпонентно меньше h-вектора L. Тогда f-вектор K также меньше f-вектора L.

Упражнение 2.6. Найти h-вектор симплекса, границы симплекса, границы кросполитопа. Граница кросполитопа — это симплициальный комплекс $(2\,\mathrm{pt}) * (2\,\mathrm{pt}) * \cdots * (2\,\mathrm{pt})$ — джойн n двоеточий. Кросполитоп — это многогранник, двойственный к n-мерному кубу (то есть многомерный аналог октаэдра).

Упражнение 2.7. Выразить h-вектор любой двумерной сферы через число m ее вершин.

2.3 Соотношения Дена–Соммервилля

Теорема 2.8 (Соотношения Дена–Соммервилля для сфер)**.** *Пусть K — гомологическая сфера размерности $n-1$. Тогда $h_j = h_{n-j}$.*

Теорема 2.9 (Обобщенные соотношения Дена–Соммервилля для многообразий)**.** *Пусть K — гомологическое многообразие размерности $n-1$. Тогда*

$$h_{n-j} - h_j = (-1)^j \binom{n}{j} (\chi(K) - \chi(S^{n-1}))$$

Замечание 2.10. Расписав формулу (2.1), легко убедиться, что соотношение $h_0 = h_n$ для сферы превращается в $1 = f_{n-1} - f_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} f_0 + (-1)^n$. Это в точности утверждение, что эйлерова характеристика гомологической $(n-1)$-сферы равна $1 + (-1)^{n-1}$. Аналогично, соотношение Дена–Соммервилля для многообразия, соответствующее $j = 0$, есть просто определение эйлеровой характеристики.

Доказательство. Мы докажем обе теоремы одновременно, используя индукцию. Основная идея — использование производящей функции, причем удобным оказывается использовать производящую функцию от двух переменных. Эта идея восходит к работе [15].

Вначале рассмотрим абелеву группу $\mathcal{SC}_n$, свободно порожденную всеми чистыми симплициальными комплексами размерности $n-1$. Определим гомоморфизм $d\colon \mathcal{SC}_n \to \mathcal{SC}_{n-1}$, задав его на образующих следующим образом:

$$dK \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in \mathrm{Vert}(K)} \mathrm{link}_K\{i\}.$$

Пусть $\mathbb{Z}[\alpha, t]$ — кольцо многочленов от двух переменных и пусть $\mathbb{Z}[\alpha, t]_n$ — его однородная компонента степени n. Каждому симплициальному комплексу K размерности $n-1$ можно поставить в соответствие f-многочлен от двух переменных:

$$F(K) \stackrel{\text{def}}{=} f_{-1}\alpha^n + f_0\alpha^{n-1}t^1 + \cdots + f_{n-1}t^n \in \mathbb{Z}[\alpha, t]_n.$$

Продолжая по линейности, получаем гомоморфизм групп $F\colon \mathcal{SC}_n \to \mathbb{Z}[\alpha, t]_n$.

Лемма 2.11. *Для любого чистого симплициального комплекса K выполнено $F(dK) = \frac{\partial}{\partial t} F(K)$. Иными словами, диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{SC}_n & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z}[\alpha, t]_n \\
\Big\downarrow{\scriptstyle d} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frac{\partial}{\partial t}} \\
\mathcal{SC}_{n-1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z}[\alpha, t]_{n-1}
\end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} F(K) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{I \in K} \alpha^{n-|I|} t^{|I|} = \sum_{I \in K} |I| \alpha^{n-|I|} t^{|I|-1},$$

$$F(dK) = F\left(\sum_{i \in \mathrm{Vert}(K)} \mathrm{link}_K\{i\}\right) = \sum_{i \in \mathrm{Vert}(K)} \sum_{I \in \mathrm{link}_K\{i\}} \alpha^{n-1-|I|} t^{|I|}.$$

Перепишем условие $i \in \mathrm{Vert}(K), I \in \mathrm{link}_K\{i\}$ как $J \in K, i \in J$, где $J = I \sqcup \{i\}$ (J является симплексом комплекса K по определению линка), и, как следствие, $|J| = |I|+1$. Тогда, продолжив предыдущую формулу, получим:

$$F(dK) = \sum_{J \in K, i \in J} \alpha^{n-1-(|J|-1)} t^{|J|-1} = \sum_{J \in K} |J| \alpha^{n-|J|} t^{|J|-1},$$

что совпадает с $\frac{\partial}{\partial t} F(K)$. $\square$

Введем H-многочлен $H(K)(\alpha, t) \overset{\mathrm{def}}{=} F(K)(\alpha - t, t)$. Нетрудно проверить, что $H(K)(\alpha, t) = h_0 \alpha^n + h_1 \alpha^{n-1} t^1 + \cdots + h_n t^n$. Как и ранее, по линейности получаем гомоморфизм $H\colon \mathcal{SC}_n \to \mathbb{Z}[\alpha, t]_n$. Заметим, что при замене $(\alpha, t) \rightsquigarrow (\alpha - t, t)$ дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ переходит в дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t}$, который мы для простоты обозначим ∂. Из Леммы 2.11 следует, что $H(dK) = \partial H(K)$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SC}_n & \xrightarrow{H} & \mathbb{Z}[\alpha, t]_n \\ \Big\downarrow d & & \Big\downarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathcal{SC}_{n-1} & \xrightarrow{H} & \mathbb{Z}[\alpha, t]_{n-1} \end{array}$$

коммутативна.

Теоремы, которые мы хотим доказать, в новых терминах принимают следующий вид: для любой гомологической сферы K выполнено $H(K)(\alpha, t) = H(K)(t, \alpha)$, а для любого многообразия: $H(K)(\alpha, t) - H(K)(t, \alpha) = (\chi(K) - \chi(S^{n-1}) \cdot (t - \alpha)^n$.

Докажем это индукцией по n. База $n = 1$ легко проверяется. Пусть K — гомологическое многообразие размерности $n-1$. Заметим, что линки всех вершин гомологического многообразия являются (по определению!) гомологическими сферами меньшей размерности, а значит по предположению индукции для них выполнены соотношения Дена–Соммервилля. Отсюда получаем, что $\partial H(K)$ является симметрическим многочленом от α и t. Рассмотрим многочлен $Q(\alpha, t) = H(K)(\alpha, t) - H(K)(t, \alpha)$. Поскольку перестановка переменных $\alpha \leftrightarrow t$ переводит оператор $\partial = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t}$ в себя, то легко проверить, что $\partial Q = 0$. Из простейшей теории уравнений в частных производных получаем, что Q есть функция от $t - \alpha$, а поскольку Q — это однородный многочлен степени n, имеем $Q = C(t - \alpha)^n$, где C — некоторая константа. Чтобы найти C, подставим в Q значения $\alpha = 1$, $t = 0$. Получим

$$C \cdot (-1)^n = Q(1, 0) = H(K)(1, 0) - H(K)(0, 1) = F(K)(1, 0) - F(K)(-1, 1).$$

Из определения многочлена F следует, что $F(K)(1, 0) = 1$ и $F(K)(-1, 1) = (-1)^n + (-1)^{n-1}\chi(K)$. Значит, $C = \chi(K) - 1 + (-1)^n = \chi(K) - \chi(S^{n-1})$ и в итоге

$$H(K)(\alpha, t) - H(K)(t, \alpha) = Q(\alpha, t) = (\chi(K) - \chi(S^{n-1}))(t - \alpha)^n,$$

что доказывает соотношения Дена–Соммервилля для многообразий. Если K — гомологическая сфера, то $\chi(K) - \chi(S^{n-1}) = 0$, а значит $H(K)(\alpha, t) = H(K)(t, \alpha)$. Это завершает доказательство шага индукции. $\square$

2.4 Неравенства на h-числа сфер

Следующие две теоремы элементарно формулируются, но в их доказательствах не обойтись без нетривиальной алгебры (насколько мне известно, элементарных доказательств пока не придумано). Доказательствам будет посвящена следующая глава.

Теорема 2.12 (Теорема о неотрицательности)**.** *Все h-числа гомологической сферы неотрицательны.*

Теорема 2.13 (Теорема о верхней границе)**.** *Пусть K — гомологическая сфера размерности $n-1$, имеющая m вершин. Тогда $h_j \leqslant \binom{m-n+j-1}{j}$.*

Замечание 2.14. Заметим, что по определению h-чисел, $h_1 = f_0 - n = m - n$, поэтому в ТВГ неравенство на h_1 на самом деле является равенством.

Обе сформулированные теоремы были вначале доказаны для выпуклых сфер, а для произвольных гомологических сфер в течение какого-то времени оставались гипотезами. Приведем идею доказательства теоремы о неотрицательности для выпуклых сфер.

Неотрицательность в выпуклом случае. Пусть K — граница выпуклого симплициального n-мерного многогранника Q и пусть $P = Q^*$ — двойственный простой многогранник. Будем считать, что P лежит в пространстве $V \cong \mathbb{R}^n$. Линейная функция $\phi\colon V \to \mathbb{R}$ называется функцией Морса (относительно P), если ее значения на всех вершинах многогранника P различны. Фиксируем какую-нибудь функцию Морса (хотя бы одна, очевидно, существует). Ориентируем все ребра многогранника P так, чтобы стрелочки шли от вершины с меньшим значением функции ϕ к вершине с большим значением. В каждой вершине $v \in \mathrm{Vert}(P)$ сходятся n ребер. Скажем, что вершина $v \in \mathrm{Vert}(P)$ имеет индекс j, если из нее выходят j ребер (а входят, следовательно, $n-j$). Тогда утверждается, что количество вершин многогранника P, имеющих индекс j, равно в точности h_j (упр., либо см. [17]). Отсюда следует, что $h_j \geqslant 0$.

Заметим, что из этого соображения и соотношения Дена–Соммервилля доказываются очень просто. Первым делом заметим, что число вершин индекса j не зависит от выбора функции Морса, поскольку это число равно h_j. Теперь заменим функцию Морса ϕ на $-\phi$. В этом случае направления всех стрелочек поменяются, а значит вершины, имевшие индекс j относительно ϕ будут иметь индекс $n-j$ относительно $-\phi$, и следовательно $h_j = h_{n-j}$. □

Замечание 2.15. К теореме о верхней границе необходим комментарий. Будем рассматривать всевозможные выпуклые симплициальные многогранники размерности n. Очевидно, что число граней (какой угодно размерности) можно сделать сколь угодно большим. Однако, если мы фиксируем число вершин $f_0 = m$, то все прочие f-числа уже не могут быть сколь угодно большими. Удивительно, но оказывается, что существует многогранник (размерности n с m вершинами), который максимизирует все f-числа. Он называется циклическим многогранником и строится следующим образом.

Рассмотрим кривую $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (t, t^2, \ldots, t^n)$, называемую кривой моментов. Если $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, то $L(t_1), \ldots, L(t_m)$ — набор различных точек на кривой моментов. Их выпуклая оболочка называется циклическим многогранником и обозначается $C_{n,m}$. Известно, что $C_{n,m}$ — симплициальный многогранник, имеющий ровно m вершин (т.е. ни одна из точек не попадает в выпуклую оболочку остальных), а его комбинаторный тип не зависит от выбора точек на кривой моментов. Оказывается, что для любого симплициального многогранника Q размерности n с m вершинами выполнено $h_j(Q) \leqslant h_j(C_{n,m})$ и, как следствие, (см. замечание 2.5) $f_j(Q) \leqslant f_j(C_{n,m})$.

Предложение 2.16. *$h_j(C_{n,m}) = \binom{m-n+j-1}{j}$ при $j \leqslant [n/2]$ (h-числа при $j > [n/2]$ находятся из соотношений Дена–Соммервилля).*

Доказательство. Известно, что $C_{n,m}$ является смежностным, то есть любые $[n/2]$ его вершин образуют грань (см. [17, Теор.1.15]). Поэтому $f_{j-1} = \binom{m}{j}$ при $j \leqslant [n/2]$. Вычислим h_l при $l \leqslant [n/2]$ по формуле (2.2):

$$h_l = \sum_{j \leqslant l} (-1)^{l-j} \binom{n-j}{n-l} \binom{m}{j} = \binom{m-n+l-1}{l}.$$

Последнее равенство есть нехитрая выкладка, которую можно извлечь, например, перемножив формальные ряды

$$(1+t)^m = \sum_s \binom{m}{s} t^s \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1+t)^{n-l+1}} = \sum_s (-1)^s \binom{n-l+s}{n-l} t^s.$$

□

Долгое время было непонятно, максимизирует ли циклический многогранник f-числа только на классе выпуклых сфер, или же на более общем классе. Теорема о верхней границе утверждает, что циклический многогранник действительно максимизирует h-числа всех сфер. Мы докажем ее алгебраически в следующем параграфе.

3 Алгебры Стенли–Райснера сфер

Рассмотрим алгебру многочленов от m переменных $\Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$. Эта алгебра градуирована, где мы полагаем $\deg v_i = 2$. Для удобства будем обозначать ее $\Bbbk[m]$. Напомним, что как и ранее $n = \dim K + 1$.

Определение 3.1. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Алгеброй Стенли–Райснера симплициального комплекса K называется фактор-алгебра

$$\Bbbk[K] \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk[m]/(v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k},\ \text{где } \{i_1, \ldots, i_k\} \notin K).$$

На этой алгебре имеется естественная градуировка, индуцированная из $\Bbbk[m]$. Каноническое отображение проекции $\Bbbk[m] \to \Bbbk[K]$ делает алгебру Стенли–Райснера модулем над кольцом $\Bbbk[m]$.

3.1 Ряд Гильберта–Пуанкаре алгебры Стенли–Райснера

Предложение 3.2.

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K];t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f_{j-1}t^{2j}}{(1-t^2)^j} = \frac{h_0 + h_1t^2 + \cdots + h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

Доказательство. Мономы, выживающие в $\Bbbk[K]$, имеют вид $v_{i_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_j}^{\alpha_j}$, где $\{i_1,\ldots,i_j\} \in K$. Следовательно, каждый $(j-1)$-мерный симплекс $\{i_1,\ldots,i_j\} \in K$ вносит в ряд Гильберта вклад $\frac{t^{2j}}{(1-t^2)^j}$, откуда следует первое равенство. Второе равенство — следствие из определения h-чисел. □

Следствие 3.3. *Размерность Крулля алгебры $\Bbbk[K]$ равна $n = \dim K + 1$.*

Доказательство. С одной стороны, при $I = \{i_1,\ldots,i_n\} \in K$ имеем алгебраически независимые элементы $v_{i_1},\ldots,v_{i_n} \in \Bbbk[K]$, значит $\dim \Bbbk[K] \geqslant n$. С другой стороны, если бы существовал набор из $s > n$ алгебраически независимых элементов, то функция Гильберта $a(j) = \dim \Bbbk[K]_{2j}$ росла бы как многочлен степени $s-1 > n-1$. Из Предложения 3.2, легко следует, что $a(j)$ растет как многочлен степени не больше $n-1$. □

Упражнение 3.4. Доказать, что $\Bbbk[K * L] \cong \Bbbk[K] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[L]$.

3.2 Векторные раскраски и линейные системы параметров

Как и ранее, K — симплициальный комплекс на $[m]$, $\dim K = n-1$. Пусть $\Bbbk$ — поле. Отображение $\lambda\colon [m] \to \Bbbk^n$ назовем векторной раскраской. Векторная раскраска называется правильной (или характеристической функцией), если для любого симплекса $\{i_1,\ldots,i_s\} \in K$ векторы $\lambda(i_1),\ldots,\lambda(i_s)$ линейно независимы.

Запишем каждый вектор $\lambda(i)$, $i \in [m]$ как вектор-столбец $\lambda(i) = (\lambda_{i,1},\ldots,\lambda_{i,n})^{\perp}$ (в каком-нибудь фиксированном базисе пространства $\Bbbk^n$). Имея прямоугольную матрицу $(\lambda_{i,j})_{i\in[m],j=1,\ldots,n}$ можно определить n линейных элементов алгебры Стенли–Райснера:

$$\theta_j = \lambda_{1,j}v_1 + \lambda_{2,j}v_2 + \cdots + \lambda_{m,j}v_m \in \Bbbk[K]_2, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Конструкцию можно обратить: имея n линейных элементов алгебры Стенли–Райснера, можно построить векторную раскраску.

Предложение 3.5. *Последовательность $\theta_1,\ldots,\theta_n$ является линейной системой параметров в $\Bbbk[K]$ тогда и только тогда, когда $\lambda\colon [m] \to \Bbbk^n$ — правильная векторная раскраска.*

Доказательство. Пусть $I \in K$. Рассмотрим алгебру $\Bbbk[I] = \Bbbk[v_i \mid i \in I]$. Имеем естественный эпиморфизм $p_I\colon \Bbbk[K] \to \Bbbk[I]$, $v_i \mapsto v_i$, если $i \in I$, $v_i \mapsto 0$, иначе. Несложно проверить, что $\bigoplus_{I\in K} p_I\colon \Bbbk[K] \to \bigoplus_{I\in K} \Bbbk[I]$ инъективно. Обозначим $\theta_i^I = p_I(\theta_i) \in \Bbbk[I]_2$.

Пусть векторное пространство $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ конечномерно и $|I| = n$. Тогда $\Bbbk[I]/(\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I)$ тоже конечномерно из сюръективности p_I. Значит $\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I$ должны линейно порождать $\Bbbk[I]_2 = \langle v_i \mid i \in I\rangle$. Это в точности означает, что векторы $\lambda(i)$, $i \in I$ линейно независимы.

Наоборот, если $\lambda(i)$, $i \in I$ линейно независимы, то векторное пространство $\Bbbk[I]/(\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I)$ конечномерно для всех I. Значит $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, которое является подпространством в сумме $\bigoplus_{I \in K} \Bbbk[I]/(\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I)$ тоже конечномерно, а значит $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — система параметров. □

Замечание 3.6. Заметим, что, если $|\Bbbk| = \infty$, то правильная векторная раскраска всегда существует. Действительно, в этом случае в $\Bbbk^n$ можно выбрать сколь угодно много векторов, любые n из которых образуют базис, а значит условие на правильность раскраски будет выполнено автоматически. С другой стороны, существование линейной системы параметров над бесконечным полем следует также из леммы Нетер о нормализации (см. Приложение B).

Замечание 3.7. Над конечными полями правильной раскраски (а заодно и линейной системы параметров) может и не быть. Однако можно рассматривать раскраски со значениями в $\Bbbk^r$, где $r > n$ и спросить, при каком минимальном r они существуют. Полученный аналог хроматического числа исследуется в теории инвариантов Бухштабера, однако, имеет ли он какой-нибудь смысл в терминах алгебры Стенли–Райснера, пока неизвестно.

В дальнейшем мы будем предполагать, что линейная система параметров существует, поскольку всегда можно заменить поле $\Bbbk$ на его бесконечное расширение — все алгебраические конструкции хорошо себя ведут относительно этой операции. Далее $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Bbbk[K]$ всегда обозначает линейную систему параметров.

3.3 Комплексы Коэна–Маколея

Про алгебры и модули Коэна–Маколея и Горенштейна см. Приложение B.

Определение 3.8. Симплициальный комплекс K размерности $n-1$ называется комплексом Коэна–Маколея над $\Bbbk$, если $\widetilde{H}_j(\mathrm{link}_K I; \Bbbk) = 0$ для всех $I \in K$ (включая $I = \varnothing$) и $j < n - 1 - |I|$.

Упражнение 3.9. Комплекс Коэна–Маколея является чистым симплициальным комплексом.

Замечание 3.10. Любая гомологическая сфера является комплексом Коэна–Маколея.

Теорема 3.11 (Теорема Райснера)**.** *K является комплексом Коэна–Маколея над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда $\Bbbk[K]$ является алгеброй Коэна–Маколея.*

Доказательство см. ниже (Предложение 4.11 и §4.5).

Следствие 3.12. *Для комплексов Коэна–Маколея выполнено*

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n);t)=\sum_{j=0}^{n}h_jt^{2j}$$

Доказательство. Поскольку $\Bbbk[K]$ — алгебра Коэна–Маколея, она является градуированным свободным модулем над своей подалгеброй $\Bbbk[\theta_1,\dots,\theta_n]$. Следовательно,

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K];t)=\mathrm{Hilb}\left(\frac{\Bbbk[K]}{(\theta_1,\dots,\theta_n)};t\right)\cdot\mathrm{Hilb}(\Bbbk[\theta_1,\dots,\theta_n];t).$$

Используя равенство $\mathrm{Hilb}(\Bbbk[\theta_1,\dots,\theta_n];t)=\frac{1}{(1-t^2)^n}$ и Предложение 3.2, получаем требуемое. $\square$

Следствие 3.13. *h-числа симплициального комплекса Коэна–Маколея неотрицательны и удовлетворяют неравенствам $h_j\leqslant\binom{m-n+j-1}{j}$.*

Доказательство. h_j равно размерности $2j$-й компоненты алгебры $\Bbbk[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n)$, откуда следует неотрицательность. Коммутативная алгебра $\Bbbk[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n)$ порождена компонентой степени 2, которая имеет размерность $h_1=m-n$. Значит размерность $2j$-й компоненты не превосходит числа коммутативных мономов степени j от $m-n$ переменных. Это число есть в точности $\binom{m-n+j-1}{j}$. $\square$

В итоге, поскольку сферы являются комплексами Коэна–Маколея, мы доказали теорему о неотрицательности и теорему о верхней границе для сфер (Теоремы 2.12 и 2.13).

Упражнение 3.14. Доказать, что любой остов симплекса является комплексом Коэна–Маколея.

Упражнение 3.15. Доказать, что любой остов комплекса Коэна–Маколея является комплексом Коэна–Маколея.

Замечание 3.16. Сферы являются самыми естественными примерами комплеков Коэна–Маколея. В общем, комплекс Коэна–Маколея можно охарактеризовать как комплекс, который гомологичен букету сфер, и все линки которого тоже таковы. С первого взгляда непонятно, откуда еще, кроме как из триангуляций сфер, можно получать такие комплексы. Однако, есть еще один широкий класс примеров: матроиды. Вместо того, чтобы дать определение матроида, лучше приведем частный пример.

Пусть $w_1,\dots,w_m$ — произвольный набор векторов в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем. Определим такой симплициальный комплекс на $[m]$: скажем, что $\{i_1,\dots,i_k\}\in K$ в том и только том случае, когда векторы $w_{i_1},\dots,w_{i_k}$ — линейно независимы. Тогда K — комплекс Коэна–Маколея (см. [38]). Матроиды являются абстрактным обобщением приведенной конструкции.

3.4 М-последовательности

Пусть

$$N = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{n_k}{k}, \text{ где } n_j > n_{j-1} > \dots > n_k \geqslant k \geqslant 1.$$

— разложение числа из упр. 2.1. Определим

$$N^{\langle j\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n_j+1}{j+1} + \binom{n_{j-1}+1}{j} + \dots + \binom{n_k+1}{k+1}, \quad 0^{\langle j\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Теорема 3.17 (Теорема Маколея [37, Th.2.2, Th.2.3])**.** *Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ — последовательность целых чисел. Тогда следующие два условия эквивалентны*

1. $a_0 = 1$ *и* $0 \leqslant a_{j+1} \leqslant a_j^{\langle j\rangle}$, $j \geqslant 1$*;*
2. *существует связная коммутативная градуированная алгебра* $A^* = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j$*, порожденная своей линейной частью* A^1*, такая что* $\dim A^j = a_j$*.*

Последовательности чисел, удовлетворяющие любому из этих условий, называются М-последовательностями (в честь Маколея). Из следствия 3.12 получаем,

Предложение 3.18. *h-вектор комплекса Коэна–Маколея (в частности, гомологической сферы) является М-последовательностью.*

3.5 Горенштейновость

Нам потребуются следующие технические определения

Определение 3.19. Пусть $A = \bigoplus_{j=0}^{d} A_j$ — нульмерная коммутативная (или градуированно коммутативная) алгебра. Тогда A называется алгеброй Пуанкаре формальной размерности d, если $A_d \cong \Bbbk$ и билинейная форма спаривания $\times\colon A_j \times A_{d-j} \to A_d \cong \Bbbk$ невырожденна при всех $j = 0, \dots, d$.

Определение 3.20. Пусть M — фактор-алгебра алгебры $\Bbbk[m]$ и M — алгебра Коэна–Маколея. Алгебра M называется горенштейновой, если $M/\theta M$ — алгебра Пуанкаре для какой-то (эквивалентно: для любой) системы параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.[3]

Определение 3.21. Симплициальный комплекс K называется горенштейновым (над $\Bbbk$), если $K = \Delta_{[s]} * L$, где $\Delta_{[s]}$ — симплекс на $s \geqslant 0$ вершинах, а L — гомологическая сфера (над $\Bbbk$).

Иными словами, горенштейновы комплексы — это гомологические сферы и итерированные конусы над ними.

[3]Подробности и инвариантное определение см. в Приложении B.5

Теорема 3.22 (Теорема Стенли). *Алгебра* $\Bbbk[K]$ *является горенштейновой тогда и только тогда, когда* K *— горенштейнов комплекс над* $\Bbbk$.

Определение (Предложение B.36) гласит, что фактор горенштейновой алгебры по системе параметров является алгеброй Пуанкаре. В связи с этим можно сформулировать удобное уточнение предыдущей теоремы

Теорема 3.23. *Пусть* $\dim K = n-1$. *Алгебра* $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *является алгеброй Пуанкаре формальной размерности* $2d$ *в том и только том случае, когда* $K = \Delta_{[n-d]} * L$, *где* L *—* $(d-1)$*-мерная гомологическая сфера.*

Следствие 3.24. *Пусть* $\dim K = n-1$. *Алгебра* $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *является алгеброй Пуанкаре формальной размерности* $2n$ *в том и только том случае, когда* K *— гомологическая сфера.*

Из невырожденности спаривания в алгебре Пуанкаре получаем, что

$$\dim \Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{2j} = \dim \Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{2(n-j)}.$$

Отсюда следует $h_j = h_{n-j}$. Это есть соотношения Дена–Соммервилля для сфер, доказанные ранее другим методом.

3.6 g-теорема

Из соотношений Дена–Соммервилля следует, что вся информация об f-векторе гомологической сферы содержится в массиве $h_0, h_1, \ldots, h_{[n/2]}$. Пусть $g_0 = 1$ и $g_j = h_j - h_{j-1}$ при $j = 1, \ldots, [n/2]$. Последовательность $(g_0, g_1, \ldots, g_{[n/2]})$ называется g-вектором гомологической сферы. f-вектор можно восстановить по g-вектору.

Следующая теорема является, пожалуй, самым известным и мощным результатом алгебраической комбинаторики.

Теорема 3.25 (g-теорема). *Набор чисел* $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ *является* h*-вектором выпуклой симплициальной сферы размерности* $n-1$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. $h_j = h_{n-j}$ *(соотношения Дена–Соммервилля);*
2. $h_j \geqslant 0$;
3. g*-вектор* $(g_0, g_1, \ldots, g_{[n/2]})$ *является M-последовательностью, иными словами,* $g_0 = 1$ *и* $0 \leqslant g_{j+1} \leqslant g_j^{\langle j \rangle}$ *при* $j = 0, \ldots, [n/2]-1$.

В частности, для выпуклых сфер распределение h-чисел унимодально, т.е. до середины они нестрого возрастают, а потом (из соображений симметрии) нестрого убывают:

$$1 = h_0 \leqslant h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_{[n/2]} = h_{n-[n/2]} \geqslant \cdots \geqslant h_{n-1} \geqslant h_n = 1.$$

Достаточность в g-теореме доказали Биллера и Ли, явно построив симплициальные многогранник, имеющий заданный g-вектор [11]. Необходимость примерно в то же время доказал Стенли [39]. Мы приведем ключевую идею его конструкции.

Определение 3.26. Пусть $A^* = \bigoplus_{j=0}^{n} A^{2j}$ — алгебра Пуанкаре формальной размерности $2n$. Элемент $\omega \in A^2$ называется элементом Лефшеца, если гомоморфизм

$$\times\omega^{n-2j}\colon A^{2j} \to A^{2n-2j}$$

является изоморфизмом при всех $j < n/2$.

Далее ω обозначает элемент Лефшеца. Гомоморфизм $\times\omega^{n-2j}$ из определения представляется в виде последовательности операторов

$$A^{2j} \xrightarrow{\times\omega} A^{2j+2} \xrightarrow{\times\omega} \dots \xrightarrow{\times\omega} A^{2n-2j-2} \xrightarrow{\times\omega} A^{2n-2j}.$$

Значит, для элемента Лефшеца ω гомоморфизм $A^{2j} \xrightarrow{\times\omega} A^{2j+2}$ инъективен при $j < n/2$. Рассмотрим фактор-алгебру $B^* = A^*/(\omega)$. Из сказанного выше легко следует, что $\dim B^0 = 1$ и $\dim B^{2j} = \dim A^{2j} - \dim A^{2j-2}$ при $j \leqslant n/2$. Кроме того, если алгебра A^* порождена своей компонентой степени 2, то то же самое верно и для алгебры B^*. Получаем

Предложение 3.27. *Пусть алгебра Пуанкаре A^* формальной размерности $2n$ порождена своей компонентой A^2 и в ней существует элемент Лефшеца. Обозначим $\dim A^{2j}$ через d_j. Тогда $d_j = d_{n-j}$ и*

$$1 = d_0 \leqslant d_1 \leqslant \dots \leqslant d_{[n/2]} = d_{n-[n/2]} \geqslant \dots \geqslant d_{n-1} \geqslant d_n = 1.$$

Кроме того, последовательность $1, d_1 - d_0, d_2 - d_1, \dots, d_{[n/2]} - d_{[n/2]-1}$ является M-последовательностью.

Значит, чтобы доказать, что для выпуклой сферы K выполнены условия (1)-(3) g-теоремы, достаточно доказать, что в алгебре Пуанкаре $\Bbbk[K]/(\theta_1, \dots, \theta_n)$ существует элемент Лефшеца. Это и доказал Стенли. Сформулируем более точное утверждение.

Пусть P — простой многогранник (какой-нибудь), двойственный к выпуклой сфере K. Для любого $i \in [m]$ фиксируем (какую-нибудь) внешнюю нормаль $\lambda(i) \in \mathbb{R}^n$ к гиперграни $F_i \subset P$. Тогда многогранник P задается в виде

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle\lambda(i), x\rangle \leqslant c_i\}.$$

Числа $c_i \in \mathbb{R}$ называются опорными числами многогранника P. Заметим, что выбор нормали для каждой гиперграни задает отображение $\lambda\colon [m] \to \mathbb{R}^n$, являющееся правильной векторной раскраской для симплициального комплекса K (действительно, если $\{i_1, \dots, i_s\} \in K$, то соответствующие гиперграни $F_{i_1}, \dots, F_{i_s}$ пересекаются трансверсально, и их нормали линейно независимы). Значит, в $\mathbb{R}[K]$ можно выделить систему параметров $\theta_1, \dots, \theta_n$, соответствующую этой раскраске (см. Предложение 3.5).

Теорема 3.28. *Пусть K — выпуклая симплициальная сфера, $(\theta_1, \dots, \theta_n) \subset \mathbb{R}[K]$ — линейная система параметров, а $c_1, \dots, c_m$ — опорные числа, определенные выше. Тогда элемент $c_1v_1 + \dots + c_mv_m$ является элементом Лефшеца в алгебре $\mathbb{R}[K]/(\theta_1, \dots, \theta_n)$.*

Замечание 3.29. В изначальном подходе, предложенном Ричардом Стенли, требуется, чтобы двойственный простой многогранник P был целочисленным (т.е. все его вершины имеют целые координаты), а функция $\lambda\colon [m] \to \mathbb{R}^n$ сопоставляла каждой гиперграни ее примитивную нормаль (т.е. целочисленный вектор, координаты которого взаимно просты в совокупности). Эти условия не являются сильным ограничением, т.к. любой простой многогранник можно вначале немного пошевелить, чтобы он стал рациональным, а потом гомотетировать, чтобы он стал целочисленным. При описанных условиях простому многограннику P можно сопоставить проективное торическое многообразие X_P, являющееся орбифолдом. Алгебру $\mathbb{R}[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ можно отождествить с алгеброй когомологий многообразия X_P, а существование элемента Лефшеца в этой алгебре следует из сильной теоремы Лефшеца, известной в алгебраической геометрии.

В настоящее время известны несколько доказательств, не использующих (во всяком случае, в явном виде) теорему Лефшеца, см. [13], [44]. В геометрических доказательствах целочисленность многогранника уже не требуется, поэтому мы сформулировали Теорему 3.28 в наиболее общем и естественном виде. В курсе мы эту теорему доказывать не будем.

Теперь сформулируем основную открытую гипотезу в комбинаторной теории симплициальных комплексов.

Гипотеза 3.30 (g-гипотеза). *h-вектор гомологической сферы удовлетворяет условиям (1)-(3) g-теоремы.*

Иными словами, если рассматривать класс гомологических сфер вместо выпуклых, то никаких новых h-векторов мы не получим. Эта гипотеза оказалась крепким орешком: она проверена для большого класса сфер, но никаких достаточно общих результатов по ней не получено. Гипотеза открыта даже для более узкого класса топологических сфер (и даже для PL-сфер).

Упражнение 3.31. Допустим, что в алгебре Пуанкаре A^* есть элемент Лефшеца. Тогда почти любой элемент A^2 является элементом Лефшеца. Здесь "почти любой" означает — любой вне алгебраического подмножества положительной коразмерности.

Упражнение 3.32. Пусть K — гомологическая сфера и в алгебре $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ есть элемент Лефшеца. Тогда для почти любой линейной системы параметров $(\theta'_1, \ldots, \theta'_n) \subset \Bbbk[K]_2$ в алгебре $\Bbbk[K]/(\theta'_1, \ldots, \theta'_n)$ есть элемент Лефшеца.

4 Тор-алгебра симплициального комплекса

4.1 Формула Хохстера

Алгебра Стенли–Райснера $\Bbbk[K]$ является модулем над алгеброй $\Bbbk[m]$. Основное поле $\Bbbk$ тоже является алгеброй и модулем над $\Bbbk[m]$. Значит (см. Приложение B),

$$\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$$

является биградуированной алгеброй. Будем вкратце называть ее Тор-алгеброй симплициального комплекса. Ближайшая цель — описать ее структуру.

Введем дополнительную градуировку в алгебрах $\Bbbk[m]$ и $\Bbbk[K]$: положим $\operatorname{bideg} v_i = (2,0)$. Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda[m] = \Lambda_{\Bbbk}[u_1, \ldots, u_m]$, в которой биградуировка задана правилом $\operatorname{bideg} u_i = (2,-1)$.

Теорема 4.1. *1. (Бухштабер–Панов) Имеют место изоморфизмы алгебр*

$$\operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) \cong H^*(\Bbbk[K] \otimes \Lambda[m], d) \cong H^*\left(\frac{\Bbbk[K] \otimes \Lambda[m]}{(u_i v_i = v_i^2 = 0)}, d\right),$$

где дифференциал d имеет бистепень $(0,-1)$, определен на образующих правилом $du_i = v_i$, $dv_i = 0$ и удовлетворяет формуле Лейбница.

2. (Хохстер) При всех i, j имеют место аддитивные изоморфизмы

$$\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) \cong \bigoplus_{J \subseteq [m], |J| = j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J; \Bbbk).$$

3. (Баскаков) Умножение в Тор-алгебре задается следующим образом: произведение элементов $a \in \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J; \Bbbk) \subset \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ и $a' \in \widetilde{H}^{j'-i'-1}(K_{J'}; \Bbbk) \subset \operatorname{Tor}^{-i',2j'}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ равно нулю, если $J \cap J' \neq \varnothing$; в противном случае оно дается композицией

$$\widetilde{H}^{j-i-1}(K_J; \Bbbk) \otimes \widetilde{H}^{j'-i'-1}(K_{J'}; \Bbbk) \to \widetilde{H}^{(j+j')-(i+i')-1}(K_J * K_{J'}; \Bbbk) \to \widetilde{H}^{(j+j')-(i+i')-1}(K_{J \sqcup J'}; \Bbbk),$$

где первый гомоморфизм есть отображение Кюннета в когомологиях джойна, а второй гомоморфизм индуцирован естественным включением $K_{J \sqcup J'} \hookrightarrow K_J * K_{J'}$.

Доказательство. (1) Из общих соображений (см. Предложение B.6) следует, что

$$\operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) \cong H^*(R(K), d),$$

где $R(K) = \Bbbk[K] \otimes \Lambda[m]$. Обозначим $R^*(K) = \dfrac{\Bbbk[K] \otimes \Lambda[m]}{(u_i v_i = v_i^2 = 0)}$. Обе алгебры $R(K)$ и $R^*(K)$ являются биградуированными дифференциальными алгебрами, и имеет место естественный эпиморфизм $\varrho\colon R(K) \to R^*(K)$. Алгебра $R^*(K)$ является конечномерным векторным пространством с базисом $u_J v_I = \bigwedge_{j \in J} u_j \prod_{i \in I} v_i$, где $I \in K$, $J \subseteq [m]$, $I \cap J = \varnothing$. Рассмотрим вложение градуированных векторных пространств $\imath\colon R^*(K) \to R(K)$, которое посылает моном $u_J v_i$ в одноименной моном алгебры $R(K)$ (это отображение ни в коем случае не гомоморфизм алгебр!).

Лемма 4.2. *Гомоморфизм $\varrho\colon R(K) \to R^*(K)$ индуцирует изоморфизм в когомологиях алгебр.*

Доказательство. Можно явно алгебраически построить коцепную гомотопию между $\imath \circ \varrho\colon R(K) \to R(K)$ и $\mathrm{id}\colon R(K) \to R(K)$ (см.[18, Lem.3.2.6]), но мы поступим по-другому.

Определение 4.3 (Полиэдральная степень)**.** Пусть $A \subset X$ — пара CW-комплексов, а K — симплициальный комплекс на $[m]$. Для $I \subset [m]$ рассмотрим $U_I = \prod_{i=1}^{m} Y_i \subseteq X^m$, где $Y_i = \begin{cases} X, & \text{если } i \in I, \\ A, & \text{если } i \notin I \end{cases}$. Пространство $\mathcal{Z}_K(X, A) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{I \in K} U_I \subset X^m$ называется *полиэдральной степенью* (или K-степенью) пары (X, A).

Пространство $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ называется *момент-угол комплексом* симплициального комплекса K.

На паре (D^2, S^1) можно ввести естественную клеточную структуру, имеющую одну нульмерную, одну одномерную и одну двумерную клетки, которые мы обозначаем $1, T, D$ соответственно. Эта структура индуцирует клеточную структуру на $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$, в которой клетки имеют вид $D^I \times T^J \times 1^{[m]\setminus(I \sqcup J)}$, где $I \in K$, $J \subset [m]$, $I \cap J = \varnothing$. Заметим, что $\partial D = T$, $\partial T = 0$. Отсюда несложно вывести, что модуль клеточных коцепей пространства $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ совпадает с $R^*(K)$.

Теперь рассмотрим пространство $\mathcal{Z}_K(S^\infty, S^1)$. Снабдим S^∞ клеточной структурой, с одной клеткой в каждой размерности, а именно скажем, что $S^\infty = \lim S^{2k+1}$, где $S^{2k+1} = (S^{2k-1} \cup_f D^{2k}) \cup_g D^{2k+1}$; отображение $f\colon \partial D^{2k} \to S^{2k-1}$ тождественно (степени 1), а $g\colon \partial D^{2k+1} \to D^{2k}$ — проекция на экваториальную плоскость (степени 0). Такая клеточная структура на паре (S^∞, S^1) индуцирует клеточную структуру на $\mathcal{Z}_K(S^\infty, S^1)$. Модуль клеточных коцепей этой структуры совпадает с R_K. Отображение вложения $D^2 \to S^\infty$ является клеточным и индуцирует гомоморфизм $\varrho\colon R_K \to R_K^*$.

Заметим теперь, что пара (D^2, S^1) является относительным гомотопическим ретрактом пары (S^∞, S^1) (пространство S^∞ стягиваемо), а значит $\mathcal{Z}_K(S^\infty, S^1) \simeq \mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ (это нужно строго доказывать, см.[18, Prop.4.2.3], но поверить в это не сложно). Значит ϱ индуцирует изоморфизм в когомологиях.[4] $\square$

(2) Фиксируем $J \subseteq [m]$. Рассмотрим подпространство $R_K^*(J)$ пространства R_K^*, порожденное мономами вида $u^{J\setminus I} v^I$ при $I \subset J$. Заметим, что

$$d(u^{J\setminus I} v^I) = \sum_{i \in I} \pm u^{J\setminus I \sqcup \{i\}} v^{I\setminus i}.$$

Поэтому $R_K^*(J)$ инвариантно относительно дифференциала и следовательно

$$\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-i,2j}(\Bbbk[K], \Bbbk) = H^{-i,2j}(R_K^*, d) \cong \bigoplus_{J \subseteq [m], |J| = j} H^{-i,2j}(R_K^*(J), d).$$

Элемент $u^{J\setminus I} v^I \in R_K^*(J)$ имеет полную градуировку $(2|J|, -|J| + |I|)$.

[4] На самом деле, верно более сильно сильное утверждение: $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbb{Z})$ и $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[m]}^{*,*}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z})$ изоморфны как кольца.

Рассмотрим модуль клеточных коцепей $\mathcal{C}^j(K_J;\Bbbk)$ полного подкомплекса K_J. Пусть ω_I — коцепь, принимающая значение 1 на симплексе I и 0 на всех остальных. Построим линейный гомоморфизм $A_J\colon R^*_K(J)\to\mathcal{C}^*(K_J;\Bbbk)$, посылающий $u^{J\setminus I}v^I$ в ω_I. Видно[5], что $A_J(du^{J\setminus I}v^I)=\delta A(u^{J\setminus I}v^I)$. Поэтому A_J устанавливает изоморфизм дифференциальных комплексов, а значит и их когомологий. A_J переводит элемент $u^{J\setminus I}v^I$ степени $|J|+|I|$ в элемент ω_I степени $|I|-1$, то есть понижает степень на $|J|+1$. Значит $H^{-i,2|J|}(R^*_K(J),d)\cong H^{|J|-i-1}(K_J;\Bbbk)$. В конечном итоге,

$$\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)\cong\bigoplus_{J\subseteq[m],|J|=j}H^{j-i-1}(K_J;\Bbbk).$$

(3) Для доказательства формулы Баскакова надо рассмотреть произведение мономов $u^{J_1\setminus I_1}v^{I_1}\ u^{J_2\setminus I_2}v^{I_2}$ и посмотреть куда эти мономы переходят при изоморфизмах $A_J\colon R^*_K(J)\to\mathcal{C}^*(K_J;\Bbbk)$, описанных в предыдущем пункте. $\square$

Ранги $\beta^{-i,2j}=\dim_\Bbbk\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ называются биградуированными числами Бетти алгебры $\Bbbk[K]$ (или симплициального комплекса K, хотя тут может возникнуть путаница с обычными топологическими числами Бетти).

Оказывается, биградуированные числа Бетти содержат огромное количество информации о комбинаторике, топологии и алгебре K, как показывают следующие утверждения.

Утверждение 4.4. $\beta^{-i,2m}=\beta_{2m-i-1}(K)$

Доказательство. Применение формулы Хохстера в чистом виде. $\square$

Утверждение 4.5. *Пусть* $n=\dim K+1$.

$$\sum_{i,j}(-1)^i\beta^{-i,2j}t^{2j}=\frac{h_0+h_1t^2+\cdots+h_nt^{2n}}{(1-t^2)^{m-n}}$$

Доказательство. Пусть $R^*\to\Bbbk[K]$ — минимальная резольвента. Стандартный аргумент с эйлеровой характеристикой показывает, что

$$\sum_i(-1)^i\,\mathrm{Hilb}(R^{-i};t)=\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K];t)=\frac{h_0+\cdots+h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n}.\qquad(4.1)$$

Поскольку R^{-i} — свободный модуль, имеющий $\beta^{-i,2j}$ порождающих степени $2j$, имеем

$$\mathrm{Hilb}(R^{-i};t)=\sum_j\frac{\beta^{-i,2j}t^{2j}}{(1-t^2)^m}.\qquad(4.2)$$

Подставив (4.2) в (4.1), получим требуемое. $\square$

Утверждение 4.6. $\mathrm{pdim}\,\Bbbk[K]=\max\{i\mid\sum_j\beta^{-i,2j}\neq0\}$.

Доказательство. Проективная размерность есть длина минимальной резольвенты, а $\sum_j\beta^{-i,2j}$ есть ранг i-го члена минимальной резольвенты. $\square$

[5] тут мы относимся к знакам с традиционной небрежностью

4.2 Двойственность Александера в гомологических сферах

Теорема Аврамова–Голода

Теорема 4.7 (Теорема Аврамова–Голода)**.** *M — горенштейнова алгебра тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M,\Bbbk)$ — алгебра Пуанкаре.*

Вместе с теоремой Стенли (Теорема 3.22) это дает

Следствие 4.8. *K — горенштейнов комплекс тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ — алгебра с двойственностью Пуанкаре.*

В частности, если K — гомологическая сфера, то $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ — алгебра с двойственностью Пуанкаре. Это утверждение можно уточнить

Предложение 4.9. *Пусть K — гомологическая сфера размерности $n-1$ на m вершинах. Тогда $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ является биградуированной алгеброй с биградуированной двойственностью Пуанкаре, причем ее старший (фундаментальный) класс имеет биградуировку $(2m,-(m-n))$.*

Топологически это следует из того факта, что для гомологической сферы K пространство $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ является гомологическим многообразием, а значит его когомологии — алгебра Пуанкаре. Также это хорошо согласуется со следующим утверждением

Теорема 4.10 (Двойственность Александера)**.** *Пусть K — гомологическая сфера размерности n на m вершинах. Пусть $J\subset[m]$. Тогда $\widetilde{H}^{i-1}(K_J)\cong\widetilde{H}_{n-i-1}(K_{[m]\setminus J})$.*

Более подробный обзор этих тем содержится в монографиях Бухштабера–Панова [17, 18].

4.3 Топологическое доказательство теоремы Райснера

Мы докажем теорему Райснера не совсем каноничным способом: используя формулу Хохстера и несложные топологические соображения. Стандартное доказательство использует локальные когомологии модулей — оно более прямолинейное, но требует большей подготовки. Его приведем позже.

Введем несколько технических определений. Для простоты мы будем обозначать $\widehat{J}=[m]\setminus J$ для $J\subseteq[m]$.

Пусть s — неотрицательное целое число. Симплициальный комплекс K называется s-линк-ацикличным (вкратце, s-LA) над $\Bbbk$, если $\widetilde{H}^i(\mathrm{link}_K I;\Bbbk)=0$ для всех симплексов $I\in K$ и $i<s-|I|$. В частности, это означает, что $\widetilde{H}^i(K;\Bbbk)=0$ при $i<s$, поскольку $\mathrm{link}_K\varnothing=K$.

Симплициальный комплекс K называется s-подкомплекс-ацикличным (вкратце, s-SCA) над $\Bbbk$, если $\widetilde{H}^i(K_{\widehat{J}};\Bbbk)=0$ для всех подмножеств $J\in K$ и $i<s-|J|$. Это условие опять же влечет ацикличность самого K: $\widetilde{H}^i(K;\Bbbk)=0$ при $i<s$.

Следующее утверждение может показаться неожиданным

Предложение 4.11. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *K является s-линк-ацикличным комплексом над $\Bbbk$;*

2. *K является s-подкомплекс-ацикличным комплексом над $\Bbbk$;*

3. $\operatorname{depth} \Bbbk[K] \geqslant s+1$.

Прежде чем мы докажем это предложение, поймем, что из него следует теорема Райснера. Действительно, пусть K — чистый комплекс размерности $n-1$. По определению, K является комплексом Коэна–Маколея в том и только том случае, когда K — $(n-1)$-линк-ацикличен. С другой стороны алгебра $\Bbbk[K]$ является алгеброй Коэна–Маколея в том и только том случае, когда $\operatorname{depth} \Bbbk[K] = \dim \Bbbk[K] = n$, что эквивалентно неравенству $\operatorname{depth} \Bbbk[K] \geqslant n$ (поскольку неравенство $\operatorname{depth} \Bbbk[K] \leqslant \dim \Bbbk[K]$ выполнено всегда). Значит Предложение 4.11 при $s = n-1$ это и есть в точности теорема Райснера.

Доказательство. Пусть m — число вершин K.

Эквивалентность (2) и (3). Это следует из формулы Хохстера и теоремы Ауслендера–Буксбаума. Удобно визуализировать:

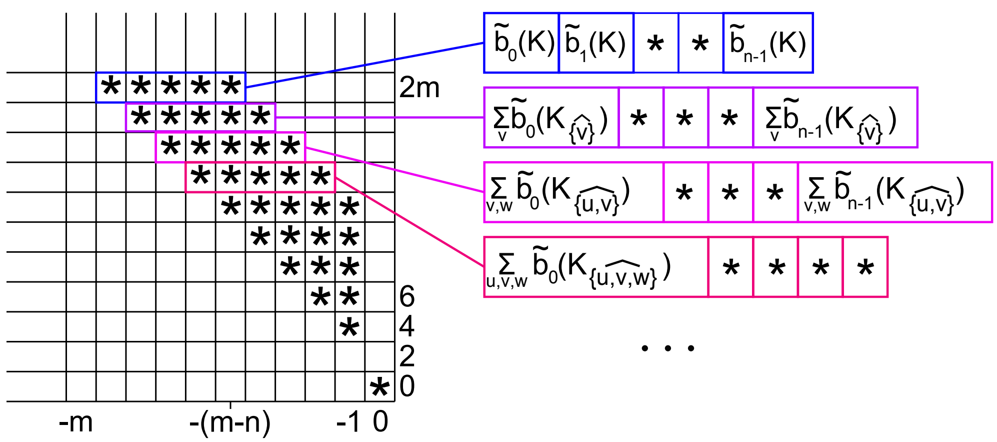

Рис. 1: Вид формулы Хохстера

Действительно, согласно теореме Ауслендера–Буксбаума (Теорема B.16) условие $\operatorname{depth} \Bbbk[K] \geqslant s+1$ эквивалентно условию $\operatorname{pdim} \Bbbk[K] \leqslant m-s-1$. Последнее эквивалентно условию $\operatorname{Tor}^{-i}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) = 0$ при $i \geqslant m-s$ согласно определению минимальной резольвенты. Последнее эквивалентно условию

$$\widetilde{H}^{|J'|-i-1}(K_{J'}; \Bbbk) = 0, \text{ при всех } J' \text{ и } i \geqslant m-s,$$

по формуле Хохстера. Заменяя $J = [m] \backslash J'$, получаем

$$\widetilde{H}^{m-|J|-i-1}(K_{\hat{J}}; \Bbbk) = 0, \text{ при } i \geqslant m-s.$$

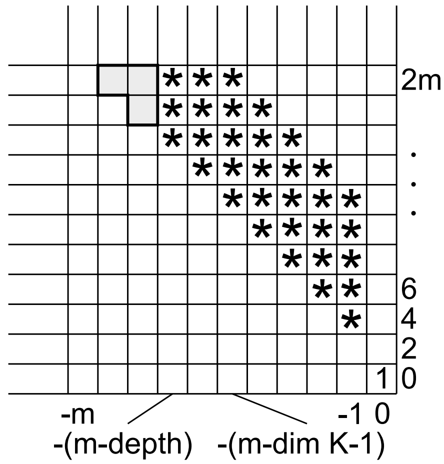

Рис. 2: Глубина и обнуление биградуированных чисел Бетти

Делая замену индекса $p = m - |J| - i - 1$, получаем $\widetilde{H}^p(K_{\widehat{J}};\mathbb{k}) = 0$ при $p \leqslant m - |J| - m + s - 1 = s - 1 - |J|$. Обнуление когомологий и гомологий эквивалентно, поскольку мы работаем над полем $\mathbb{k}$.

Эквивалентность (1) и (2). Оба условия топологические, и доказывать их эквивалентность мы будем топологически. Введем следующий формализм. Пусть V — конечное множество и L — симплициальный комплекс на подмножестве множества V (возможно, на всем V). Пусть Ω обозначает множество всех таких комплексов. Для каждой вершины $i \in V$ определим два оператора, p_i и q_i, действующие на Ω. Положим $p_iL = \operatorname{link}_L i$, если i — вершина L; иначе положим $p_iL = L$. Аналогично, положим $q_iL = L_{\widehat{i}}$, если i — вершина L; и $q_iL = L$ иначе. Заметим, что все линки и полные подкомплексы заданного комплекса K можно получать итерованным применением операторов p_* и q_* к K. Действительно, если $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in K$, то $\operatorname{link}_K I = p_{i_k} \ldots p_{i_1} K$; и если $J = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset V$, то $K_{\widehat{J}} = q_{i_k} \ldots q_{i_1} K$. Во введенных терминах нам требуется доказать эквивалентность следующих условий

(1) Комплекс $q_{i_k} \ldots q_{i_1} K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [m]$;

(2) $p_{i_k} \ldots p_{i_1} K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1, \ldots, i_k\} \in K$.

Здесь t-ацикличность означает обнуление групп приведенных (ко)гомологий в размерностях вплоть до t. В действительности, можно заменить условие (2) на эквивалентное, но более удобное условие:

(2') $p_{i_k} \ldots p_{i_1} K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [m]$.

Заметьте, что $\operatorname{link} I$ не определен для $I \notin K$, однако выражение $p_{i_k} \ldots p_{i_1} K$ имеет смысл для произвольных подмножеств множества V. Эквивалентность (2) и (2') легко понять из следующего соображения. Очевидно, что (2') влечет (2). Докажем обратное. Рассмотрим произвольное выражение $p_{i_k} \ldots p_{i_1} K$. Если i_j является вершиной $p_{i_{j-1}} \ldots p_{i_1} K$ для всех j, то $\{i_1, \ldots, i_k\} \in K$, и доказывать нечего. Иначе, вершина i_j не является вершиной $p_{i_{j-1}} \ldots p_{i_1} K$ для некоторого j. Тогда $p_{i_j} p_{i_{j-1}} \ldots p_{i_1} K = p_{i_{j-1}} \ldots p_{i_1} K$, поэтому можно убрать букву p_{i_j} из выражения. Убрав все неправильные буквы одну за другой, получим, что $p_{i_k} \dots p_{i_1} K = \operatorname{link}_K I'$, где $I' \subset \{i_1, \dots, i_k\}$. Значит, $p_{i_k} \dots p_{i_1} K = \operatorname{link}_K I'$ является $(s - |I'| - 1)$-ацикличным, что есть более сильное условие, нежели $(s - k - 1)$-ацикличность.

Будем доказывать эквивалентность (1) и (2') индукцией по числу k букв p_* и q_* в выражениях. Более точно, докажем эквивалентность следующих трех условий:

(1_N) $q_{i_k} \dots q_{i_1} K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$, $k \leqslant N$;

(2_N) $p_{i_k} \dots p_{i_1} K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$, $k \leqslant N$;

$(*_N)$ $r_{i_k} \dots r_{i_1} K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$, $k \leqslant N$, где r_{i_j} — это либо p_{i_j}, либо q_{i_j} (смешанное условие).

Следующая лемма доказывает базу индукции и является ключевой для шага.

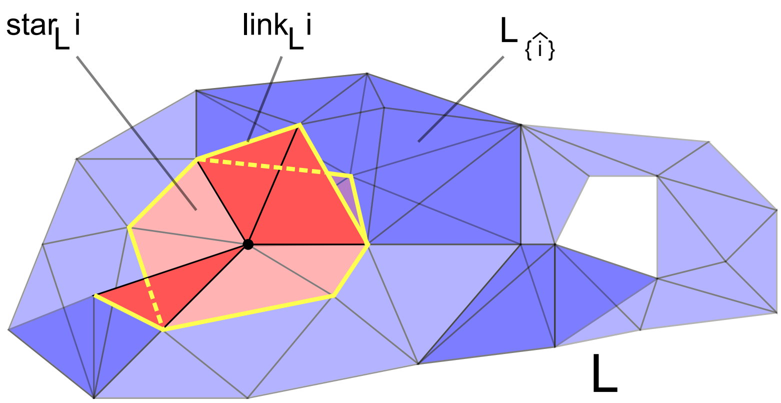

Рис. 3: Связь линка, звезды и полного подкомплекса

Лемма 4.12. *Пусть $L \in \Omega$ и $i \in [m]$. Допустим, что L является t-ацикличным. Тогда $p_i L$ является $(t-1)$-ацикличным тогда и только тогда, когда $q_i L$ является $(t-1)$-ацикличным. Иными словами, $(1_1) \Leftrightarrow (2_1) \Leftrightarrow (*_1)$.*

Доказательство. Если i не является вершиной L, то $p_i L = q_i L = L$, и доказывать нечего. Положим теперь, что i — вершина L. Рассмотрим два подкомплекса: $L_{\hat{i}}$ и $\operatorname{star}_L\{i\}$. Имеем $L_{\hat{i}} \cup \operatorname{star}_L\{i\} = L$ и $L_{\hat{i}} \cap \operatorname{star}_L\{i\} = \operatorname{link}_L\{i\}$ (см.рис.3). Точная последовательность Майера–Вьеториса для этих подмножеств имеет вид

$$\dots \leftarrow \widetilde{H}^{j+1}(L) \leftarrow \widetilde{H}^j(p_i L) \leftarrow \widetilde{H}^j(q_i L) \leftarrow \widetilde{H}^j(L) \leftarrow \dots$$

поскольку $\operatorname{star}_L\{i\}$ стягиваема. При $j \leqslant t-1$, когомологии $\widetilde{H}^{j+1}(L)$ и $\widetilde{H}^j(L)$ зануляются, поэтому $\widetilde{H}^j(p_i L) \cong \widetilde{H}^j(q_i L)$. Следовательно, эти группы зануляются одновременно. $\square$

Докажем, что $(1_N) \Leftrightarrow (2_N) \Leftrightarrow (*_N)$ для произвольного N. Очевидно, что $(*_N) \Rightarrow (1_N), (2_N)$. Мы докажем, что $(1_N) \Rightarrow (*_N)$ индукцией по N.

По индуктивному предположению, $(1_{N-1}) \Leftrightarrow (*_{N-1}) \Leftrightarrow (2_{N-1})$. Докажем импликацию $(1_N) \Rightarrow (*_N)$. По (1_N)-условию, $q_{i_N} q_{i_{N-1}} \dots q_{i_1} K$ является $(s-N-1)$-ацикличным.

Применяя Лемму 4.12 к $q_{i_{N-1}} \dots q_{i_1} K$, получаем, что комплекс $p_{i_N} q_{i_{N-1}} \dots q_{i_1} K$ также является $(s-N-1)$-ацикличным. Это соображение позволяет заменить самую левую букву q в выражении на букву p с тем же индексом. Если бы мы могли сделать то же самое с буквами q во всех позициях, предложение было бы доказано.

Чтобы так сделать, воспользуемся тем, что операторы p_* и q_* коммутируют в большинстве интересных ситуаций. Действительно, пусть i_1, i_2 — две вершины, и r_* — это p_* или q_*. Легко проверить, что $r_{i_1} r_{i_2} L$ либо совпадает с $r_{i_2} r_{i_1} L$, либо сокращается до более короткого выражения.

Значит, для произвольного выражения $r_{i_N} r_{i_{N-1}} \dots r_{i_1} K$ мы можем прокоммутировать буквы так, чтобы p_{i_j} уехала в самую левую позицию. Если нам это удалось, заменим эту букву на q с тем же индексом. За конечное число шагов мы получим слово состоящее только из букв q, которое по предположению $(s-N-1)$-ациклично. Применяя Лемму 4.12 обратным ходом, мы докажем, что $r_{i_N} r_{i_{N-1}} \dots r_{i_1} K$ является $(s-N-1)$-ацикличным.

Если же коммутирование на каком-то шаге не удалось, значит длина слова сократилась. В этом случае $(s-N-1)$-ацикличность выполнена по индуктивному предположению.

Те же самые рассуждения доказывают импликацию $(2_N) \Rightarrow (*_N)$. $\square$

Замечание 4.13. В доказательстве мы индуктивно использовали точную последовательность Майера–Вьеториса. Весь аргумент, однако, можно свернуть в одну спектральную последовательность (спектральную последовательность Зимана в интерпретации МакКрори, либо спектральную последовательность Майера–Вьеториса). Это сделано в работе [31].

Следствие 4.14. *Пусть $X = |K|$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $H_j(X; \Bbbk) = H_j(X, X \backslash x; \Bbbk) = 0$ *при* $j < s$*;*

2. $\operatorname{depth} \Bbbk[K] \geqslant s+1$.

Доказательство. Пункт 1 эквивалентен условию s-LA согласно Лемме 1.28. $\square$

Следствие 4.15. *Если* $|K_1| \cong |K_2|$*, то* $\operatorname{depth} \Bbbk[K_1] = \operatorname{depth} \Bbbk[K_2]$*. Иными словами, глубина кольца Стенли–Райснера является топологическим инвариантом и не зависит от триангуляции.*

Следствие 4.16. *Пусть K — комплекс Коэна–Маколея размерности $n-1$. Тогда граф $K^{(1)}$ является $(n-1)$-связным (то есть не теряет связность при выкидывании любых $n-2$ вершин).*

Доказательство. Пусть $J \subset [m]$, $|J| = n-2$. Связность $K^{(1)}_{\hat{J}}$ эквивалентна связности комплекса $K_{\hat{J}}$, которая эквивалентна обнулению нулевых приведенных гомологий. Но $H^0(K_{\hat{J}}) = 0$ для комплекса Коэна–Маколея, согласно Предложению 4.11. $\square$

4.4 Усиления Коэн–Маколеевости

Известно, что алгебра A над $\Bbbk[m]$ является алгеброй Горенштейна тогда и только тогда, когда последний модуль ее минимальной резольвенты имеет ранг 1. Полагая $\dim K = n-1$, имеем: $\Bbbk[K]$ — горенштейнова алгебра тогда и только тогда, когда $\beta^{-(m-n)} = 1$. Используя это соображение, формулу Хохстера и рассуждения, аналогичные предыдущему пункту, можно доказать теорему Стенли о горенштейновости (Теорему 3.22). Более того, из теоремы Аврамова–Голода (Теорема 4.7) следует, что биградурованные числа Бетти гомологических сфер симметричны. Распределение биградуированных чисел Бетти гомологических сфер выглядит как показано на рис.4.

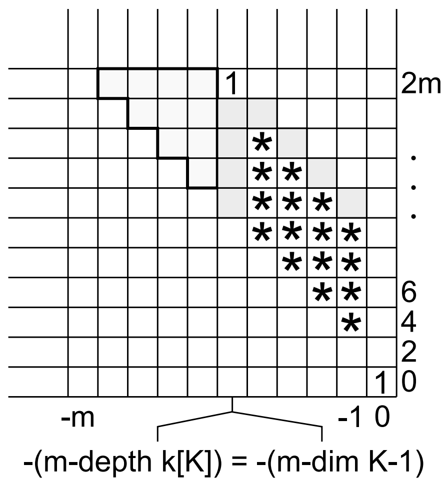

Рис. 4: Биградуированные числа Бетти сферы

Определение 4.17. Симплициальный комплекс K размерности $n-1$ называется s-Коэн–Маколеевским (s-CM), если $K_{\hat{J}}$ является комплексом Коэна–Маколея размерности $n-1$ при $|J| \leqslant s-1$.

Условие 1-CM — это просто Коэн–Маколеевость. Условие s-CM, очевидно, влечет k-CM при $k < s$. Согласно формуле Хохстера, биградуированные числа Бетти k-CM комплекса имеют вид, показанный на рисунке 5.

Порядок связности одномерного остова k-CM комплекса выше чем у просто CM-комплекса

Предложение 4.18. *Пусть K — k-CM комплекс размерности $n-1$. Тогда граф $K^{(1)}$ является $(n+k-2)$-связным (то есть не теряет связность при выкидывании любых $n+k-3$ вершин).*

Доказательство. Очевидно из следствия 4.16. □

Особенно важным и известным в коммутативной алгебре является условие 2-CM, или дважды Коэн–Маколеевость. В гомологических терминах это условие означает,

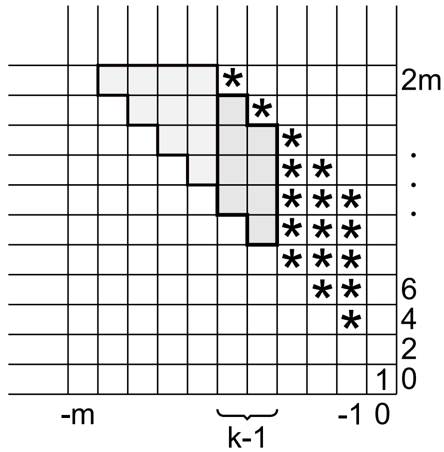

Рис. 5: Биградуированные числа Бетти k-CM комплексов

что последний модуль минимальной свободной резольвенты для $\Bbbk[K]$ порожден элементами одинаковых степеней. Из такой формулировки (либо из сравнения картинок 4 и 5 при $k = 2$), получаем важное утверждение.

Предложение 4.19. *Гомологическая сфера является 2-CM комплексом.*

Из Предложений 4.18 и 4.19 следует

Теорема 4.20 (Аналог теоремы Балински)**.** *Одномерный остов $(n-1)$-мерной гомологической сферы является n-связным графом.*

Замечание 4.21. Теорема Балински утверждает, что реберный граф выпуклого n-мерного многогранника n-связен. Тут допускаются несимплициальные многогранники, но требуется выпуклость. Поэтому ни одно из утверждений не является обобщением другого.

Упражнение 4.22. Придумайте пример $(n-1)$-мерной сферы, одномерный остов которой не $(n+1)$-связен.

Упражнение 4.23. Докажите, что не существует симплициального комплекса, который был бы одновременно 3-CM и гомологической сферой.

4.5 Классическое доказательство теоремы Райснера

В качестве небольшого дополнения докажем теорему Райснера классическим способом — через локальные когомологии.

Удобно пользоваться мультиградуировкой и мультиградуированными функциями Гильберта. Зададим мультиградуировку на $\Bbbk[m]$, полагая $\operatorname{mdeg} v_i = (0, \dots, 2, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^m$, где 2 стоит на i-м месте. Модуль $\Bbbk[K]$ тоже оказывается $\mathbb{Z}^m$-мультиградуированным.

Для мультиградуированного ряда Гильберта мультиградуированного векторного пространства используем обозначение

$$\operatorname{Hilb}(V; t_1, \ldots, t_m) := \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^m} (\dim V_{\bar{k}}) t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m}.$$

Теорема 4.24 (Теорема Хохстера о локальных когомологиях [37, Th.4.1])**.**

$$\operatorname{Hilb}(H^s(\Bbbk[K]); t_1, \ldots, t_m) = \sum_{I \in K} (\dim_{\Bbbk} \widetilde{H}^{s-|I|-1}(\operatorname{link}_K I)) \prod_{i \in I} \frac{t_i^{-2}}{1 - t_i^{-2}}$$

Доказательство. Мы воспользуемся тем, что локальные когомологии $H^j(\Bbbk[K])$ совпадают с когомологиями Чеха $\check{H}^j(v_1, \ldots, v_m; \Bbbk[K])$ (см. Теорему B.27). Распишем комплекс Чеха для модуля $\Bbbk[K]$.

Обозначим для удобства $R = \Bbbk[K]$. Для $I \subset [m]$ пусть R_J обозначает локализацию R по произведению $\prod_{i \in J} v_i$. Заметим, что если $J \notin K$, то $\prod_{i \in J} v_i = 0$ в $\Bbbk[K]$, а значит $R_J = 0$. Если же $J \in K$, то $R_J \cong \Bbbk[\operatorname{link}_K J] \otimes \Bbbk[v_i^{\pm 1} \mid i \in J]$. Пусть $\bar{k} \in \mathbb{Z}^m$, $\operatorname{supp}(\bar{k}) = \{i \in [m] \mid k_i \neq 0\}$, $\operatorname{supp}\_(\bar{k}) = \{i \in [m] \mid k_i < 0\}$. Имеем

$$(R_J)_{\bar{k}} = \begin{cases} \Bbbk, & \text{если } \operatorname{supp}\_(\bar{k}) \subseteq J, \operatorname{supp}(\bar{k}) \in K \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По определению комплекса Чеха, имеем

$$\check{C}^j(v_1, \ldots, v_m; R) = \bigoplus_{J \subset [m], |J| = j} R_J$$

Расщепим комплекс Чеха по мультиградуировкам. Имеем

$$\check{C}^j(v_1, \ldots, v_m; R)_{\bar{k}} = \bigoplus_{\substack{J \in K, |J| = j \\ J \supseteq \operatorname{supp}\_(\bar{k})}} \Bbbk$$

Видно, что комплекс $\check{C}^*(v_1, \ldots, v_m; R)_{\bar{k}}$ совпадает с аугментированным комплексом симплициальных коцепей симплициального комплекса $\operatorname{link}_K(\operatorname{supp}\_\,\bar{k})$, с градуировкой, сдвинутой на $|\operatorname{supp}\_\,\bar{k}| + 1$ (к проверке знаков мы традиционно относимся наплевательски). Значит, в мультиградуировке $\bar{k}$ когомологии Чеха $\check{H}^j(v_1, \ldots, v_m; R)$ совпадают с $\widetilde{H}^{j-|\operatorname{supp}\_\,\bar{k}|-1}(\operatorname{link}_K(\operatorname{supp}\_\,\bar{k}))$. Осталось заменить $\operatorname{supp}\_\,\bar{k}$ на I, и утверждение доказано. □

Из этого утверждения теорема Райснера следует напрямую: по теореме о занулении $\Bbbk[K]$ — модуль Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда $H^j(\Bbbk[K]) = 0$ при $j \neq n$, а это эквивалентно занулению гомологий линков симплициального комплекса K в нужных размерностях.

Эквивалентность пунктов 1 и 3 в Предложении 4.11 отсюда также следует (упражнение).

5 Алгебры Стенли–Райснера многообразий

Предисловие и пример В этом разделе мы переходим к изучению комбинаторики гомологических многообразий. Заметим, что h-числа многообразий вовсе не обязаны быть неотрицательными или симметричными.

Пример 5.1. Минимальная триангуляция двумерного тора показана на рис.6. Ее f-вектор $(f_0, f_1, f_2) = (7, 21, 14)$. Вычисляем: $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 4, 10, -1)$. Видно, что h-вектор несимметричен и не неотрицателен, и вообще непонятно, какими хорошими свойствами он может обладать.

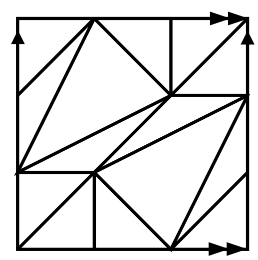

Рис. 6: Минимальная триангуляция тора

5.1 Комплексы Буксбаума и теорема Шенцеля

Еще немного алгебры Пусть M — модуль над A. Последовательность однородных элементов $\theta_1, \ldots, \theta_n \in A$ называется слабо регулярной последовательностью для модуля M, если

$$(\theta_1 M + \cdots + \theta_{j-1} M) : \theta_j = (\theta_1 M + \cdots + \theta_{j-1} M) : A_+$$

для всех $j = 1, \ldots, n$.

Упражнение 5.2. Любая регулярная последовательность является слабо регулярной (указание: см. доказательство теоремы Риса B.14).

Определение 5.3. M называется модулем Буксбаума, если любая однородная система параметров в M является слабо регулярной последовательностью.

Напомним, что модули Коэна–Маколея — это модули, в которых любая однородная система параметров является регулярной последовательностью. Ввиду упр.5.2, модули Буксбаума образуют класс, включающий модули Коэна–Маколея.

Когда алгебра Стенли–Райснера является модулем Буксбаума? Как и ранее, K — чистый симплициальный комплекс на $[m]$, $\dim K = n - 1$.

Определение 5.4. K называется комплексом Буксбаума (над $\Bbbk$), если $\widetilde{H}^j(\mathrm{link}_K I; \Bbbk) = 0$ при $j < n - 1 - |I|$ и $I \neq \varnothing$.

Таким образом, комплексы Буксбаума — это более широкий класс, нежели комплексы Коэна–Маколея. В случае Коэна-Маколея требуется ацикличность K и всех его линков. В случае Буксбаума требуется ацикличность линков, но на сам K условий не накладывается.

Пример 5.5. Любое гомологическое многообразие (возможно даже неориентируемое, возможно даже с краем) является комплексом Буксбаума.

Теорема 5.6 (Шенцель)**.** *K является комплексом Буксбаума над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда $\Bbbk[K]$ является модулем Буксбаума.*

Комбинаторика алгебр Буксбаума Пусть h_j — h-числа комплекса K, а $\widetilde{\beta}_j(K) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}^j(K)$ — его (приведенные) топологические числа Бетти. Определим

$$h'_j = h_j + \binom{n}{j}\left(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{j-s-1}\widetilde{\beta}_{s-1}(K)\right) \text{ при } 0 \leqslant j \leqslant n; \tag{5.1}$$

Теорема 5.7 (Теорема Шенцеля [35])**.** *Пусть K — комплекс Буксбаума размерности $n-1$, $\Bbbk[K]$ — его алгебра Стенли–Райснера, а $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Bbbk[K]_2$ — однородная система параметров. Тогда*

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]/\Theta; t) = \sum_{j=0}^{n} h'_j t^{2j}.$$

Следствие 5.8. *Для комплексов Буксбаума размерности однородных компонент фактор-алгебры $\Bbbk[K]/\Theta$ не зависят от выбора однородной системы параметров (хотя сама фактор-алгебра, конечно, зависит).*

Следствие 5.9. *Для комплексов Буксбаума $h'_j \geqslant 0$.*

Пример 5.10. Для минимальной триангуляции тора, описанной выше, имеем $h'_0 = h_0 = 1$, $h'_1 = h_1 = 4$, $h'_2 = h_2 = 10$, $h'_3 = h_3 + \binom{3}{3}\widetilde{\beta}_1(T^2) = -1 + 2 = 1$.

Замечание 5.11. Вся эта комбинаторика опирается на алгебраическую теорему, доказанную Шенцелем (см.[43, Th.4.1]). Теорема дает характеризацию буксбаумности в гомологических терминах и утверждает следующее. Пусть $n = \dim M$. M является модулем Буксбаума в том и только том случае, когда комплекс $\tau^n\Gamma_{A_+}\widetilde{I}^{\bullet}$ квазиизоморфен некоторому комплексу $\Bbbk$-векторных пространств $C^*(M)$. В этом случае $C^*(M)$ имеет следующий вид: $C^j(M) = H^j(M)$ при $0 \leqslant j < n$, $C^j(M) = 0$, при $j \geqslant n$, а дифференциалы нулевые. Здесь $\widetilde{I}^{\bullet}$ — инъективная резольвента модуля M, а τ^n — обрубание хвоста резольвенты, начинающегося с позиции $n+1$.

5.2 Теоремы Новик–Шварца

В дальнейшем будем для простоты считать, что K связен (все результаты формулируются и для несвязного случая, но формулировки более громоздкие). Следующая серия теорем — относительно недавний прорыв в комбинаторной коммутативной алгебре.

Теорема 5.12 (Новик–Шварц [32]). *Пусть K — комплекс Буксбаума. В векторном пространстве* $\mathrm{Soc}(\Bbbk[K]/\Theta)_{2j}$ *существует подпространство, изоморфное* $\binom{n}{j}\widetilde{H}^{j-1}(K;\Bbbk)$ *(прямой сумме* $\binom{n}{j}$ *копий пространства* $\widetilde{H}^{j-1}(K;\Bbbk)$*).*

Пусть $(I_{NS})_{2n} = 0$ и $(I_{NS})_{2j} \cong \binom{n}{j}\widetilde{H}^{j-1}(K)$ при $j < n$, а $I_{NS} = \bigoplus_j (I_{NS})_{2j} \subset \mathrm{Soc}(\Bbbk[K]/\Theta)$. Определим h”-числа формулой

$$h''_j = h'_j - \binom{n}{j}\widetilde{\beta}_{j-1}(K) = h_j + \binom{n}{j}\left(\sum_{s=1}^{j}(-1)^{j-s-1}\widetilde{\beta}_{s-1}(K)\right) \tag{5.2}$$

при $0 \leqslant j \leqslant n-1$, и $h''_n = h'_n$. Предполагается, что сумма по пустому множеству равна 0. Имеем

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS};t) = \sum_{j=0}^{n} h''_j t^{2j}.$$

Следствие 5.13. *h”-числа комплекса Буксбаума неотрицательны.*

Это, очевидно, более сильное условие, чем неотрицательность h’-чисел. Для гомологических сфер (и, более общо, комплексов Коэна–Маколея) имеем $h_j = h'_j = h''_j$.

Теорема 5.14 (Новик–Шварц [33]). *Пусть K — ориентируемое связное гомологическое многообразие. Тогда $I_{NS} = \mathrm{Soc}(\Bbbk[K]/\Theta)$ в размерностях меньших $2n$. Более того, $\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS}$ является алгеброй Пуанкаре (эквив. горенштейновой алгеброй).*

Следствие 5.15 (Эквивалентная форма соотношений Дена–Соммервилля). *Для ориентируемого связного гомологического многообразия K выполнено $h''_j = h''_{n-j}$.*

Упражнение 5.16. Вывести $h''_j = h''_{n-j}$ для ориентируемых многообразий из Теоремы 2.9.

Пример 5.17. Для минимальной триангуляции тора имеем $h''_0 = h'_0 = 1$, $h''_1 = h'_1 = 4$, $h''_2 = h'_2 - \binom{3}{2}\widetilde{\beta}_1(T^2) = 10 - 6 = 4$, $h''_3 = h'_3 = 1$. Итого, фактор-алгебра $\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS}$ имеет размерности компонент $(1,4,4,1)$.

Замечание 5.18. Каждому ориентируемому замкнутому многообразию можно сопоставить алгебру когомологий. Она является алгеброй Пуанкаре и гомотопическим инвариантом. Если же на многообразии фиксирована триангуляция, то можно построить алгебру Пуанкаре $\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS}$, которая уже сильно зависит от триангуляции и имеет более сложную структуру. В каком-то смысле алгебру $\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS}$ можно воспринимать как вторичную алгебру Пуанкаре многообразия.

Гипотеза 5.19 (Обобщенная g-гипотеза (гипотеза Калая)). *Пусть K — ориентируемое связное гомологическое многообразие.*

(Сильная версия) В $\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS}$ существует элемент Лефшеца.

(Слабая версия) h”-числа комплекса K удовлетворяют условиям g-теоремы.

Мне с трудом верится, что это может быть правдой, но контрпримеры к этой гипотезе, тем не менее, как и для сфер, пока не найдены.

5.3 Координатное описание идеала Новик–Шварца

Напомним, что линейным системам параметров в $\Bbbk[K]$ соответствуют правильные векторные раскраски вершин комплекса K, то есть функции $\lambda\colon \mathrm{Vert}(K) \to \Bbbk^n$.

Упражнение 5.20. Пусть K — чистый симплициальный комплекс размерности $n-1$, а $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ — линейная система параметров. Докажите, что мономы без квадратов вида $v_I = v_{i_1} \cdots v_{i_j}$, где $I = \{i_1, \dots, i_j\} \in K$, линейно порождают алгебру $\Bbbk[K]/\Theta$.

Естественный вопрос: какие существуют линейные соотношения на элементы v_I в алгебре $\Bbbk[K]/\Theta$?

Фиксируем на симплексах $I \in K$ ориентации (т.е. укажем, какой порядок вершин симплекса I считается положительным, а какой отрицательным с естественным условием, что четная перестановка сохраняет знак, а нечетная — меняет). Пусть $\sigma \in \mathcal{C}^{j-1}(K)$ — симплициальная коцепь, то есть функция на ориентированных симплексах K, имеющих j вершин.

Рассмотрим внешнюю алгебру на пространстве $\Bbbk^n$. Пусть $\Lambda^j \Bbbk^n$ — ее компонента, порожденная формами степени j. Для симплекса I с положительно упорядоченными вершинами $(i_1, \dots, i_j)$ рассмотрим форму

$$\lambda_I = \lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_j} \in \Lambda^j \Bbbk^n.$$

Гипотеза 5.21 (Гипотеза Мураи — из неформального обсуждения)**.** *Линейные соотношения на элементы $\{v_I \mid I \in K, |I| = j\}$ в пространстве $(\Bbbk[K]/\Theta)_{2j}$ имеют вид*

$$\sum_{I \in K, |I|=j} \sigma(I)\langle \omega, \lambda_I \rangle,$$

где σ пробегает по подпространству $B^{j-1}(K)$ симплициальных кограниц, а ω пробегает по $(\Lambda^j \Bbbk^n)^*$.

Замечание 5.22. Тот факт, что соотношения $\sum_{I \in K, |I|=j} \sigma(I)\langle \omega, \lambda_I \rangle$ имеют место — муторная, но не очень концептуальная проверка (упражнение со звездочкой). Вопрос в том, что все соотношения исчерпываются этими.

Теорема 5.23 ([5, 6])**.** *Пусть $\Bbbk = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$, и K — ориентируемое гомологическое многообразие.*

(1) Линейные соотношения на элементы $\{v_I \mid I \in K, |I| = j\}$ в пространстве $(\Bbbk[K]/\Theta)_{2j}$ имеют вид

$$\sum_{I \in K, |I|=j} \sigma(I)\langle \omega, \lambda_I \rangle,$$

где σ пробегает по подпространству $B^{j-1}(K)$ симплициальных кограниц, а ω пробегает по $(\Lambda^j \Bbbk^n)^*$.

(2) Линейные соотношения на элементы $\{v_I \mid I \in K, |I| = j\}$ в пространстве $(\Bbbk[K]/\Theta/I_{NS})_{2j}$ имеют вид

$$\sum_{I \in K, |I|=j} \sigma(I)\langle \omega, \lambda_I \rangle,$$

где σ пробегает по подпространству $Z^{j-1}(K)$ симплициальных коциклов (при $j = n$ требуется, чтобы $\langle\sigma, [K]\rangle = 0$), а ω пробегает по $(\Lambda^j\Bbbk^n)^*$.

Отсюда видно, что $(I_{NS})_{2j} \cong \binom{n}{j}H^{j-1}(K)$ (хотя, строго говоря, не следует). Действительно, разница между первым и вторым пунктом берется из разницы между $Z^{j-1}(K)$ и $B^{j-1}(K)$ (т.е. $H^{j-1}(K)$), умноженной на пространство $(\Lambda^j\Bbbk^n)^*$ (имеющее размерность $\binom{n}{j}$).

Замечание 5.24. Среди прочего, Теорема 5.23 позволяет вычленить явный вид образующих цоколя алгебры $\Bbbk[K]/\Theta$ для многообразий. Достаточно взять какой-нибудь базис в когомологиях $H^*(K)$, представить его симплициальными коцепями, перебрать всевозможные базисные формы $\omega \in (\Lambda^j\Bbbk^n)^*$, и сформировать для этих данных элемент $\sum_{I\in K,|I|=j}\sigma(I)\langle\omega, \lambda_I\rangle$.

6 Симплициальные чумы

Симплициальные чумы и симплициально-клеточные комплексы

Определение 6.1. Конечное частично упорядоченное множество (чум) S называется симплициальным, если в нем существует элемент, меньший всех других, и для любого элемента $I \in S$ нижний порядковый идеал $S_{\leqslant I} \stackrel{\text{def}}{=} \{J \in S \mid J \leqslant I\}$ изоморфен булевой решетке некоторого ранга k, зависящего от I (т.е. множеству подмножеств k-элементного множества). В этом случае элементы $I \in S$ называются симплексами, а число $k-1$ — размерностью симплекса I. Минимальный элемент называется пустым симплексом и обозначается $\hat{0}$.

Любой симплициальный комплекс является симплициальным чумом.

Конструкция 6.2. Пусть S — симплициальный чум. Каждому непустому симплексу $I \in S\backslash\hat{0}$ сопоставим геометрический симплекс $\triangle_I$ — выпуклую оболочку $|I|$ точек общего положения, а каждой паре симплексов $I, J \in S\backslash\hat{0}$, такой что $I < J$ сопоставим отображение $\varphi_{I<J}\colon \triangle_I \to \triangle_J$, включающее в $\triangle_J$ ее грань на вершинах из множества I. Рассмотрим топологическое пространство

$$|S| \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{I\in S}\triangle_I\Big/\sim,$$

где $x \sim \varphi_{I<J}(x)$ для всех $x \in \triangle_I$ и $J > I$. Пространство $|S|$ называется геометрической реализацией симплициального чума S.

Пространство $|S|$ имеет естественную структуру регулярного клеточного комплекса, в котором клетки соответствуют подмножествам $\triangle_I$. Все клетки являются симплексами. Такие пространства называются симплициально клеточными комплексами (см.[17, 16]).

Для симплициальных комплексов геометрическая реализация была также определена в §1, но результат обеих конструкций одинаков (упражнение).

Теперь приведем общее определение — в полной мере оно будет использоваться в §7,8. Пусть S — произвольный конечный чум, содержащий элемент $\hat{0}$, меньший всех прочих элементов.

Определение 6.3. Рассмотрим симплициальный комплекс S', вершины которого суть непустые элементы S: т.е. $V(S') = S\backslash\hat{0}$, а симплексы — цепи в S, т.е. $a_1 < \cdots < a_k \Rightarrow \{a_1, \ldots, a_k\} \in S'$. Симплициальный комплекс S' называется барицентрическим подразбиением чума S.

Произвольный чум S можно превратить в топологическое пространство, рассмотрев геометрическую реализацию $|S'|$. Если чум S симплициальный, то $|S| \cong |S'|$, т.е. в этом случае ничего нового эта конструкция не дает.

Алгебры, ассоциированные с симплициальными чумами Оказывается, почти все, что мы обсуждали для симплициальных комплексов можно в той или иной мере перенести на симплициальные чумы. Понятия топологических чисел Бетти, f-, h-, h'-, h''-векторов для симплициальных чумов определяются абсолютно аналогично симплициальным комплексам.

Определение 6.4 (Линк в симплициальном чуме)**.** Пусть S — симплициальный чум и $I \in S$ — симплекс. Линком I называется чум $\operatorname{link}_S I = \{J \in S \mid J \geqslant I\}$.

Упражнение 6.5. Докажите, что линк снова является симплициальным чумом, в котором I играет роль минимального элемента.

Для двух элементов I_1, I_2 произвольного чума S можно определить $I_1 \vee I_2$ — множество наименьших верхних граней элементов I_1 и I_2, то есть множество всех таких элементов, что $J \in S$, $J \geqslant I_1, I_2$, и J — наименьшее с таким свойством. Аналогично, можно определить $I_1 \cap I_2$ — множество наибольших нижних граней.

Упражнение 6.6. Докажите, что симплициальный чум обладает следующим свойством: если $I_1 \vee I_2 \neq \varnothing$, то $I_1 \cap I_2$ состоит в точности из одного элемента (который мы будем также обозначать $I_1 \cap I_2$).

Определение 6.7 (Кольцо граней симплициального чума)**.** Пусть S — симплициальный чум. Каждому элементу $I \in S$ сопоставим формальную переменную v_I степени $\deg v_I = 2|I|$. Рассмотрим фактор-алгебру

$$\Bbbk[S] \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk[v_I \mid I \in S]/\mathcal{I},$$

где идеал $\mathcal{I}$ порожден соотношениями

$$v_{\hat{0}} = 1, \qquad v_{I_1}v_{I_2} = v_{I_1 \cap I_2} \sum_{J \in I_1 \vee I_2} v_J.$$

(последнее соотношение корректно определено: если $I_1 \vee I_2 = \varnothing$, то сумма полагается равной нулю, а если $I_1 \vee I_2 = \varnothing$, то $I_1 \cap I_2$ является одним элементом). Алгебра $\Bbbk[S]$ называется алгеброй граней симплициального чума S. Гомоморфизм $\Bbbk[m] \to \Bbbk[S]$, отображающий v_i в v_i для вершины $i \in S$, превращает $\Bbbk[S]$ в модуль над $\Bbbk[m]$.

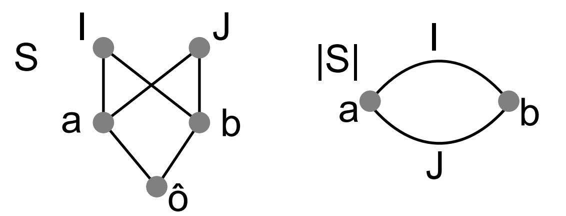

Рис. 7: Диаграмма Хассе симплициального чума S и геометрическая реализация $|S|$.

Пример 6.8. Рассмотрим чум, изображенный на рис. 7. Его симплексы таковы: $\hat{0}, a, b, I, J$. Алгебра граней:

$$\Bbbk[v_a, v_b, v_I, v_J]/(v_I v_J, v_a v_b = v_I + v_J).$$

f-вектор: $(2, 2)$. h-вектор: $(1, 0, 1)$.

Упражнение 6.9. Если S — чум граней симплициального комплекса K, то $\Bbbk[S] \cong \Bbbk[K]$.

Таким образом, алгебра граней является естественным обобщением алгебры Стенли–Райснера.

Определение 6.10 (Мета-определение)**.** Симплициальный чум называется X, если его барицентрическое подразбиение (которое есть симплициальный комплекс) является X. Здесь X может быть: гомологическая сфера, гомологическое многообразие, Коэна–Маколея, Буксбаума.

Упражнение 6.11 (Мета-упражнение)*.* Доказать аналоги X для симплициальных чумов. Здесь X может быть: соотношения Дена–Соммервилля для гомологических сфер (Теорема 2.8), обобщенные соотношения Дена–Соммервилля для гомологических многообразий (Теорема 2.9), формула для ряда Гильберта алгебры Стенли–Райснера (Предложение 3.2), (*)формула для локальных когомологий алгебры Стенли–Райснера (Теорема 4.24), теорема Райснера (Теорема 3.11), а также все возможные вспомогательные утверждения (например, Предложение 3.5 о связи линейных систем параметров и правильных векторных раскрасок).

Теорема Стенли о горенштейновости, теорема Шенцеля, теоремы Новик–Шварца и Теорема 5.23 также верны для симплициальных чумов.

7 Сбалансированные триангуляции

В этом разделе мы переходим к изучению триангуляций, обладающих дополнительными свойствами.

7.1 Гипотеза Гала

Определение 7.1. Симплициальный комплекс K называется флаговым, если любой набор вершин $i_1, \ldots, i_s \in K$, попарно соединенных ребрами, образует симплекс в K.

Пример 7.2. Граница тетраэдра не является флаговым комплексом, а граница октаэдра является. Граница октаэдра является минимальной по числу вершин (или ребер, или треугольников) двумерной флаговой сферой.

Упражнение 7.3. Докажите, что барицентрическое подразбиение произвольного конечного чума, в том числе произвольного симплициального комплекса, является флаговым комплексом.

Гипотеза 7.4 (Гипотеза Черни–Дэвиса, [19])**.** *Если K — флаговая выпуклая сфера размерности $2k-1$, то*

$$(-1)^k(h_0 - h_1 + h_2 - \ldots + h_{2k}) \geqslant 0.$$

Гипотеза Черни–Дэвиса доказана при $k = 1, 2$.

Напомним, что набор $(h_0 = 1, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \ldots, h_{[n/2]} - h_{[n/2]-1})$ называется g-вектором сферы K. g-теорема утверждает (в частности), что для выпуклых сфер g-вектор неотрицателен.

Рассмотрим h-многочлен от двух переменных $H(K)(\alpha, t) = \sum h_j t^j \alpha^{n-j}$ (см. доказательство Теоремы 2.8). Согласно соотношениям Дена–Соммервилля, $H(K)$ — симметрический многочлен, а значит представляется в виде многочлена от элементарных симметрических:

$$H(K) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \gamma_j (\alpha t)^j (\alpha + t)^{n-2j},$$

где $\gamma_j \in \mathbb{Z}$. Таким образом, каждой сфере можно сопоставить не только g-вектор, но и γ-вектор: $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{[n/2]})$.

Гипотеза 7.5 (Гипотеза Гала)**.** *γ-вектор флаговой выпуклой сферы неотрицателен.*

Гипотезы можно поставить, конечно, и для произвольных гомологических сфер, но такая задача кажется чем-то совсем уже недостижимым.

Упражнение 7.6. Выразите g-вектор через γ-вектор. Докажите, что неотрицательность γ-вектора влечет неотрицательность g-вектора.

Упражнение 7.7. Докажите, что гипотеза Черни–Дэвиса эквивалентна утверждению $\gamma_k(K) \geqslant 0$ для флаговой сферы K размерности $2k-1$. Таким образом, гипотеза Гала обобщает гипотезу Черни–Дэвиса.

7.2 Сбалансированные симплициальные комплексы

Пусть K — чистый симплициальный комплекс размерности $n-1$.

Определение 7.8. K называется сбалансированным, если существует правильная раскраска его вершин в n цветов, то есть такая функция $c\colon [m] \to [n]$, что $\{i_1, i_2\} \in K$ влечет $c(i_1) \neq c(i_2)$.

Заметим, что менее чем в n цветов покрасить вершины нельзя: вершины любого максимального симплекса должны быть покрашены в попарно различные цвета.

Комбинаторная характеризация Наличие правильной раскраски задает сильное ограничение на комбинаторику симплициального комплекса.

Упражнение 7.9. Граф сбалансирован тогда и только тогда, когда он эйлеров (т.е. в нем есть эйлеров цикл).

Упражнение 7.10. Если K сбалансирован, то линк любого его симплекса тоже сбалансирован. В частности линки симплексов коразмерности 2 являются эйлеровыми графами.

Упражнение 7.11. Если K — сбалансированная гомологическая сфера, то линк любого ее симплекса коразмерности 2 есть цикл с четным числом вершин.

Следующее упражнение чуть более концептуально

Упражнение 7.12. Пусть K — односвязная гомологическая сфера. Тогда K сбалансирована в том и только том случае, когда линк любого симплекса коразмерности 2 — цикл с четным числом вершин. (Указание: покрасим вершины одного максимального симплекса произвольным образом, а дальше продолжим раскраску на все прочие вершины единственно возможным способом. Это может нам не удастся: если, пройдя по некоторой петле из максимальных симплексов, мы вернемся в исходный и обнаружим, что раскраска не сошлась с исходной — возникает что-то вроде монодромии. Условие на четность линков гарантирует, что препятствий к раскрашиваемости нет локально, а условие односвязности гарантирует, что препятствий нет глобально). Додумайте детали.

Упражнение 7.13. Верно ли предыдущее упражнение для произвольной гомологической (над полем или $\mathbb{Z}$) сферы без условия односвязности?

В качестве следствия получаем красивую теорему.

Теорема 7.14 (Фольклор, см. также [27])**.** *Гиперграни простого n-мерного многогранника можно раскрасить правильным образом в n цветов тогда и только тогда, когда все его двумерные грани — четноугольники.*

Упражнение 7.15. Пусть K — односвязное ориентируемое многообразие. Тогда K сбалансирован тогда и только тогда, когда максимальные симплексы K можно раскрасть в шахматном порядке (то есть раскрасить в два цвета так, чтобы соседние симплексы имели разные цвета). Подобные объекты возникают в дискретизации комплексного анализа, введенной Новиковым–Дынниковым.

Сбалансированные комплексы из градуированных чумов

Определение 7.16. Конечный чум S с минимальным элементом $\hat{0} \in S$ называется градуированным, если для любого элемента $s \in S$ все максимальные по включению цепи между $\hat{0}$ и s содержат одинаковое число элементов. Это число элементов минус 1 обозначается $\rho(s)$. Функция $\rho\colon S \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ называется ранговой функцией. Она обладает свойствами:

1. $\rho(\hat{0}) = 0$;

2. Если $s_1 < s_2$, и не существует такого элемента t, что $s_1 < t < s_2$ (в этом случае говорят, что s_2 покрывает s_1), то $\rho(s_2) = \rho(s_1) + 1$.

Эти свойства можно положить в основу определения градуированного чума. Имеем очевидное свойство: если $s_1 < s_2$, то $\rho(s_2) - \rho(s_1)$ равно длине любой максимальной цепи между s_1 и s_2 минус 1. Будем называть градуированный чум чистым, если все его максимальные элементы имеют одинаковый ранг n. В этом случае n называется рангом[6] чума S.

Иногда мы будем выкидывать минимальный элемент из чума и обозначать полученный чум через $S\backslash\hat{0}$.

Пример 7.17. Основной поставщик градуированных чумов — топология. Пусть X — конечный регулярный клеточный комплекс (регулярность означает, что все отображения приклейки — гомеоморфизмы на образ). Замкнутые клетки комплекса X частично упорядочены по включению, что дает чум S_X (включим в S_X также "пустую клетку" $\hat{0}$). В качестве ранговой функции можно взять размерность клетки $\rho(s) = \dim s + 1$. Условие регулярности комплекса гарантирует, что любая клетка приклеивается к клеткам на единицу меньшей размерности, а значит условия из определения 7.16 выполнены.

В эту серию примеров включены границы многогранников, в том числе и непростых. Очевидно, что регулярные клеточные разбиения сфер и многообразий дают чистые градуированные чумы.

Предложение 7.18. *Барицентрическое подразбиение S' чистого градуированного чума S является сбалансированным симплициальным комплексом.*

Доказательство. По определению, вершинами S' являются все элементы S кроме $\hat{0}$. В качестве раскраски $c\colon \operatorname{Vert}(S') = S\backslash\hat{0} \to [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ возьмем ранговую функцию. $\square$

Если перевести написанное выше на топологический язык, то получится следующее. Пусть X — регулярный клеточный комплекс, у которого все максимальные клетки имеют одинаковую размерность. Барицентрическое подразбиение комплекса

[6]Полезно запомнить соглашение: ранг всегда на 1 больше, чем размерность. Это, например, имеет прямой смысл для симплициальных комплексов и симплициальных чумов.

X получается, если в каждой клетке взять барицентр и натянуть симплексы на барицентры клеток, образующих вложенную цепочку. Полученный симплициальный комплекс, очевидно, будет сбалансированным, поскольку на каждый барицентр можно в качестве раскраски приписать размерность той клетки, барицентром которой он является.

Таким образом, мы получаем способ переходить от произвольных регулярных клеточных разбиений к симплициальным, снабженных к тому же дополнительной структурой: раскраской. Изучением свойств этой структуры мы сейчас и займемся.

7.3 Флаговые f- и h-числа

Введем новые обозначения. Пусть K — сбалансированный симплициальный комплекс, $\dim K = n-1$, $c\colon [m] = \mathrm{Vert}(K) \to [n]$ — правильная раскраска. Для симплекса $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \in K$ можно рассмотреть множество цветов, в которые раскрашены его вершины: $c(I) = \{c(i_1), \ldots, c(i_s)\}$ — мульти-цвет симплекса.

Определение 7.19. Пусть $A \subseteq [n]$ — подмножество цветов. Рассмотрим $f_A = \sharp\{I \in K \mid c(I) = A\}$ — количество симплексов, имеющих мульти-цвет A. Числа $f_A, A \subseteq [n]$ называются флаговыми f-числами комплекса K. Определим флаговые h-числа формулой

$$h_A = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} f_B$$

для всех $A \subseteq [n]$.

Упражнение 7.20. $f_A = \sum_{B\subseteq A} h_B$

Упражнение 7.21. Формула $f_{j-1} = \sum_{A\subseteq[n],|A|=j} f_A$ очевидна. Докажите, что также выполнено $h_j = \sum_{A\subseteq[n],|A|=j} h_A$.

Пример 7.22. Рассмотрим симплициальный комплекс K — барицентрическое подразбиение границы тетраэдра. Очевидно, его вершины можно правильным образом покрасить в 3 цвета, — см. предыдущий параграф или рис.8. Имеем,

$$(f_\varnothing, f_{\{1\}}, f_{\{2\}}, f_{\{3\}}, f_{\{1,2\}}, f_{\{1,3\}}, f_{\{2,3\}}, f_{\{1,2,3\}}) = (1, 4, 6, 4, 12, 12, 12, 24)$$

Вычислим, например, $h_{\{1,2\}} = f_{\{1,2\}} - f_{\{1\}} - f_{\{2\}} + f_\varnothing = 12 - 4 - 6 + 1 = 3$. Аналогично, имеем

$$(h_\varnothing, h_{\{1\}}, h_{\{2\}}, h_{\{3\}}, h_{\{1,2\}}, h_{\{1,3\}}, h_{\{2,3\}}, h_{\{1,2,3\}}) = (1, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 1).$$

Для флаговых чисел сбалансированных комплексов имеются утверждения, аналогичные соотношениям Дена–Соммервилля и теореме о неотрицательности.

Теорема 7.23 (Флаговые соотношения Дена–Соммервилля)**.** *Пусть K — сбалансированная гомологическая сфера. Тогда*

$$h_A = h_{[n]\setminus A}$$

для всех $A \subseteq [n]$.

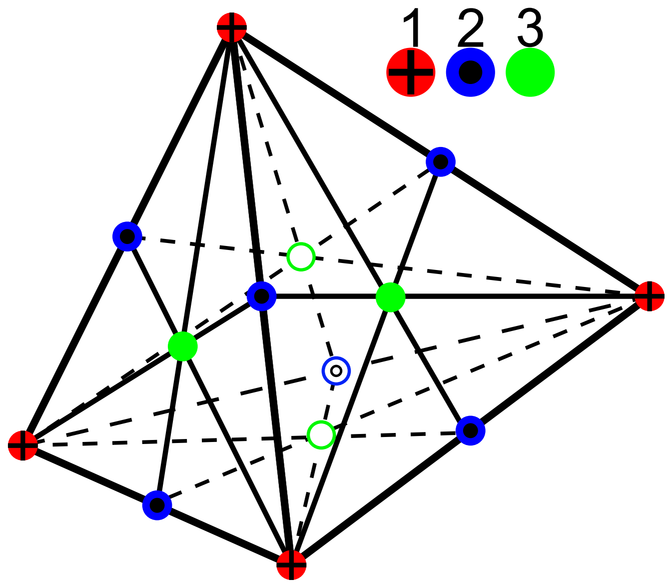

Рис. 8: Барицентрическое подразбиение границы симплекса

Теорема 7.24 (Флаговая теорема о неотрицательности)**.** *Пусть K — сбалансированный комплекс Коэна–Маколея. Тогда $h_A(K) \geqslant 0$ для всех $A \subseteq [n]$.*

Далее мы докажем и то и другое утверждение двумя способами: топологическим и алгебраическим. Однако, стоит отметить, что у флаговых соотношений Дена–Соммервилля есть элементарное комбинаторное доказательство, полностью аналогичное доказательству, приведенному в §2.3 для обычных соотношений Дена–Соммервилля (вместо группы всех чистых симплициальных комплексов надо брать группу сбалансированных комплексов, а вместо гомоморфизмов в кольцо $\mathbb{Z}[\alpha, t]$ надо брать гомоморфизмы в кольцо $\mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t_1, \ldots, t_n]$). Провести эту стратегию предлагается в качестве упражнения. Также в качестве упражнения остается сформулировать и доказать флаговые соотношения Дена–Соммервилля для многообразий.

Топологическое доказательство неотрицательности и Дена–Соммервилля Введем полезное обозначение. Пусть $A \subset [n]$ — произвольный мульти-цвет. Выборочным подкомплексом мульти-цвета A называется полный подкомплекс, натянутый на все вершины с цветами из A:

$$K_A = \{I \in K \mid c(I) \subseteq A\}.$$

Лемма 7.25. *Пусть K — сбалансированный комплекс Коэна–Маколея размерности n и пусть $A \subseteq [n]$ — мульти-цвет. Тогда K_A также является сбалансированным комплексом Коэна–Маколея размерности $|A| - 1$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для случая $A = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ — все остальные случаи получаются последовательным его применением. Рассмотрим точную последовательность гомологий пары (K, K_A):

$$\cdots \to H_{j+1}(K, K_A) \to \widetilde{H}_j(K_A) \to \widetilde{H}_j(K) \to H_j(K, K_A) \to \cdots$$

Заметим, что $K \backslash K_A$ есть дизъюнктное объединение открытых звезд всех вершин, покрашенных в n-ый цвет. Имеем,

$$H_j(K, K_A) \cong \widetilde{H}_j(K/K_A) \cong \widetilde{H}_j(\bigvee_{i \in [m], c(i)=n} \Sigma \operatorname{link}_K i) \cong \bigoplus_{i \in [m], c(i)=n} \widetilde{H}_{j-1}(\operatorname{link}_K i).$$

Поскольку K — комплекс Коэна–Маколея, он имеет нетривиальные приведенные гомологии только в размерности $n-1$, а линки его вершин — только в размерности $n-2$. Из точной последовательности пары получаем, что K_A может иметь ненулевые гомологии только в размерности $n-2$. Проверка ацикличности всех линков комплекса K_A полностью аналогична. □

Предложение 7.26. *В обозначениях предыдущей леммы имеем* $h_A(K) = \widetilde{\beta}_{|A|-1}(K_A) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{|A|-1}(K_A; \Bbbk)$.

Доказательство. Имеем $\sum_{j=-1}^{|A|-1}(-1)^j \widetilde{\beta}_j(K_A) = \chi(K_A) = \sum_{j=-1}^{|A|-1}(-1)^j f_j(K_A)$. По Лемме 7.25, все приведенные числа Бетти комплекса K_A, кроме старшего, равны нулю. Имеем,

$$\widetilde{\beta}_{|A|-1}(K_A) = (-1)^{|A|-1} \sum_{j=-1}^{|A|-1} (-1)^j f_j(K_A) =$$
$$= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} f_B(K_A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} f_B(K) = h_A(K).$$

□

Из Предложения 7.26 сразу следует теорема о неотрицательности. Флаговые соотношения Дена–Соммервилля, на самом деле, тоже легко следуют. Заметим, что в сфере K выборочные подкомплексы K_A и $K_{[n] \backslash A}$ двойственны друг другу по Александеру. Значит $\widetilde{\beta}^{|A|-1}(K_A) = \widetilde{\beta}^{n-|A|-1}(K_{[n] \backslash A})$ по Теореме 4.10.

Приведем для дальнейшего пользования полезное утверждение.

Лемма 7.27. *Пусть* $h_A(K), A \subseteq [n]$ *— флаговые h-числа сбалансированного комплекса* K, $B \subseteq [n]$ *и* K_B *— выборочный подкомплекс. Тогда*

$$h_j(K_B) = \sum_{A \subseteq B, |A|=j} h_A(K)$$

Доказательство. Имеем $h_j(K_B) = \sum_{A \subseteq B, |A|=j} h_A(K_B)$. Флаговые h-числа K_B выражаются через флаговые f-числа K_B с меньшими индексами, а эти числа в свою очередь совпадают с флаговыми f-числами K. Значит, $h_A(K_B) = h_A(K)$ для всех $A \subset B$, откуда следует утверждение. □

Алгебраическое доказательство неотрицательности и соотношений Дена–Соммервилля Заметим, что правильная раскраска $c\colon [m] \to [n]$ сбалансированного комплекса K естественным образом задает правильную векторную раскраску: $\lambda^c\colon [m] \to \Bbbk^n$, которая вершине $i \in [m]$ сопоставляет $c(i)$-й базисный вектор $e_{c(i)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 стоит на $c(i)$-м месте). Согласно общему правилу (см.§3.2), каждая правильная векторная раскраска задает линейную систему параметров в $\Bbbk[K]$. Пусть $\theta_1^c, \ldots, \theta_n^c$ — линейная система параметров, соответствующая λ^c. Легко проверить, что

$$\theta_j^c = \sum_{i \in [m], c(i)=j} v_i \in \Bbbk[K]_2.$$

Введем в кольце $\Bbbk[K]$ $\mathbb{Z}^n$-градуировку, положив $\mathrm{mdeg}(v_i) = (0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, где 2 стоит на $c(i)$-м месте. Заметим, что линейные элементы θ_j^c однородны относительно этой мультиградуировки. Таким образом, фактор-алгебра $\Bbbk[K]/\Theta^c$ $\mathbb{Z}^n$-мультиградуирована.

Предложение 7.28. *1.* $\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]; t_1, \ldots, t_n) = \dfrac{\sum_{A \subseteq [n]} h_A \prod_{j \in A} t_j^2}{(1-t_1^2)\cdots(1-t_n^2)}.$

2. Если K — сбалансированный комплекс Коэна–Маколея, то

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]/\Theta^c; t_1, \ldots, t_n) = \sum_{A \subseteq [n]} h_A \prod_{j \in A} t_j^2.$$

Доказательство. Первое утверждение — рутинная проверка, полностью аналогичная нефлаговому случаю. Второе утверждение следует из первого, поскольку $\Bbbk[K]$ является свободным $\mathbb{Z}^n$-градуированным модулем над $\Bbbk[\theta_1^c, \ldots, \theta_n^c]$ согласно Коэн–Маколеевости. □

Из этого предложения также следуют флаговые теоремы о неотрицательности и Дена–Соммервилля. Неотрицательность следует напрямую из пункта 2 Предложения 7.28. Соотношения Дена–Соммервилля следуют из того факта, что для сбалансированной гомологической сферы алгебра $\Bbbk[K]/\Theta^c$ является $\mathbb{Z}^n$-градуированной алгеброй Пуанкаре.

Замечание 7.29. Из этого и предыдущего пунктов следует аддитивный изоморфизм $\Bbbk[K]/\Theta^c = \bigoplus_{A \subseteq [n]} \widetilde{H}^{|A|-1}(K_A; \Bbbk)$. Есть подозрение, что умножение в алгебре $\Bbbk[K]/\Theta^c$ совпадает с умножением Баскакова (см.п.3 Теоремы 4.1) на $\bigoplus_{A \subseteq [n]} \widetilde{H}^{|A|-1}(K_A; \Bbbk)$. Это бы означало в том числе, что алгебра $\Bbbk[K]/\Theta^c$ вкладывается в $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K]; \Bbbk)$, причем весьма странным способом — оно не уважает градуировки. Что это значит с алгебраической точки зрения — непонятно.

7.4 Теорема Кубичке–Мураи

Существует красивое усиление g-теоремы на сбалансированные выпуклые сферы, открытое лишь в прошлом году.

Теорема 7.30 (Юнке-Кубичке–Мураи,[26])**.** *Пусть K — сбалансированная выпуклая сфера,* $\dim K = n-1$*. Тогда ее h-числа удовлетворяют неравенствам*

$$\frac{h_0}{\binom{n}{0}} \leqslant \frac{h_1}{\binom{n}{1}} \leqslant \frac{h_2}{\binom{n}{2}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{h_{[n/2]}}{\binom{n}{[n/2]}}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Основной концептуальный ингредиент доказательства — следующая лемма, которую мы доказывать не будем.

Лемма 7.31. *Пусть K — сбалансированная выпуклая сфера и $B \subseteq [n]$. Для выборочного подкомплекса K_B существует такая линейная система параметров $\theta_1, \ldots, \theta_{|B|}$ в $\mathbb{Q}[K_B]$ и такой элемент $\omega \in (\mathbb{Q}[K_B]/\Theta)_2$, что*

$$\times\omega^{|B|-2j}\colon (\mathbb{Q}[K_B]/\Theta)_{2j} \to (\mathbb{Q}[K_B]/\Theta)_{2|B|-2j}$$

инъективно при всех $j \leqslant [|B|/2]$.

Иными словами, выборочные подкомплексы в некотором смысле наследуют свойство лефшецевости (хотя они, вообще говоря, уже и не являются горенштейновыми). Размерности градуированных компонент алгебры $\mathbb{Q}[K_B]/\Theta$ — это h-числа комплекса K_B, поскольку K_B — комплекс Коэна–Маколея.

Следствие 7.32. *Для выборочного подкомплекса выпуклой сбалансированной сферы K выполнено*

$$h_0(K_B) \leqslant h_1(K_B) \leqslant \cdots \leqslant h_{[|B|/2]}(K_B); \tag{7.2}$$

$$h_j(K_B) \leqslant h_{|B|-j}(K_B), \tag{7.3}$$

при $j \leqslant [|B|/2]$.

Чтобы получить требуемое в теореме, достаточно “усреднить” неравенства (7.3) по всем $B \subset [n]$, $|B| = n-1$, заменив $h_l(K_B)$ на $\sum_{A\subseteq B, |A|=l} h_A(K)$ согласно Лемме 7.27. Имеем последовательность эквивалентных формул

$$\sum_{|B|=n-1}\ \sum_{A\subseteq B, |A|=j} h_A(K) \leqslant \sum_{|B|=n-1}\ \sum_{A\subseteq B, |A|=n-1-j} h_A(K)$$

$$\sum_{A\subseteq[n], |A|=j}\ \sum_{B\supseteq A, |B|=n-1} h_A(K) \leqslant \sum_{A\subseteq[n], |A|=n-1-j}\ \sum_{B\supseteq A, |B|=n-1} h_A(K)$$

$$\sum_{A\subseteq[n], |A|=j} h_A(K)\sharp\{|B| = n-1, B \supseteq A\} \leqslant \sum_{A\subseteq[n], |A|=n-j-1} h_A(K)\sharp\{|B| = n-1, B \supseteq A\}$$

$$(n-j)h_j(K) \leqslant (j+1)h_{n-1-j}(K).$$

Воспользовавшись соотношениями Дена–Соммервилля, получаем

$$(n-j)h_j(K) \leqslant (j+1)h_{j+1}(K).$$

Поделив последнее неравенство на $\frac{n!}{j!(n-j-1)!}$, получим

$$\frac{h_j(K)}{\binom{n}{j}} \leqslant \frac{h_{j+1}(K)}{\binom{n}{j+1}}.$$

Вышенаписанное верно при всех $j \leqslant \frac{n-1}{2}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 7.33. В доказательстве суммировались неравенства (7.3), но никак не использовались неравенства (7.2). Кроме того, суммирование производилось по B с условием $|B| = n - 1$. Надо думать, что усреднив любое из неравенств (7.3), (7.2) по B любой заданной мощности, можно получить еще какие-то соотношения на $h_j(K)$. Однако, можно проверить, что, следуя этой стратегии, никаких неравенств на h-числа K, более сильных, чем (7.1), получить нельзя.

Упражнение 7.34. Допустим, для сферы K выполнено утверждение гипотезы Гала, то есть γ-числа K неотрицательны. Докажите, что для K верно утверждение теоремы Кубичке–Мураи, т.е. неравенства (7.1).

7.5 В сторону сбалансированных многообразий

Изучение сбалансированных триангуляций многообразий представляется темой интересной и в то же время малоизученной.

Гипотеза 7.35 (Неформальный и отчасти философский вопрос)**.** *Существует ли разумная теория флаговых h'- и h"-чисел сбалансированных комплексов Буксбаума?*

На возможность положительного ответа указывает следующий несложный факт

Упражнение 7.36. Пусть K — сбалансированный комплекс Буксбаума размерности $n-1$. Тогда его выборочный подкомплекс K_A, $A \subseteq [n]$ является комплексом Буксбаума размерности $|A| - 1$.

Возможно, теорию флаговых h"-чисел удастся построить, рассматривая обычные h"-числа и числа Бетти выборочных подкомплексов K_A.

8 Комбинаторика градуированных чумов

В предыдущем параграфе было отмечено, что основной источник сбалансированных комплексов — это барицентрические подразбиения градуированных чумов (а градуированные чумы в свою очередь возникают как чумы клеток регулярных клеточных комплексов, например границ многогранников). Однако, про комбинаторику градуированных чумов, как правило, можно сказать больше, чем про комбинаторику общих сбалансированных комплексов. Например, известно, что флаговые соотношения Дена–Соммервилля $h_A = h_{[n]\setminus A}$ исчерпывают все возможные линейные соотношения на флаговые числа сбалансированных сфер [9]. Однако, флаговые числа градуированных "сферических" чумов удовлетворяют некоторым дополнительным линейным соотношениям, и здесь возникает красивая теория.

8.1 Эйлеровы чумы и формула обращения Мёбиуса

Пусть S — чистый градуированный чум ранга n. Пусть $\hat{S} = S \cup \{\hat{1}\}$ — пополнение чума S максимальным элементом ранга $n+1$ (напомним, что минимальный элемент ранга 0 в S уже есть по определению). В комбинаторике весьма популярно следующее понятие.

Определение 8.1. S называется эйлеровым, если для любых элементов $s, t \in \hat{S}$, $s < t$ замкнутый интервал $\hat{S}_{[s,t]} = \{x \in \hat{S} \mid s \leqslant x \leqslant t\}$ содержит одинаковое количество элементов четного и нечетного ранга.

Важное комбинаторное свойство эйлеровых чумов — простая запись формулы обращения Мёбиуса

Предложение 8.2 (Формула обращения Мёбиуса)**.** *Пусть S — эйлеров чум и $A\colon S \to \mathbb{R}$ произвольная функция на его элементах. Зададим новую функцию $B\colon S \to \mathbb{R}$ формулой*

$$B(s) = \sum_{t \leqslant s} A(t).$$

Тогда значения исходной функции A можно восстановить из значений функции B по формуле

$$A(s) = \sum_{t \leqslant s} (-1)^{\rho(s) - \rho(t)} B(t).$$

Доказательство. Упражнение на подстановку одной формулы в другую. □

Замечание 8.3. (1) На самом деле, формула обращения Мёбиуса существует для любого градуированного чума, однако вместо $(-1)^{\rho(s)-\rho(t)}$ вообще говоря стоит какое-то целое число $\mu(s,t)$, зависящее от пары $s \leqslant t$, и определяемое комбинаторикой S. Это число называется функцией Мёбиуса.

(2) Если в качестве $\hat{S}$ взять булеву решетку, то Предложение 8.2 превращается в формулу включения-исключения. Из этой формулы например следует упр. 7.20.

(3) Читателям предлагается самим подумать, какую связь Предложение 8.2 имеет с формулой обращения Мёбиуса из теории чисел.

(4) Описанные в предложении формулы можно понимать так: функция B есть интеграл функции A, а A есть производная функции B.

Захватывающие подробности о формулах обращения Мёбиуса см. в монографии Стенли [36].

Лемма 8.4. *Пусть S — эйлеров чум ранга n. Тогда $\chi(S') = 1 + (-1)^{n-1}$.*

Доказательство. Доказательство комбинаторное, но полезно представлять себе такую топологическую картинку. S можно понимать как клеточный комплекс, а элемент $s \in S$ ранга k можно понимать как клетку размерности $k-1$. Чум $S_{\leqslant s}$ можно понимать как клеточное разбиение клетки s, а чум $S_{<s}$ — разбиение границы клетки s.

Эйлеровость можно понимать как “сферичность” границы каждой клетки. Эйлерову характеристику клеточного комплекса можно получить, взяв альтернированную сумму эйлеровых характеристик его клеток, которые в свою очередь равны 1.

Теперь более формально. Докажем формулу

$$\chi(S') = \sum_{s\in S, s\neq \hat{0}} (-1)^{n-\rho(s)}\chi(S'_{\leqslant s}).$$

Каждый симплекс $I = (s_0 < s_1 < \dots < s_k)$ вносит в правую часть этой формулы вклад $(-1)^k(-1)^{n-\rho(s)}$, появляясь в слагаемых с $s \geqslant s_k$(если мы распишем эйлерову характеристику как знакопеременную сумму чисел симплексов). Значит, вклад симплекса I равен $(-1)^k \sum_{s\geqslant s_k}(-1)^{n-\rho(s)}$. Согласно эйлеровости, в интервале $S_{[s_k,\hat{1}]}$ одинаковое число элементов четного и нечетного рангов. Значит, $-1 + \sum_{s\geqslant s_k}(-1)^{n-\rho(s)} = 0$ (-1 соответствует добавлению к сумме максимального элемента $\hat{1} \in \hat{S}$ ранга $n + 1$). Следовательно, вклад I в правой части равен $(-1)^k$ — такой же, как и в левой.

Теперь заметим, что $S'_{\leqslant s} = \operatorname{Cone} S'_{<s}$, значит $\chi(S'_{\leqslant s}) = 1$. Следовательно, $\chi(S') = \sum_{s\in\hat{S}, s\neq\hat{0},\hat{1}}(-1)^{n-\rho(s)} = \sum_{s\in\hat{S}}(-1)^{n-\rho(s)} - ((-1)^{n-\rho(\hat{0})} + (-1)^{n-\rho(\hat{1})}) = 1+(-1)^{n-1}$, поскольку в $\hat{S}$ число элементов четного и нечетного рангов совпадает. □

Предложение 8.5. *S является эйлеровым в том и только том случае, когда в симплициальном комплексе S' (составленном из всех цепей чума S, не содержащих $\hat{0}$) линк любого симплекса имеет эйлерову характеристику как у сферы соответствующей размерности.*

Доказательство. Пусть I — симплекс барицентрического подразбиения S', заданный цепью $s_1 < s_2 < \dots < s_k$. Дополнить симплекс I до большего симплекса в S' означает приписать к цепи $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ какую-то цепочку $t^0_1 < t^0_2 < \dots < t^0_{\alpha_0}$, меньшую s_1, какую-то цепочку $t^1_1 < t^1_2 < \dots < t^1_{\alpha_1}$, зажатую между s_1 и s_2, какую-то цепочку $t^2_1 < t^2_2 < \dots < t^2_{\alpha_2}$, зажатую между s_2 и s_3, и так далее. Поэтому имеем

$$\operatorname{link}_{S'} I = \hat{S}'_{[\hat{0},s_1)} * \hat{S}'_{[s_1,s_2)} * \hat{S}'_{[s_2,s_3)} * \dots * \hat{S}'_{[s_k,\hat{1})}, \tag{8.1}$$

где $\hat{S}'_{[s_l,s_{l+1})}$ — барицентрическое подразбиение полуоткрытого интервала $\hat{S}'_{[s_l,s_{l+1})} = \{x \in \hat{S} \mid s_l \leqslant x < s_{l+1}\}$. Полуоткрытый интервал $\hat{S}_{[s_l,s_{l+1})}$ вновь является эйлеровым чумом. Значит, по Лемме 8.4 эйлерова характеристика его подразбиения — это эйлерова характеристика сферы. Значит, и у кратного джойна (8.1) эйлерова характеристика такая, как требуется.

В обратную сторону доказательство аналогичное — это упражнение. □

Следствие 8.6. *Если геометрическая реализация S' является гомологической сферой, то S — эйлеров чум.*

Следствие 8.7. *Пусть X — регулярный клеточный комплекс, гомеоморфный сфере. Тогда градуированный чум S_X его граней эйлеров.*

Доказательство. Барицентрическое подразбиение $X' = S'_X$ гомеоморфно X, а значит является сферой. $\square$

Следствие 8.8. *Чум собственных граней произвольного выпуклого многогранника эйлеров.*

Упражнение 8.9. Пусть K — симплициальный комплекс размерности $n-1$, являющийся эйлеровым чумом. Докажите соотношения Дена–Соммервилля: $h_j = h_{n-j}$.

8.2 Соотношения Байер–Биллеры

Для эйлерова чума S барицентрическое подразбиение S' является сбалансированным комплексом, а значит определены флаговые f- и h-числа: $f_A(S) := f_A(S')$, $h_A(S) := h_A(S')$.

Теорема 8.10 (Соотношения Байер–Биллеры,[9])**.** *Пусть S — эйлеров чум ранга n и $A \subseteq [n]$, $A = (n_1 < n_2 < \cdots < n_k)$. Положим также $n_0 = 0, n_{k+1} = n+1$. Допустим, что $n_l < n_{l+1} - 1$ для некоторого $l = 0, \ldots, n$. Тогда флаговые числа S удовлетворяют соотношению*

$$f_A \cdot (1 + (-1)^{n_{l+1} - n_l}) = \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}-1} (-1)^{j-n_l-1} f_{A \sqcup j}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Доказательство тут даже проще, чем сама формулировка. f_A — это количество таких цепей $I = (s_1 < s_2 < \cdots < s_k)$ в S, что $\rho(s_j) = n_j$. Далее будем просто писать $\rho(S) = A$, а также положим $s_0 = \hat{0}$, $s_{k+1} = \hat{1}$.

Для каждой цепи I будем вставлять дополнительный элемент t между s_l и s_{l+1} всеми возможными способами. Для $j \in [n_l, n_{l+1}]$ положим $\alpha_{I,j} = \sharp\{t \in S \mid s_l \leqslant t \leqslant s_{l+1}, \operatorname{rk} t = j\}$. Тогда $\sum_{j=n_l}^{n_{l+1}} (-1)^j \alpha_{I,j} = 0$, поскольку S эйлеров. Значит

$$1 + (-1)^{n_{l+1} - n_l} = \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}-1} (-1)^{j-n_l-1} \alpha_{I,j}.$$

Просуммировав эти равенства по всем I, таким что $\rho(I) = A$, получим с левой стороны $f_A \cdot (1 + (-1)^{n_{l+1} - n_l})$, а с правой: $\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}-1} (-1)^{j-n_l-1} f_{A \sqcup j}$. $\square$

Обозначим через Ψ_n совокупность всех подмножеств множества $[n-1] = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, не содержащих двух подряд идущих целых чисел.

Предложение 8.11. *Для каждого $A \subseteq [n]$ существует формула, линейно выражающая $f_A(S)$ через числа $f_B(S)$, $B \in \Psi_n$. Мощность Ψ_n равна ϕ_n — n-ому числу Фибоначчи ($\phi_1 = 1, \phi_2 = 2, \phi_n = \phi_{n-1} + \phi_{n-2}$).*

Доказательство. Упорядочим все подмножества $A \subseteq [n]$ лексикографически. Допустим, A содержит два подряд идущих числа, скажем $k-1, k$ (либо содежит элемент n — в этом случае положим $k = n+1$). Применим соотношение Байер–Биллеры к $C = A\backslash\{k-1\}$. Видно, что f_A выражается через f_C и $f_{C\sqcup j}$, где j пробегает от $\max\{i \in A \sqcup \{0\} \mid i < k-1\}+1$ до $k-2$. Все эти множества лексикографически меньше чем A, значит к ним можно рекурсивно применить это же соображение. В итоге всё выразится через $f_B(S)$, $B \in \Psi_n$.

Утверждение о числах Фибоначчи — школьное упражнение по комбинаторике. □

Предложение 8.12 (Байер–Биллера)**.** *Все линейные соотношения на флаговые числа эйлеровых чумов исчерпываются соотношениями* (8.2).

Доказательство. Идея такова: достаточно построить ϕ_n эйлеровых чумов $\{S_1, \dots, S_{\phi_n}\}$ ранга n, таких чтобы матрица $f_A(S_i)_{A\in\Psi_n, i\in[1,\phi(n)]}$ была невырождена. Оказывается, в качестве таких чумов можно брать чумы граней многогранников специального вида, а именно последовательности пирамид и бипирамид (конусов и надстроек) над точкой, в которых не встречается двух подряд идущих бипирамид. Подробности см. в [9]. □

Таким образом, на флаговые f-числа эйлеровых чумов ранга n имеется $2^n - \phi_n$ линейных соотношений. Интересный вопрос: как эти соотношения записываются для h-чисел (как мы видели ранее, жизнь становится легче, если работать с h-числами). Исчерпывающий ответ дает конструкция cd-индекса, предложенная Файном. Прелесть этой конструкции в том, что в качестве производящих функций используются элементы некоммутативного кольца.

8.3 cd-индекс

Рассмотрим некоммутативное ассоциативное кольцо многочленов от переменных a, b. Каждому подмножеству $A \subseteq [n]$ сопоставим моном $u_A = u_1u_2\dots u_n$, где $u_i = a$, если $i \notin A$ и $u_i = b$, если $i \in A$. Для градуированного чума S ранга n положим

$$\mathcal{F}_S(a,b) = \sum_{A\subseteq[n]} f_A u_A, \qquad \mathcal{H}_S(a,b) = \sum_{A\subseteq[n]} h_A u_A.$$

Упражнение 8.13. $\mathcal{H}_S(a,b) = \mathcal{F}_S(a-b,b)$, $\mathcal{F}_S(a,b) = \mathcal{H}_S(a+b,b)$.

Заметим, что соотношения Дена–Соммервилля эквивалентны утверждению $\mathcal{H}_S(a,b) = \mathcal{H}_S(b,a)$. Можно сказать больше.

Теорема 8.14 (Файн, [10])**.** *Пусть S — градуированный чум ранга n. Тогда S удовлетворяет соотношениям Байер–Биллеры в том и только в том случае, когда $\mathcal{H}_S(a,b)$ представляется в виде некоммутативного многочлена $\mathcal{G}_S(c,d)$ от переменных $c = a+b$ и $d = ab+ba$.*

Определение 8.15. Некоммутативный многочлен $\mathcal{G}_S(c,d)$, существующий согласно Теореме 8.14, называется cd-индексом эйлерова чума S.

Доказывать теорему Файна мы не будем. Идея такова: надо взять эйлеровы чумы $\{S_1, \dots, S_{\phi_n}\}$ из доказательства Предложения 8.12 и проверить, что cd-индекс существует для них. Дальше проверяется, что существование cd-индекса накладывает

$2^n - \phi_n$ линейных условий на флаговые h-числа, то есть столько же, сколько соотношения Байер–Биллеры (см. замечание 8.17 ниже).

Заметим, что в коммутативном случае есть теорема о симметрических многочленах, однако для некоммутативных многочленов аналога этой теоремы нет. Поэтому из условия $\mathcal{H}(a,b) = \mathcal{H}(b,a)$ отнюдь не следует, что $\mathcal{H}(a,b) = \mathcal{G}(a+b, ab+ba)$. Условие существования cd-индекса более сильное, чем симметричность.

Пример 8.16. Рассмотрим чум граней египетской пирамиды (трехмерной пирамиды с квадратным основанием). Имеем $f_\varnothing = 1$, $f_{\{1\}} = 5$ (число вершин), $f_{\{2\}} = 8$ (число ребер), $f_{\{3\}} = 5$ (число граней), $f_{\{1,2\}} = 16$ (число флагов вида вершина–ребро), $f_{\{1,3\}} = 16$ (число флагов вида вершина–грань), $f_{\{2,3\}} = 16$ (число флагов вида ребро–грань), $f_{\{1,2,3\}} = 32$ (число флагов вида вершина–ребро–грань). Вычисление флаговых h-чисел дает $h_{\hat{0}} = 1$, $h_{\{1\}} = 4$, $h_{\{2\}} = 7$, $h_{\{3\}} = 4$, $h_{\{1,2\}} = 4$, $h_{\{1,3\}} = 7$, $h_{\{2,3\}} = 4$, $h_{\{1,2,3\}} = 1$. Видны флаговые соотношения Дена–Соммервилля. Более того, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(a,b) &= aaa + 4aab + 7aba + 4baa + 4abb + 7bab + 4bba + bbb = \\ &= (a+b)(a+b)(a+b) + 3(a+b)(ab+ba) + 3(ab+ba)(a+b) = ccc + 3cd + 3dc.\end{aligned}$$

Замечание 8.17. Элементам наших некоммутативных колец можно приписать градуировки: $\deg a = \deg b = 1$, $\deg c = \deg(a+b) = 1$, $\deg d = \deg ab = 2$. Таким образом, пространство всех некоммутативных многочленов от c, d степени n имеет размерность "число некоммутативных мономов степени n от переменных степеней 1 и 2". Видно, что каждый такой моном кодируется последовательностью 1 и 2, в которой сумма всех чисел равна n. Количество таких последовательностей равно ϕ_n.

Замечание 8.18. Если разрешить переменным a, b коммутировать, то из $\mathcal{H}$-многочлена эйлерова чума S получится обычный H-многочлен симплициального комплекса S'.

Настало время сформулировать флаговый аналог g-теоремы.

Теорема 8.19 (Стенли [42]). *Пусть S — чум собственных граней выпуклого многогранника. Тогда коэффициенты его cd-индекса неотрицательны.*

Доказательство см. в [42]. Стоит заметить, что доказательство этой теоремы исключительно комбинаторное, — в отличие от g-теоремы, которая основана на лефшецовости некоторой алгебры.

Следствие 8.20. *Пусть K — барицентрическое подразбиение границы выпуклого многогранника P. Симплициальный комплекс K флаговый, и для него верна гипотеза Гала.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{H}_P(a,b) = \mathcal{G}_P(a+b, ab+ba)$. Если заставить переменные a, b коммутировать, то слева получится $H(K)(a,b)$, а справа — выражение $H(K)(a,b)$ в виде коммутативного многочлена от $a+b$ и $2ab$. Таким образом, γ-числа комплекса K выражаются в виде линейной комбинации коэффициентов cd-индекса с положительными коэффициентами, а значит, $\gamma_j(K) \geqslant 0$. Флаговость — см. упр. 7.3. $\square$

8.4 Торический h-вектор

Дадим обзор еще одной конструкции, возникшей в связи с изучением комбинаторики выпуклых многогранников. Эта конструкция комбинаторная, но мотивирована торической геометрией. По достаточно хорошему выпуклому многограннику P можно построить торическое многообразие X_P. Если P простой, то X_P является рациональным гомологическим многообразием, поэтому алгебра его когомологий обладает двойственностью Пуанкаре. h-числа простого многогранника P возникают как числа Бетти многообразия X_P, а соотношения Дена–Соммервилля следуют из двойственности Пуанкаре. В случае, если P не простой, X_P является многообразием с особенностями. Для такого многообразия можно посчитать гомологии пересечений — этот объект гораздо хуже обычных (ко)гомологий с точки зрения топологии, однако обладает аналогом двойственности Пуанкаре. Размерности гомологий пересечений торического многообразия задают комбинаторный инвариант исходного многогранника — торический h-вектор. Этот инвариант, однако, можно определить комбинаторно.

Определение 8.21. Каждому чистому градуированному чуму ранга n сопоставим торический h-вектор $(\hat{h}_0, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ и торический g-вектор $(\hat{g}_0, \dots, \hat{g}_{[n/2]})$, определяемые индуктивно по следующим правилам. Пусть $\hat{h}(S;t) = \sum_{j=0}^{n} \hat{h}_j t^j$ и $\hat{g}(S;t) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \hat{g}_j t^j$ — соответствующие производящие функции.

1. $\hat{g}_0 = \hat{h}_0$, и $\hat{g}_j = \hat{h}_j - \hat{h}_{j-1}$ для $1 \leqslant j \leqslant [\operatorname{rk} S/2]$.

2. $\hat{h}(\varnothing;t) = \hat{g}(\varnothing;t) = 1$, где $\varnothing$ — пустой чум.

3. $\hat{h}(S;t) = \sum_{s \in S} \hat{g}(S_{[\hat{0},s)};t)(t-1)^{n-\rho(s)}$.

Упражнение 8.22. Докажите по индукции, что если S — чум граней границы n-мерного симплекса (то есть булева решетка без максимального элемента), то $\hat{h}(S;t) = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n$, а $\hat{g}(S;t) = 1$.

Упражнение 8.23. Докажите, что если S — симплициальный чум, то его торический h-вектор совпадает с обычным h-вектором.

Приведем без доказательств последнюю связку теорем (см. подробности в [9, 41]).

Теорема 8.24. *Пусть S — эйлеров чум ранга n. Тогда $\hat{h}_j = \hat{h}_{n-j}$.*

Теорема 8.25. *Пусть S — чум собственных граней рационального выпуклого многогранника. Тогда его торический h-вектор неотрицателен и удовлетворяет $\hat{h}_0 \leqslant \hat{h}_1 \leqslant \cdots \leqslant \hat{h}_{[n/2]}$.*

Теорема 8.26. *Торический h-вектор эйлерового чума линейно выражается через его флаговые f-числа.*

Замечание 8.27. Заметим, что вообще говоря торический h-вектор напрямую не связан с числом граней выпуклого многогранника или клеточного разбиения. Поэтому он остается экзотической комбинаторной характеристикой. Теоремы, сформулированные выше, безусловно хороши, но никаких конкретных результатов о числах граней они, к сожалению, не дают.

A Гомологии и когомологии

Содержание этого дополнения является стандартной темой в алгебраической топологии и приведено скорее для удобства. Тем, кто с этими темами раньше не сталкивался, рекомендуется почитать любую начальную книгу по топологии, например [45, 46].

A.1 Симплициальные гомологии и когомологии

Гомологии Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ (построения этого подраздела без изменений переносятся на симплициальные чумы, но для простоты мы ограничимся комплексами). Будем считать, что на множестве вершин задан естественный порядок: $1 < 2 < \cdots < m$. Фиксируем основное кольцо $\Bbbk$ — поле или кольцо целых чисел. При $j \geqslant 0$ определим группу

$$\mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk\{I \in K \mid \dim I = j\} = \Big\{ \sum_{I \in K, \dim I = j} a_I I \mid a_I \in \Bbbk \Big\}$$

(свободный $\Bbbk$-модуль, порожденный симплексами K размерности j), называемую группой j-мерных цепей комплекса K с коэффициентами в $\Bbbk$. Зададим $\Bbbk$-линейное отображение $\partial\colon \mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk)$, называемое симплициальным дифференциалом. Поскольку модуль $\mathcal{C}_j(K;\Bbbk)$ свободно порожден элементами $I \in K$, $\dim I = j$, достаточно задать значение дифференциала на этих элементах. Пусть $I = \{i_0, \cdots, i_j\}$, где $i_0 < \cdots < i_j$. Положим

$$\partial I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \{i_0, \ldots, \widehat{i_s}, \ldots, i_j\} \in \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk).$$

Имеем последовательность гомоморфизмов модулей

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_1(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_0(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} 0. \qquad \text{(A.1)}$$

Легко проверить, что $\partial\circ\partial = 0$ (упражнение), а значит $\operatorname{Im}(\partial\colon \mathcal{C}_{j+1}(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_j(K;\Bbbk)) \subset \operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk))$, т.е. (A.4) является дифференциальным комплексом. Мы будем обозначать его $(\mathcal{C}_*(K;\Bbbk), \partial)$. Определим группу j-х симплициальных гомологий (с коэффициентами в $\Bbbk$):

$$H_j(K;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk))}{\operatorname{Im}(\partial\colon \mathcal{C}_{j+1}(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_j(K;\Bbbk))}.$$

Важность понятия гомологий состоит в следующем факте, который будет объяснен позже:

Предложение A.1. *Группы симплициальных гомологий являются топологическим (и даже гомотопическим инвариантом), т.е. не зависят от триангуляции пространства. Иными словами, если K_1, K_2 — такие симплициальные комплексы, что*

$|K_1| \cong |K_2|$ (или даже $|K_1|$ гомотопически эквивалентно $|K_2|$), то $H_j(K_1;\Bbbk) \cong H_j(K_2;\Bbbk)$ при всех j и $\Bbbk$. То же верно и для определенных ниже групп когомологий и их приведенных аналогов.

Упражнение A.2. $H_0(K;\Bbbk) \cong \Bbbk$ тогда и только тогда, когда $|K|$ — связное топологическое пространство. В общем случае, $H_0(K;\Bbbk)$ является свободным $\Bbbk$-модулем, ранг которого равен числу связных компонент пространства $|K|$.

Приведем обзор смежный понятий, используемых в курсе.

Приведенные гомологии Определим гомоморфизм аугментации $\varepsilon\colon \mathcal{C}_0(K;\Bbbk) \to \Bbbk$ формулой $\varepsilon\colon \sum_{i\in[m]} a_i\{i\} \mapsto \sum_{i\in[m]} a_i$. Рассмотрим аугментированный комплекс симплициальных цепей:

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_1(K;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_0(K;\Bbbk) \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk \xrightarrow{\partial} 0. \tag{A.2}$$

Удобно формально положить $\mathcal{C}_{-1}(K;\Bbbk) = \Bbbk$ и считать гомоморфизм аугментации еще одним дифференциалом: из $\mathcal{C}_0(K;\Bbbk)$ в $\mathcal{C}_{-1}(K;\Bbbk)$. Гомологии аугментированного комплекса (A.2) называются приведенными симплициальными гомологиями комплекса K:

$$\widetilde{H}_j(K;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{C}_j(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_{j-1}(K;\Bbbk))}{\operatorname{Im}(\partial\colon \mathcal{C}_{j+1}(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}_j(K;\Bbbk))},$$

где на этот раз j может принимать значение -1. Заметим, что по определению $H_j(K;\Bbbk) \cong \widetilde{H}_j(K;\Bbbk)$ при $j \geqslant 1$, а ранг $\widetilde{H}_0(K;\Bbbk)$ на единицу меньше ранга $H_0(K;\Bbbk)$ для любого непустого комплекса K. В частности, $\widetilde{H}_0(K;\Bbbk) = 0$, если $|K|$ — связное пространство.

Замечание A.3. Если K — пустой, либо все вершины K призрачны, то все, написанное выше, также имеет смысл. В этом (и только этом) случае имеем $\widetilde{H}_{-1}(K;\Bbbk) \cong \Bbbk$.

Когомологии Применим к комплексу симплициальных цепей контравариантный функтор $\operatorname{Hom}(\cdot,\Bbbk)$. Иными словами рассмотрим $\Bbbk$-модули $\mathcal{C}^j(K;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(\mathcal{C}_j(K;\Bbbk),\Bbbk)$ (называемые модулями симплициальных коцепей) и гомоморфизмы $d\colon \mathcal{C}^j(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}^{j+1}(K;\Bbbk)$, заданные формулой $(d\varphi)(c) = \varphi(\partial c)$, где $\varphi \in \mathcal{C}^j(K;\Bbbk)$, а $c \in \mathcal{C}_{j+1}(K;\Bbbk)$. Имеем $d\circ d = 0$ (упражнение). Получаем дифференциальный комплекс симплициальных коцепей

$$\ldots \xleftarrow{d} \mathcal{C}^j(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \mathcal{C}^{j-1}(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} \mathcal{C}^1(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \mathcal{C}^0(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} 0, \tag{A.3}$$

который вкратце обозначается $(\mathcal{C}^*(K), d)$ Группой j-х симплициальных когомологий называется $\Bbbk$-модуль

$$H^j(K;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \mathcal{C}^j(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}^{j+1}(K;\Bbbk))}{\operatorname{Im}(d\colon \mathcal{C}^{j-1}(K;\Bbbk) \to \mathcal{C}^j(K;\Bbbk))}.$$

Применив аналогичную конструкцию к аугментированному комплексу симплициальных цепей, получим аугментированный комплекс симплициальных коцепей:

$$\ldots \xleftarrow{d} \mathcal{C}^j(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \mathcal{C}^{j-1}(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} \mathcal{C}^1(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \mathcal{C}^0(K;\Bbbk) \xleftarrow{d} \Bbbk \xleftarrow{d} 0, \qquad \text{(A.4)}$$

гомологии которого называются приведенными когомологиями симплициального комплекса K и обозначаются $\widetilde{H}^j(K;\Bbbk)$.

Комментарии

Замечание A.4. Если $\Bbbk$ — поле, то имеет место естественный изоморфизм $H^j(K;\Bbbk) \cong \mathrm{Hom}(H_j(K;\Bbbk),\Bbbk)$. В частности, векторные пространства $H^j(K;\Bbbk)$ и $H_j(K;\Bbbk)$ имеют одну размерность, а значит, изоморфны (хотя и не естественно). В случае $\Bbbk = \mathbb{Z}$ связь между $H^j(K;\mathbb{Z})$ и $H_j(K;\mathbb{Z})$ более сложная, и описывается теоремой об универсальных коэффициентах.

Замечание A.5. Дифференциальные комплексы $(\mathcal{C}_*, \partial)$, $(\mathcal{C}^*, d)$ и их аугментированные аналоги являются дифференциальными комплексами конечномерных $\Bbbk$-модулей, а значит гомологии и когомологии симплициальных комплексов вычисляются алгоритмически средствами линейной алгебры.

A.2 Сингулярные (ко)гомологии

Сингулярные гомологии Пусть X — топологическое пространство. Сингулярным j-мерным симплексом в X называется непрерывное отображение $\sigma\colon \triangle^j \to X$, где $\triangle^j$ — j-мерный симплекс. Рассмотрим $C_j(X;\Bbbk)$ — свободный $\Bbbk$-модуль, порожденный всеми j-мерными сингулярными симплексами пространства X. Пусть $\triangle^j$ имеет вершины $p_0,\ldots,p_j$. Введем сингулярный дифференциал $\partial\colon C_j(X;\Bbbk) \to C_{j-1}(X;\Bbbk)$, действующий на образующей (т.е. на сингулярном симплексе σ) как

$$\partial\sigma \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{j}(-1)^s\sigma|_{\{p_0,\ldots,\widehat{p_s},\ldots,p_j\}},$$

где $\sigma|_{\{p_0,\ldots,\widehat{p_s},\ldots,p_j\}}$ — ограничение отображения σ на гипергрань симплекса $\triangle^j$, не содержащую вершину p_s (т.е. по определению $\sigma|_{\{p_0,\ldots,\widehat{p_s},\ldots,p_j\}}$ есть $(j-1)$-мерный сингулярный симплекс, а значит лежит в группе $C_{j-1}(X;\Bbbk)$). Имеем последовательность $\Bbbk$-линейных гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_j(X;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(X;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(X;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} C_0(X;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} 0, \qquad \text{(A.5)}$$

где, как легко проверить, $\partial\circ\partial = 0$, т.е. имеем дифференциальный комплекс. Группой j-х (сингулярных) гомологий пространства X (с коэффициентами в $\Bbbk$) называется $\Bbbk$-модуль

$$H_j(X;\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Ker}(\partial\colon C_j(X;\Bbbk) \to C_{j-1}(X;\Bbbk))}{\mathrm{Im}(\partial\colon C_{j+1}(X;\Bbbk) \to C_j(X;\Bbbk))}.$$

Как и ранее, можно определить гомоморфизм аугментации $\varepsilon\colon C_0(X;\Bbbk) \to \Bbbk$, отображающий каждый 0-мерный сингулярный симплекс (т.е. попросту точку пространства X) в $1 \in \Bbbk$. Приведенные сингулярные гомологии $\widetilde{H}_j(X;\Bbbk)$ определяются как гомологии аугментированного дифференциального комплекса сингулярных цепей (полностью аналогично приведенным симплициальным гомологиям).

Относительные сингулярные гомологии Пусть (X, A) — топологическая пара, т.е. X — топологическое пространство, а A — его подпространство. Мы можем считать, что $C_j(A;\Bbbk) \subset C_j(X;\Bbbk)$ при всех $j \geqslant 0$. Иными словами, можно считать, что сингулярные симплексы на A — это в точности те сингулярные симплексы на X, образы которых попали в A. Таким образом дифференциальный комплекс $(C_*(A;\Bbbk), \partial)$ является дифференциальным подкомплексом дифференциального комплекса $(C_*(X;\Bbbk), \partial)$. Построим фактор-комплекс, а именно, рассмотрим $\Bbbk$-модули

$$C_j(X, A;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} C_j(X;\Bbbk)/C_j(A;\Bbbk),$$

и дифференциал $\partial\colon C_j(X, A;\Bbbk) \to C_{j-1}(X, A;\Bbbk)$, индуцированный дифференциалом $\partial\colon C_j(X;\Bbbk) \to C_{j-1}(X;\Bbbk)$. Имеем дифференциальный комплекс

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_j(X, A;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(X, A;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(X, A;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} C_0(X, A;\Bbbk) \xrightarrow{\partial} 0. \qquad \text{(A.6)}$$

Гомологии этого комплекса, т.е. группы

$$H_j(X, A;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(\partial\colon C_j(X, A;\Bbbk) \to C_{j-1}(X, A;\Bbbk))}{\operatorname{Im}(\partial\colon C_{j+1}(X, A;\Bbbk) \to C_j(X, A;\Bbbk))},$$

называются группами относительных гомологий пары (X, A).

Упражнение A.6. Пусть X — топологическое пространство и $\mathrm{pt} \in X$ — произвольная точка. Тогда $H_*(X, \mathrm{pt};\Bbbk) \cong \widetilde{H}_*(X;\Bbbk)$.

Сингулярные когомологии Применяя функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \Bbbk)$ к дифференциальному комплексу (A.5) получаем дифференциальный комплекс

$$\ldots \xleftarrow{d} C^j(X;\Bbbk) \xleftarrow{d} C^{j-1}(X;\Bbbk) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} C^1(X;\Bbbk) \xleftarrow{d} C^0(X;\Bbbk) \xleftarrow{d} 0, \qquad \text{(A.7)}$$

где $C^j(X;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(C_j(X;\Bbbk), \Bbbk)$, а d — отображение, двойственное к ∂. Группа

$$H^j(X;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(d\colon C^j(X;\Bbbk) \to C^{j+1}(X;\Bbbk))}{\operatorname{Im}(d\colon C^{j-1}(X;\Bbbk) \to C^j(X;\Bbbk))}.$$

называется группой j-мерных сингулярных когомологий пространства X.

Пусть

$$C^j(X, A;\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in C^*(X;\Bbbk) \mid \forall \sigma \in C_*(A)(\varphi(\sigma) = 0)\},$$

а $d\colon C^j(X, A;\Bbbk) \to C^{j+1}(X, A;\Bbbk)$ является ограничением дифференциала $d\colon C^j(X;\Bbbk) \to C^{j+1}(X;\Bbbk)$. Тогда $d \circ d = 0$ и можно определить относительные когомологии $H^j(X, A;\Bbbk)$ по тому же рецепту, что и все прочее.

Свойства Для упрощения записи мы не пишем кольцо коэффициентов.

Функториальность Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда при всех $j \geqslant 0$ имеются канонические $\Bbbk$-линейные гомоморфизмы $f_*\colon H_j(X) \to H_j(Y)$ и $f^*\colon H^j(Y) \to H^j(X)$, называемые индуцированными отображениями в гомологиях и когомологиях соответственно. Существуют аналогичные индуцированные отображения в приведенных гомологиях и когомологиях. Отображение пары $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ (т.е. $f\colon X \to Y$, т.ч. $f(A) \subset B$) индуцирует гомоморфизмы относительных гомологий $f_*\colon H_j(X, A) \to H_j(Y, B)$ и когомологий $f^*\colon H^j(Y, B) \to H^j(X, A)$.

Гомотопическая инвариантность Если $f, g\colon X \to Y$ — гомотопные отображения, то $f_* = g_*$ и $f^* = g^*$. В частности, отсюда следует, что если X гомотопически эквивалентно Y, то $H_j(X) \cong H_j(Y)$ и $H^j(X) \cong H^j(Y)$. Аналогично для приведенных версий.

Связь с относительными гомологиями Пусть $A \subset X$. Тогда имеется естественное отображение $p_*\colon H_j(X) \to H_j(X, A)$, индуцированное отображением групп сингулярных цепей $C_j(X) \to C_j(X)/C_j(A) = C_j(X, A)$. Аналогично, имеется отображение $p_*\colon \widetilde{H}_j(X) \to H_j(X, A)$. В когомологиях имеем отображения в обратную сторону: $p^*\colon H^j(X, A) \to H^j(X)$ и $p^*\colon H^j(X, A) \to \widetilde{H}^j(X)$.

Геометрический смысл относительных гомологий Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество. Тогда имеется естественный изоморфизм $H_j(X, A) \cong H_j(X/A, \mathrm{pt}) = \widetilde{H}_j(X/A)$. При этом отображение $p_*\colon \widetilde{H}_j(X) \to H_j(X, A)$ из предыдущего пункта совпадает с отображением $\jmath_*\colon \widetilde{H}_j(X) \to \widetilde{H}_j(X/A)$, индуцированным отображением проекции $\jmath\colon X \to X/A$. Для когомологий имеем $\widetilde{H}^j(X/A) \cong \widetilde{H}^j(X, A)$ и $p^* = \jmath^*\colon \widetilde{H}^j(X/A) \to H^j(X)$.

Точная последовательность пары Любой топологической паре (X, A) естественным образом сопоставлена длинная точная последовательность

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_j(A) \xrightarrow{\imath_*} H_j(X) \xrightarrow{p_*} H_j(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{j-1}(A) \xrightarrow{\imath_*} \cdots$$

и ее версия для приведенных гомологий

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_j(A) \xrightarrow{\imath_*} \widetilde{H}_j(X) \xrightarrow{\jmath_*} H_j(X, A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{j-1}(A) \xrightarrow{\imath_*} \cdots$$

В когомологиях все то же самое, только стрелки в обратную сторону:

$$\cdots \xleftarrow{\delta} H^j(A) \xleftarrow{\imath^*} H^j(X) \xleftarrow{p^*} H^j(X, A) \xleftarrow{\delta} H^{j-1}(A) \xleftarrow{\imath^*} \cdots$$

$$\cdots \xleftarrow{\delta} \widetilde{H}^j(A) \xleftarrow{\imath^*} \widetilde{H}^j(X) \xleftarrow{\jmath^*} H^j(X, A) \xleftarrow{\delta} \widetilde{H}^{j-1}(A) \xleftarrow{\imath^*} \cdots$$

Во всех случаях гомоморфизм δ называется связывающим гомоморфизмом в точной последовательности (гомологий/когомологий) пары.

Вырезание Пусть $A \subset X$ и Z — такое подмножество X, что его замыкание содержится во внутренности A. Тогда включение пары $g\colon (X\backslash Z, A\backslash Z) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизм $H_j(X\backslash Z, A\backslash Z) \cong H_j(X, A)$. Аналогично для когомологий.

Надстройка Пусть ΣX — надстройка над X. Тогда $\widetilde{H}_{j+1}(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_j(X)$. Заметим, что n-кратная надстройка $\Sigma^n X$ — это то же самое, что джойн X с $(n-1)$-мерной сферой. Значит

$$\widetilde{H}_{j+n}(X * S^{n-1}) \cong \widetilde{H}_j(X). \tag{A.8}$$

Аналогично для когомологий.

Связь сингулярных и симплициальных (ко)гомологий Пусть K — симплициальный комплекс. Тогда $H_j(K) \cong H_j(|K|)$ (симплициальные гомологии совпадают с сингулярными). Аналогично для когомологий и приведенных версий. Отсюда следует Предложение A.1, поскольку сингулярные гомологии — понятие, не зависящее ни от какой триангуляции.

Из этого свойства также следует, что для триангулируемых пространств X группа $H_j(X)$ имеет конечный ранг (что из определения отнюдь не очевидно, поскольку группа сингулярных цепей $C_j(X)$ — это, вообще говоря, огромный несчетномерный модуль).

Точная последовательность Майера–Вьеториса Это эквивалентная запись точной последовательности пары, однако часто именно в таком виде ее удобно использовать. Пусть $A, B \subset X$ — такие подмножества, что X лежит в объединении их внутренностей, и пусть также $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда имеется точная последовательность

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_j(A \cap B) \xrightarrow{\imath_* \oplus \jmath_*} \widetilde{H}_j(A) \oplus \widetilde{H}_j(B) \xrightarrow{r_* - s_*} \widetilde{H}_j(X) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_j(A \cap B) \xrightarrow{\imath_* \oplus \jmath_*} \cdots$$

в которой $\imath_*$ и $\jmath_*$ индуцированы вложениями $\imath\colon A \cap B \to A$ и $\jmath\colon A \cap B \to B$, а r_*, s_* индуцированы вложениями $r\colon A \to X$ и $s\colon B \to X$. Точную последовательность Майера–Вьеториса можно понимать как алгебраический аналог формулы включения-исключения: она связывает воедино гомологии A, B, их пересечения и их объединения. Точная последовательность Майера–Вьеториса в когомологиях полностью аналогична, только все стрелки в обратную сторону, а индексы — сверху.

Формула Кюннета над полем Если $\Bbbk$ — поле, то имеются изоморфизмы

$$\sum\nolimits_j H_j(X) \otimes H_{k-j}(Y) \xrightarrow{\cong} H_k(X \times Y),$$

$$\sum\nolimits_j H^j(X) \otimes H^{k-j}(Y) \xrightarrow{\cong} H^k(X \times Y).$$

Двойственность Пуанкаре Пусть X — компактное ориентируемое гомологическое многообразие без края (будем считать также, что оно триангулируемо), $\dim X = d$. Тогда $H_j(X) \cong H^{d-j}(X)$. В частности, если $\Bbbk$ — поле, то $H_j(X) \cong H_{d-j}(X)$.

Умножение в когомологиях Прямая сумма всех когомологий $H^*(X) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} H^j(X)$ пространства X обладает естественной структурой ассоциативной градуированно коммутативной градуированной алгебры с единицей. Градуированная коммутативность означает, что выполнено равенство $ab = (-1)^{kl}ba$, где $a \in H^k(X)$, $b \in H^l(X)$.

Алгебра когомологий замкнутого многообразия (связного ориентируемого триангулируемого гомологического) с коэффициентами в поле является алгеброй Пуанкаре (см. Определение B.34).

A.3 Комбинаторные следствия

Определение A.7. Число $\beta_j = \beta_j(X) = \operatorname{rk}_{\Bbbk} H_j(X;\Bbbk)$ называется j-м числом Бетти пространства X. Мы также будем пользоваться обозначением $\widetilde{\beta}_j(X) = \operatorname{rk}_{\Bbbk} \widetilde{H}_j(X;\Bbbk)$ (приведенное число Бетти).

Замечание A.8. Вообще говоря, число Бетти зависит от кольца $\Bbbk$, однако, чтобы не переусложнять запись, мы эту зависимость никак не отмечаем. Обычно кольцо $\Bbbk$ фиксировано, и предполагается, что все числа Бетти вычисляются именно над этим кольцом, так что путаницы не возникает.

Замечание A.9. Из определений следует, что $\widetilde{\beta}_j = \beta_j$ при $j \geqslant 1$ и $\widetilde{\beta}_0 = \beta_0 - 1$. Нулевое число Бетти β_0 равно числу компонент линейной связности пространства.

Замечание A.10. Для замкнутых ориентируемых (гомологических, триангулируемых) многообразий X размерности d имеем $\beta_j = \beta_{d-j}$ по двойственности Пуанкаре.

Напомним несложный алгебраический факт. Пусть

$$0 \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0$$

— дифференциальный комплекс конечномерных $\Bbbk$-модулей (т.е. $\partial \circ \partial = 0$), а H_* — его гомологии, т.е. $H_j = \frac{\operatorname{Ker} \partial \colon C_j \to C_{j-1}}{\operatorname{Im} \partial \colon C_{j+1} \to C_j}$. Тогда имеем

$$\operatorname{rk} C_0 - \operatorname{rk} C_1 + \operatorname{rk} C_2 - \cdots + (-1)^n \operatorname{rk} C_n = \operatorname{rk} H_0 - \operatorname{rk} H_1 + \operatorname{rk} H_2 - \cdots + (-1)^n \operatorname{rk} H_n$$

Применяя это утверждение к дифференциальному комплексу симплициальных цепей (A.4), получаем

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \beta_j,$$

где f_j — число j-мерных симплексов симплициального комплекса K, а β_j — его числа Бетти. Число $\chi(K) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \beta_j$ называется эйлеровой характеристикой симплициального комплекса. Польза от него колоссальная: с одной стороны оно элементарно считается при помощи чисел граней, с другой стороны оно является гомотопическим инвариантом, поскольку таковыми являются числа Бетти.

Пример A.11. Пусть $X \cong S^d$, $d \geqslant 1$. Имеем $H_j(S^d) \cong \Bbbk$ при $j = 0, d$ и $H_j(S^d) = 0$ при всех прочих j (упражнение). Значит $\chi(S^d) = 1 + (-1)^d$. При $d = 2$ получаем, что $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ для любой триангуляции сферы, что есть классическая формула Эйлера.

Упражнение A.12. Пусть A, B — симплициальные подкомплексы комплекса X. Тогда $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. Для произведения пространств имеем $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Упражнение A.13. Эйлерова характеристика нечетномерного замкнутого ориентируемого многообразия равна нулю.

B Градуированные алгебры и модули

B.1 Основные определения

Алгебры Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле. Векторное пространство V над $\Bbbk$ называется градуированным, если фиксировано представление V в виде прямой суммы $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_j$. Элементы из V_j называются однородными степени j. Рядом Гильберта–Пуанкаре градуированного пространства V называется формальный ряд $\mathrm{Hilb}(V; t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim V_j t^j \in \mathbb{Z}[[t, t^{-1}]]$.

Градуированное векторное пространство A называется градуированной алгеброй, если задано билинейное отображение $A \times A \to A$ (умножение), такое, что произведение однородных элементов степеней j и k есть однородный элемент степени $j + k$. Мы всегда будем предполагать, что выполнены следующие свойства:

1. Существует единица, т.е. такой элемент $1 \in A$, что $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. Очевидно, что $1 \in A_0$.

2. Умножение ассоциативно, т.е. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3. Умножение градуированно–коммутативно, т.е. $a \cdot b = (-1)^{kl} b \cdot a$, если $a \in A_k$, $b \in A_l$, либо просто коммутативно $a \cdot b = b \cdot a$.

4. $A_k = 0$ при $k < 0$.

Алгебра называется связной, если $A_0 \cong \Bbbk$ (иными словами, однородная компонента A_0 порождена единицей). В таком случае обозначим $\bigoplus_{j>0} A_j$ через A_+.

Как правило, мы будем рассматривать алгебры, у которых все нечетные компоненты нулевые. Для таких алгебр градуированная коммутативность совпадает с обычной коммутативностью. В дальнейшем предполагается, что алгебра A связна и коммутативна.

Пример B.1. Ключевой для нас пример алгебры (на самом деле, единственный, который нам реально нужен) — алгебра многочленов $\Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$, где $\deg v_i = 2$. Для краткости обозначим ее через $\Bbbk[m]$. Ее однородная компонента степени $2j$ порождена всевозможными мономами $v_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot v_m^{k_m}$, такими что $\sum k_i = j$, $k_i \geqslant 0$. Размерность компоненты $\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]_{2j}$ равна числу всех таких мономов. Нетрудно посчитать (используя школьный метод шаров и перегородок), что это число равно $\binom{m+j-1}{j-1}$. Таким образом, $\mathrm{Hilb}(\Bbbk[m];t) = \frac{1}{(1-t^2)^m}$.

Модули Градуированное векторное пространство $M = \bigoplus_i M_i$ называется левым модулем над алгеброй $A = \bigoplus_i A_i$, если задано действие A на M, т.е. билинейное отображение $A\times M \to M$, такое что $A_i\cdot M_j \subset M_{i+j}$ и выполнено $(a_1\cdot a_2)\cdot\mu = a_1\cdot(a_2\cdot\mu)$ для любых $a_1,a_2\in A$ и $\mu\in M$. Аналогично, $M = \bigoplus_i M_i$ называется правым модулем над $A = \bigoplus_i A_i$, если задано билинейное отображение $M\times A\to M$, такое что $M_j\cdot A_i \subset M_{i+j}$ и $\mu\cdot(a_1\cdot a_2) = (\mu\cdot a_1)\cdot a_2$. Если A — коммутативна, то понятия левого и правого модуля совпадают, а если A — градуированно-коммутативна, то левый модуль можно превратить в правый модуль, немного подкрутив знаки. Так или иначе, мы будем рассматривать лишь коммутативный случай, и не будем различать правые и левые модули.

Пусть $\mathcal{I}\subset A$ — идеал в алгебре A, т.е. такое подмножество, что $\mathcal{I}\cdot A\subset\mathcal{I}$. Идеал называется однородным, если $\mathcal{I} = \bigoplus_j(\mathcal{I}\cap A_j)$. Например, любой идеал, порожденный набором однородных элементов, является однородным. Любой однородный идеал естественным образом превращается в модуль над алгеброй A.

С модулями над A можно делать очень много таких вещей, которые мы привыкли делать с векторными пространствами: можно брать прямые суммы, подмодули и фактор-модули. В частности, фактор-алгебра алгебры A по идеалу $\mathcal{I}$ также является модулем над A.

Для A-модуля M подмодуль

$$\mathrm{Soc}\, M = \{\mu\in M \mid A_+\cdot\mu = 0\},$$

называется цоколем модуля M.

Гомоморфизмы Гомоморфизмом A-модулей называется такой гомоморфизм $\phi\colon M\to N$, что $\phi(M_j)\subset N_j$ и $\phi(a\cdot\mu) = a\cdot\phi(\mu)$ для любых $a\in A$, $\mu\in M$. Если же вместо первого свойства выполнено $\phi(M_j)\subset N_{j+s}$, то говорят, что ϕ — гомоморфизм, повышающий градуировку на s (или понижающий на $-s$, если $s<0$). Также говорят, что ϕ является однородным гомоморфизмом степени s.

Изоморфизм модулей определяется стандартным образом (гомоморфизм, для которого существует обратный гомоморфизм).

Свободные модули Пусть S — произвольное множество (возможно, бесконечное) и каждому элементу $s\in S$ сопоставлено целое число d_s. Свободным модулем на S называется модуль $A\langle S\rangle$, состоящий из всевозможных выражений вида $\sum_{s\in S} a_s\cdot s$, где $a_s\in A$ и лишь конечное число коэффициентов a_s не равно нулю. Сложение и умножение на элементы алгебры A определяется естественным образом. Градуировка определяется правилом $\deg a_s = d_s$. Мощность $|S|$, в случае если она конечна, называется рангом свободного модуля $A\langle S\rangle$. Модули, изоморфные свободным, мы тоже называем свободными.

Конечно порожденные модули Модуль M называется конечно порожденным, если существует набор однородных элементов $\mu_1, \ldots, \mu_r \in M$, таких что любой элемент $\mu \in M$ представляется в виде $a_1 \cdot \mu_1 + \cdots + a_r \cdot \mu_r$ для некоторых $a_1, \ldots, a_r \in A$. Если такое представление единственно, то M является свободным конечно порожденным.

Из теоремы Гильберта о базисе следует [23], что подмодуль конечно порожденного модуля над $\Bbbk[m]$ конечно порожден.

Цепные и коцепные комплексы, точные последовательности Последовательность гомоморфизмов A-модулей

$$\ldots \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \ldots$$

называется точной, если $\operatorname{Im} f_j = \operatorname{Ker} f_{j+1}$. Последовательность гомоморфизмов A-модулей

$$\ldots \to C_{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} C_j \xrightarrow{\partial_j} C_{j-1} \xrightarrow{\partial_{j-1}} \ldots$$

называется цепным комплексом, если $\operatorname{Im} \partial_{j+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_j$. В этом случае модуль $H_j = \operatorname{Ker} \partial_j / \operatorname{Im} \partial_{j+1}$ называется модулем j-х гомологий. Аналогично, последовательность гомоморфизмов

$$\ldots \to C^{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} C^j \xrightarrow{\partial_j} C^{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} \ldots$$

называется коцепным комплексом, если $\operatorname{Im} \partial_{j-1} \subset \operatorname{Ker} \partial_j$. В этом случае модуль $H^j = \operatorname{Ker} d_j / \operatorname{Im} d_{j-1}$ называется модулем j-х когомологий. Как в цепном, так и в коцепном случае, гомоморфизмы ∂_j, d_j называются дифференциалами. Для удобства цепные комплексы обозначаются (C_*, ∂), а коцепные (C^*, d). Говорят, что задан гомоморфизм коцепных комплексов $f\colon (C^*, d) \to (D^*, d)$ если заданы гомоморфизмы A-модулей $f_j\colon C^j \to D^j$, коммутирующие с дифференциалами. Гомоморфизм коцепных комплексов индуцирует гомоморфизм модулей когомологий $\widetilde{f}\colon H(C^*) \to H(D^*)$.

Пусть $f, g\colon C^* \to D^*$ гомоморфизмы коцепных комплексов. Коцепной гомотопией между f и g называется набор A-гомоморфизмов $s = \{s_i\colon C^i \to D^{i-1}\}$, таких что $ds + sd = f - g$. Если для f и g существует коцепная гомотопия, то f и g индуцируют одинаковый гомоморфизм в когомологиях. Два комплекса C^* и D^* называются гомотопически эквивалентными, если существуют два гомоморфизма $f\colon C^* \leftrightarrows D^*\colon h$, такие что $f \circ h$ гомотопен id_D, а $h \circ f$ гомотопен id_C. Когомологии гомотопически эквивалентных комплексов совпадают.

Тензорные произведения Пусть M и N — два модуля над алгеброй A. Рассмотрим свободный модуль $U_{M\times N}$ на множестве $M \times N$. Тензорным произведением $M \otimes_A N$ называется фактормодуль модуля $U_{M\times N}$ по подмодулю, порожденному элементами

$$(\mu_1 + \mu_2, \nu) - (\mu_1, \nu) - (\mu_2, \nu),$$

$$(a \cdot \mu, \nu) - a \cdot (\mu, \nu), \qquad (\mu, a \cdot \nu) - a \cdot (\mu, \nu),$$

взятыми для всех однородных элементов $\mu, \mu_1, \mu_2 \in M$, $\nu \in N$, $a \in A$. Градуировка на $M \otimes_A N$ вводится естественным образом: компонента $(M \otimes_A N)_j$ порождена классами элементов вида (μ, ν), где $\mu \in M_k$, $\nu \in N_l$ и $k + l = j$. Легко проверяются изоморфизмы $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$, $(M \otimes_A N) \otimes_A L \cong M \otimes_A (N \otimes_A L)$, $M \otimes_A A \cong M$, где A рассматривается как модуль над собой. Кроме того, тензорное произведение является двухместным ковариантным функтором, т.е. гомоморфизм $M_1 \to M_2$ индуцирует гомоморфизм $M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N$ (и аналогично для гомоморфизма $N_1 \to N_2$).

Заметим, что если M — свободный модуль на множестве S_1, а N — свободный модуль на множестве S_2, то $M \otimes N$ является свободным модулем на множестве $S_1 \times S_2$ (причем степень порождающего элемента (s_1, s_2) равна $\deg s_1 + \deg s_2$).

Модуль гомоморфизмов Пусть M, N — градуированные модули над коммутативной градуированной алгеброй A. На множестве $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ всех однородных A-модульных гомоморфизмов из M в N можно ввести структуру градуированного A-модуля, в которой градуированная компонента $\mathrm{Hom}_A(M, N)_j$ состоит из всех однородных гомоморфизмов степени j, а умножение гомоморфизмов на элементы из A задается "поточечно": если $\phi\colon M \to N$ и $a \in A$, то $(a\phi)(\mu) = a\phi(\mu)$.

Заметим, что конструкция $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ контравариантна по аргументу M и ковариантна по аргументу N. Иными словами, гомоморфизм $M_1 \to M_2$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M_2, N) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$, а гомоморфизм $N_1 \to N_2$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, N_1) \to \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$.

B.2 Необходимые понятия из гомологической алгебры

Проективные и инъективные модули A-модуль M называется проективным, если для любого эпиморфизма $f\colon N_1 \twoheadrightarrow N_2$ и гомоморфизма $g\colon M \to N_2$ существует $h\colon M \to N_1$, такой что $f \circ h = g$:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Эквивалентно, M проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного модуля.

Известно, что любой проективный модуль над $\Bbbk[m]$ является свободным. В неградуированном случае — это серьезная теорема Суслина–Квиллена. В градуированном случае это несложно доказывается. Поскольку мы будем работать над кольцом $\Bbbk[m]$, о понятии проективного модуля можно в дальнейшем забыть, поскольку вместо проективных мы будем рассматривать свободные модули.

A-модуль M называется инъективным, если для любого мономорфизма $f\colon N_1 \hookrightarrow N_2$ и гомоморфизма $g\colon N_1 \to M$ существует $h\colon N_2 \to M$, такой что $h \circ f = g$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N_2 \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Пример B.2. Этот пример нам понадобится. Рассмотрим градуированное векторное пространство $E(\Bbbk) = \Bbbk[v_1^{-1}, \ldots, v_m^{-1}]$, где $\deg v_i^{-1} = -2$. Введем на $E(\Bbbk)$ структуру $\Bbbk[m]$-модуля, положив $v_i \cdot (v_1^{-k_1} \ldots v_m^{-k_m})$ равным $v_1^{-k_1} \ldots v_i^{-k_i+1} \ldots v_m^{-k_m}$, если $k_i \geqslant 1$, и равным нулю иначе. Известно, что $E(\Bbbk)$ — инъективный модуль[7]. Заметим, что $E(\Bbbk)$ не является конечно порожденным.

Свободная резольвента Пусть M — конечно порожденный модуль над связной коммутативной алгеброй A. Последовательность гомоморфизмов

$$\ldots \to R^{-j} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} R^{-2} \xrightarrow{d} R^{-1} \xrightarrow{d} R^0 \to M \to 0 \tag{B.1}$$

называется свободной (соотв. проективной) резольвентой модуля M, если она точна и R^{-j} свободны (соотв. проективны). Модуль R^{-j} называется модулем j-х сизигий модуля M. Сизигии не являются однозначно определенным термином, поскольку у модуля M могут быть различные резольвенты. Если $R^{-j} = 0$ при $j > p$, и $R^{-p} \neq 0$, то p называется длиной резольвенты. Наименьшая возможная длина резольвенты называется проективной размерностью модуля M и обозначается $\operatorname{pdim} M$ (если резольвент конечной длины нет, полагают $\operatorname{pdim} M = \infty$).

Теорема B.3 (Теорема Гильберта о сизигиях)**.** *Конечно порожденный модуль над кольцом многочленов $\Bbbk[m]$ имеет проективную размерность не больше m.*

Резольвента называется минимальной, если $d(R^{-j}) \subseteq A_+ \cdot R^{-j+1}$. Минимальные резольвенты можно строить способом, описанным ниже. Мы будем предполагать, что $A = \Bbbk[m]$ (хотя то же самое построение работает для произвольного нетерова кольца A).

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — минимальный по числу элементов набор порождающих модуля M. Тогда существует эпиморфизм f из свободного модуля $R^0 = A\langle \mu_1, \ldots, \mu_s \rangle$ в M. Ядро f лежит в $A_+ \cdot R^0$ (в противном случае мы бы имели $\sum_{i=1}^s a_i \mu_i = 0$ в M и какой-то из коэффициентов a_i лежит в $A_0 \cong \Bbbk$, но тогда соответствующая порождающая μ_i выражалась бы через остальные, а значит выбранный набор порождающих не был бы минимальным). По теореме Гильберта о базисе, $\operatorname{Ker} f \subset R^0$ является свободно порожденным модулем. Выберем в нем минимальную систему порождающих $r_1, \ldots, r_k$ и построим естественный эпиморфизм d из свободного модуля $R^{-1} = A\langle r_1, \ldots, r_k \rangle$ в $\operatorname{Ker} f \subset R^0$ (отображающий r_i в r_i). Как и ранее, получаем, что $\operatorname{Ker} d \in A_+ \cdot R^{-1}$. Далее продолжаем строить модули R^{-j} в том же духе.

[7]Более того, $E(\Bbbk)$ есть минимальный инъективный модуль, содержащий $\Bbbk[m]$-модуль $\Bbbk$. Иными словами, $E(\Bbbk)$ есть инъективная оболочка модуля $\Bbbk$.

Замечание B.4. Аналогичный процесс можно устроить в случае, когда M не является конечно порожденным, но при этом каждая градуированная компонента M_j является конечномерным векторным пространством (см.[18, Constr.A.2.2]).

Известно, что проективная размерность равна длине минимальной резольвенты. Иными словами, среди всех резольвент минимальную длину имеет минимальная резольвента.

Инъективная резольвента Последовательность гомоморфизмов

$$0 \to M \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \cdots \to \mathcal{I}^l \to \cdots$$

называется инъективной резольвентой модуля M, если она точна и $\mathcal{I}^j$ инъективны. Известно, что инъективная резольвента существует, но может не быть конечной.

Тор-функтор Пусть M, N — модули, и $R^* \to M$ — свободная резольвента модуля M (краткое обозначение для (B.1)). Применим к R^* функтор $\otimes_A N$ (сам модуль M мы убрали из резольвенты):

$$\ldots \to R^{-j} \otimes_A N \xrightarrow{d \otimes_A N} \ldots \xrightarrow{d \otimes_A N} R^{-2} \otimes_A N \xrightarrow{d \otimes_A N} R^{-1} \otimes_A N \xrightarrow{d \otimes_A N} R^0 \otimes_A N \to 0. \quad \text{(B.2)}$$

Поскольку $d \circ d = 0$ в R^*, имеем $(d \otimes_A N) \circ (d \otimes_A N) = 0$, т.е. (B.2) есть коцепной комплекс (однако он уже может не быть точным, в отличие от R^*). Модуль $(-j)$-х когомологий комплекса (B.2) обозначается $\mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N)$. Известны следующие свойства (см.[29]):

1. $\mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N)$ не зависит от выбора резольвенты R^* (таким образом, Тор-модули, в отличие от сизигий, являются инвариантными объектами).

2. $\mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N) \cong \mathrm{Tor}_A^{-j}(N, M)$ (т.е. не имеет значения, чью резольвенту мы взяли в определении: мы могли бы с тем же успехом взять резольвенту модуля N, тензорно умножить на M и посчитать когомологии).

3. $\mathrm{Tor}_A^0(M, N) \cong M \otimes_A N$.

4. $\mathrm{Tor}^{-j}(\cdot, N)$ и $\mathrm{Tor}^{-j}(M, \cdot)$ являются ковариантными функторами.

5. Короткая точная последовательность $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathrm{Tor}_A^{-j}(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-j}(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-j}(M_3, N) \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Tor}_A^{-1}(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-1}(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-1}(M_3, N) \to \\ \to \mathrm{Tor}_A^{0}(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_A^{0}(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_A^{0}(M_3, N) \to 0 \end{aligned} \quad \text{(B.3)}$$

   (говоря абстрактным языком, Тор-функтор есть производный функтор функтора тензорного произведения).

6. Если M и N сами по себе являются коммутативными алгебрами (умножение в них должно быть совместимо с умножением на скаляры из A), то $\mathrm{Tor}^*_A(M,N) = \bigoplus_j \mathrm{Tor}^{-j}_A(M,N)$ также имеет структуру алгебры (это свойство менее общеизвестно, но оно следует из существования мультипликативных резольвент, см.[1]).

7. Пусть $\Bbbk$ снабжено структурой A-модуля посредством канонического эпиморфизма $A \to A/A_+ \cong \Bbbk$. Тогда $\operatorname{pdim} M = \max\{j \mid \mathrm{Tor}^{-j}_A(M,\Bbbk) \neq 0\}$.

Ext-функтор Пусть M, N — модули над коммутативной алгеброй A, а $R^* \to M$ — свободная резольвента модуля M. Применим к R^* контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$. Получим дифференциальный комплекс

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(R^0, N) \to \mathrm{Hom}_A(R^{-1}, N) \to \mathrm{Hom}_A(R^{-2}, N) \to \cdots.$$

Его когомологии в позиции $-j$ обозначаются $\mathrm{Ext}^j_A(M,N)$ и называются Ext-модулями.

Свойства Ext-модулей во многом похожи на свойства Tor-модулей:

1. $\mathrm{Ext}^j_A(M,N)$ не зависит от выбора резольвенты R^*.

2. $\mathrm{Ext}^j_A(M,N)$ можно эквивалентно определить, применив функтор $\mathrm{Hom}_A(M,\cdot)$ к инъективной резольвенте модуля N, и взяв когомологии.

3. $\mathrm{Ext}^0_A(M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

4. $\mathrm{Ext}^j(\cdot, N)$ является контравариантным функтором, а $\mathrm{Ext}^j(M,\cdot)$ — ковариантным.

5. Короткая точная последовательность $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Ext}^0(M_3,N) \to \mathrm{Ext}^0(M_2,N) \to \mathrm{Ext}^0(M_1,N) \to{}& \\ \mathrm{Ext}^1(M_3,N) \to \mathrm{Ext}^1(M_2,N) \to \mathrm{Ext}^1(M_1,N) \to \cdots& \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^j(M_3,N) \to \mathrm{Ext}^j(M_2,N) \to \mathrm{Ext}^j(M_1,N) \to \cdots.&\end{aligned} \tag{B.4}$$

6. Короткая точная последовательность $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Ext}^0(M,N_1) \to \mathrm{Ext}^0(M,N_2) \to \mathrm{Ext}^0(M,N_3) \to{}& \\ \mathrm{Ext}^1(M,N_1) \to \mathrm{Ext}^1(M,N_2) \to \mathrm{Ext}^1(M,N_3) \to \cdots& \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^j(M,N_1) \to \mathrm{Ext}^j(M,N_2) \to \mathrm{Ext}^j(M,N_3) \to \cdots.&\end{aligned} \tag{B.5}$$

Резольвента Кошуля Алгебра $A = \Bbbk[m] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$ содержит единственный максимальный однородный идеал, а именно идеал $\Bbbk[m]_+ = (v_0, \ldots, v_m)$, состоящий из однородных многочленов положительной степени. Естественный эпиморфизм $\Bbbk[m] \to \Bbbk[m]/\Bbbk[m]_+ \cong \Bbbk$ превращает основное поле $\Bbbk$ в модуль над $\Bbbk[m]$. Разберемся, как устроена свободная резольвента $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk$.

Пусть $R^{-j}_{Kosz} = A\langle\binom{[m]}{j}\rangle$ — свободный A-модуль, порожденный множеством $\binom{[m]}{j}$ (т.е. множеством всех j-подмножеств множества $[m]$). Градуировка задается так: $\deg\{i_1, \ldots, i_j\} = 2j$ для $\{i_1, \ldots, i_j\} \in \binom{[m]}{j}$. Определим гомоморфизм $d\colon R^{-j}_{Kosz} \to R^{-(j-1)}_{Kosz}$, задав его на порождающих:

$$d\{i_1, \ldots, i_j\} = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} v_{i_k} \cdot \{i_1, \ldots, \widehat{i_k}, \ldots, i_j\}. \tag{B.6}$$

Заметим, что модуль R^0_{Kosz} порожден одним элементом $\varnothing \in \binom{[m]}{0}$, имеющим степень 0, значит $R^0_{Kosz} \cong \Bbbk[m]$. Пусть $\Bbbk[m] \cong R^0_{Kosz} \to \Bbbk$ — гомоморфизм, введенный выше.

Утверждение B.5 (Резольвента Кошуля)**.** *Последовательность гомоморфизмов*

$$0 \to R^{-m}_{Kosz} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} R^{-2}_{Kosz} \xrightarrow{d} R^{-1}_{Kosz} \xrightarrow{d} R^0_{Kosz} \to \Bbbk \to 0$$

является свободной резольвентой $\Bbbk[m]$*-модуля* $\Bbbk$.

Доказательство. Заметим, что вместо градуировки в $\Bbbk[m]$ можно ввести мультиградуировку: будем говорить, что моном $v_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot v_m^{k_m}$ имеет мультиградуировку $(2k_1, \ldots, 2k_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$. Все модули R^{-j}_{Kosz} можно сделать мультиградуированными, если положить мультиградуировку порождающего элемента $\{i_1, \ldots, i_j\} \in R^{-j}_{Kosz}$ равной $(0, \ldots, 2, \ldots, 2, \ldots, 0)$, где двойки стоят на позициях $i_1, \ldots, i_j$, а нули — на всех прочих. Легко видеть, что все дифференциалы сохраняют мультиградуировку, а значит наша последовательность распадается в прямую сумму

$$\bigoplus_{\overline{k}=(2k_1,\ldots,2k_m)\in\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}} \left(0 \to (R^{-m}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} (R^{-2}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^{-1}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^0_{Kosz})_{\overline{k}} \to \Bbbk_{\overline{k}} \to 0\right),$$

где $M_{\overline{k}}$ обозначает однородную компоненту M мультиградуировки $\overline{k}$. Разберем два случая: пусть для начала $\operatorname{supp}(\overline{k}) \neq \varnothing$ (т.е. $\overline{k} \neq (0, 0, \ldots, 0)$). Тогда $\Bbbk_{\overline{k}} = 0$, а коцепной комплекс $\Bbbk$-векторных пространств

$$0 \to (R^{-m}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} (R^{-2}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^{-1}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^0_{Kosz})_{\overline{k}} \to 0 \tag{B.7}$$

совпадает по определению с аугментированным комплексом симплициальных цепей полного симплекса на множестве $\operatorname{supp}(\overline{k})$ (проверьте!). Значит, гомологии комплекса (B.7) совпадают с приведенными гомологиями симплекса, которые равны нулю, поскольку симплекс стягиваем. Значит, последовательность (B.7) точна.

Если же $\overline{k} = (0, 0, \ldots, 0)$, то (B.7) превращается в $0 \to \Bbbk \to \Bbbk \to 0$. Значит, последовательность точна во всех мультиградуировках, откуда и следует утверждение. $\square$

Из определения дифференциала следует, что $dR^{-j}_{Kosz} \subset \Bbbk[m]_+ \cdot R^{-j+1}_{Kosz}$, т.е. резольвента Кошуля является минимальной.

Напоследок дадим более стандартное описание резольвенты Кошуля. Пусть $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ — внешняя алгебра от m образующих, а $\Lambda[u_1, \dots, u_m]_j$ — ее компонента, порожденная некоммутативными мономами от j переменных. Тогда R^{-j}_{Kosz} можно отождествить с A-модулем $\Lambda[u_1, \dots, u_m]_j \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[m]$. Дифференциал d можно задать на порождающих алгебры как $du_i = v_i$, $dv_i = 0$, а затем продолжить по правилу Лейбница $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^i a \cdot db$ (здесь мы считаем, что u_i имеют степень -1). Из этой конструкции ясно видно, что резольвента Кошуля мультипликативна: на ней определено умножение, пускай кососкоммутативное.

Предложение B.6. *Пусть M — произвольный $\Bbbk[m]$-модуль. Тогда* $\mathrm{Tor}^{-j}_{\Bbbk[m]}(M, \Bbbk) \cong H^j(M \otimes_{\Bbbk} \Lambda[u_1, \dots, u_m], d)$*, где дифференциал действует по формуле*

$$d(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_j} \otimes \mu) = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} u_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{u_{i_k}} \wedge \dots \wedge u_{i_j} \otimes (v_{i_k} \cdot \mu).$$

Если M сам является алгеброй, то $\mathrm{Tor}^{*}_{\Bbbk[m]}(M, \Bbbk) = \bigoplus_j \mathrm{Tor}^{-j}_{\Bbbk[m]}(M, \Bbbk)$ *является алгеброй когомологий алгебры $M \otimes_{\Bbbk} \Lambda[u_1, \dots, u_m]$.*

Доказательство. Применим к резольвенте Кошуля функтор $\otimes_{\Bbbk[m]} M$. Получим

$$\Lambda[u_1, \dots, u_m]_j \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[m] \otimes_{\Bbbk[m]} M \cong \Lambda[u_1, \dots, u_m]_j \otimes_{\Bbbk} M.$$

Утверждение про дифференциал напрямую следует из формулы (B.6). □

Следствие B.7. $\mathrm{Tor}^{*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk, \Bbbk) \cong \Lambda[u_1, \dots, u_m]$.

B.3 Однородные системы параметров и регулярные последовательности

Системы параметров Далее будет предполагаться, что A конечно порождена как алгебра, а M конечно порожден как модуль над A.

Размерностью Крулля $\dim A$ алгебры A называется наибольшее число алгебраически независимых элементов в A. Заметим, что размерность Крулля равна нулю в том и только том случае, когда A является конечномерным векторным пространством.

Доказательство. Если A конечномерна как векторное пространство, то, очевидно, что алгебраически независимых элементов в ней нет. Пусть теперь размерность Крулля равна 0. Если $a_1, \dots, a_l$ — порождающие, то для каждой из них существует такое число k_i, что $a_i^{k_i} = 0$ (поскольку каждая из них не является алгебраически независимой). Тогда конечное множество мономов $a_1^{j_1} \cdots a_l^{j_l}$, $0 \leqslant j_i < k_i$ порождает A как векторное пространство. □

В частности, если $\dim A = 0$, то ряд $\mathrm{Hilb}(A^*; t)$ обрывается, т.е. является многочленом.

Утверждение B.8. *Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — набор алгебраически независимых однородных элементов алгебры A, а $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \subset A$ — порожденный ими идеал. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\dim A/(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 0$*;*

2. $A/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *является конечномерным векторным пространством;*

3. A *является конечнопорожденным модулем над своим подкольцом* $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]$.

Из этих утверждений следует, что $n = \dim A$.

Доказательство очевидно. Если выполнено любое из этих эквивалентных условий, то $\theta_1, \ldots, \theta_n$ называется однородной системой параметров (о.с.п.) для алгебры A.

Введенные понятия можно обобщить на модули. Размерностью Крулля конечно порожденного A-модуля M называется размерность Крулля алгебры $A/\mathrm{Ann}(M)$, где $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid a \cdot M = 0\}$. Поскольку M можно считать как модулем над A, так и модулем над $A/\mathrm{Ann}(M)$, получаем, что M имеет нулевую размерность Крулля в том и только том случае, когда M — конечномерное векторное пространство.

Набор однородных алгебраически независимых элементов $\theta_1, \ldots, \theta_n \in A$ называется однородной системой параметров для модуля M, если размерность Крулля фактормодуля $M/(\theta_1 M + \cdots + \theta_n M)$ равна нулю. Однородная система параметров называется линейной системой параметров (л.с.п.), если все ее элементы имеют степень 2.

Теорема B.9 (Градуированная версия леммы Нётер о нормализации[14, Thm.1.5.17])**.** *Однородная система параметров существует для любого A-модуля M. Если $\Bbbk$ бесконечно, и A порождена элементами степени 2, то существует линейная система параметров.*

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — л.с.п. алгебры A. Имеем, с одной стороны, $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n] \subset A$, следовательно $\frac{1}{(1-t^2)^n} = \mathrm{Hilb}(\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]; t) \leqslant \mathrm{Hilb}(A; t)$. С другой стороны, A есть конечнопорожденный модуль над $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]$, значит $\mathrm{Hilb}(A; t) \leqslant \frac{Q(t)}{(1-t^2)^n}$, где $Q(t)$ — некоторый многочлен. Нетрудно видеть, что у рядов $\frac{Q(t)}{(1-t^2)^n}$ и $\frac{1}{(1-t^2)^n}$ коэффициенты d_j при члене t^j растут как j^{n-1}. Значит, то же верно и для ряда $\mathrm{Hilb}(A; t)$. Таким образом, размерность Крулля алгебры A можно извлечь из ее ряда Гильберта–Пуанкаре (мы сделали это для алгебры, порожденной элементами степени 2, но аналогичное рассуждение работает и в общем случае). Говоря иными словами, размерность Крулля алгебры A равна порядку полюса мероморфной функции $\mathrm{Hilb}(A; t)$ в точке $t = 1$.

Аналогичные утверждения верны для модулей.

Регулярные последовательности Последовательность $\theta_1, \dots, \theta_k$ однородных (положительной степени) элементов алгебры A называется регулярной для модуля M, если θ_{j+1} не является делителем нуля для A-модуля $M/(\theta_1 \cdot M + \dots + \theta_j \cdot M)$ при $j = 0, \dots, k-1$ (при $j = 0$ требуется, чтобы θ_1 не был делителем нуля для M).

Упражнение B.10. Докажите, что элементы регулярной последовательности алгебраически независимы как в алгебре A, так и в $A/\operatorname{Ann}(M)$.

Предложение B.11. *Последовательность $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in A$ является регулярной для M тогда и только тогда, когда M является свободным модулем над подкольцом $\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_k] \subset A$.*

Доказательство. Для начала докажем лемму, представляющую самостоятельный интерес. Если M — модуль над A, и $\theta_1, \dots, \theta_k \in A$, то для простоты будем обозначать модуль $M/(\theta_1 \cdot M + \dots + \theta_k \cdot M)$ через $M/\theta M$. Заметим, что $M/\theta M$ является не только A-модулем, но и $A/\theta A$-модулем.

Лемма B.12. *Пусть дана точная последовательность A-модулей*

$$\dots \to M^j \xrightarrow{f_j} M^{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} \dots \xrightarrow{f_1} M^0 \xrightarrow{f_0} M^{-1} \to 0,$$

и $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in A$ — регулярная последовательность для каждого модуля M^i. Тогда последовательность

$$\dots \to M^j/\theta M^j \xrightarrow{\bar{f}_j} M^{j-1}/\theta M^{j-1} \xrightarrow{\bar{f}_{j-1}} \dots \xrightarrow{\bar{f}_1} M^0/\theta M^0 \xrightarrow{\bar{f}_0} M^{-1}/\theta M^{-1} \to 0 \tag{B.8}$$

является точной последовательностью $A/\theta A$-модулей.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение в случае, когда регулярная последовательность состоит из одного элемента θ. Поскольку $M/\theta M \cong M \otimes_A (A/\theta A)$, а функтор тензорного произведения точен справа, точность последовательности (B.8) в самом правом члене доказана. Докажем, что последовательность

$$M^{j+1}/\theta M^{j+1} \xrightarrow{\bar{f}_{j+1}} M^j/\theta M^j \xrightarrow{\bar{f}_j} M^{j-1}/\theta M^{j-1} \xrightarrow{\bar{f}_{j-1}} M^{j-2}/\theta M^{j-2}$$

точна в члене j. Пусть $\bar{x}$ обозначает класс элемента $x \in M^j$ в фактор-модуле $M^j/\theta M^j$. Пусть $\bar{f}_j(\bar{x}) = 0$. Тогда $f_j(x) \in \theta M^{j-1}$, то есть $f_j(x) = \theta y$ для некоторого $y \in M^{j-1}$. Поскольку $\theta y = f_j(x)$, имеем $\theta f_{j-1}(y) = f_{j-1}(\theta y) = 0$. Поскольку θ — не делитель нуля, получаем $f_{j-1}(y) = 0$. Из точности исходной последовательности получаем $y = f_j(z)$ для некоторого $z \in M^j$. Поскольку $f_j(x) = \theta y = f_j(\theta z)$, имеем $f_j(x - \theta z) = 0$. Значит $x - \theta z = f_{j+1}(u)$ для некоторого $u \in M^{j+1}$. Классы элементов x и $u - \theta z$ в $M^j/\theta M^j$ совпадают, значит $\bar{x} = \bar{f}_{j+1}(\bar{u})$, что и требовалось доказать. □

Теперь докажем предложение. Пусть

$$\dots \to R^{-j} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} R^{-2} \xrightarrow{d} R^{-1} \xrightarrow{d} R^0 \to M \to 0$$

— минимальная свободная резольвента модуля M над кольцом $\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_k]$. Последовательность $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ является регулярной последовательностью для кольца $\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_k]$, а значит и для всех свободных модулей R^{-j} над этим кольцом. Заметим, что $R^{-j} \otimes_{\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_k]} \Bbbk \cong R^{-j}/\theta R^{-j}$. Из определения минимальной резольвенты следует, что $d \otimes_{\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_k]} \Bbbk = 0$. С другой стороны, согласно Лемме B.12, последовательность

$$\dots \to R^{-j}/\theta R^{-j} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} R^{-2}/\theta R^{-2} \xrightarrow{0} R^{-1}/\theta R^{-1} \xrightarrow{0} R^{0}/\theta R^{0} \to M/\theta M \to 0$$

точна. Значит $R^{-j}/\theta R^{-j} = 0$, а следовательно и $R^{-j} = 0$ при $j > 0$. Таким образом, гомоморфизм $R^0 \to M$ является изоморфизмом и M — свободный модуль над $\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_k]$. $\square$

Из только что доказанного предложения в частности следует, что регулярность последовательности $\theta_1, \dots, \theta_k \in A$ не зависит от порядка элементов последовательности.

Лемма B.13. *Пусть θ — A-регулярна и M-регулярна. Тогда*

$$\mathrm{Tor}^{-i}_{A/\theta}(M/\theta M, \Bbbk) \cong \mathrm{Tor}^{-i}_{A}(M, \Bbbk)$$

Доказательство. Применить Лемму B.12 к свободной резольвенте модуля M. $\square$

M-регулярная последовательность называется максимальной, если она не содержится в большей регулярной последовательности.

Теорема B.14 (Теорема Риса)**.** *Пусть A нетерова, а M — конечно порожден. Длины всех максимальных регулярных последовательностей совпадают и равны числу* $\mathrm{depth}_A M = \min\{j \mid \mathrm{Ext}^j_A(\Bbbk, M) \neq 0\}$.

Доказательство. Сформулируем полезную техническую лемму

Лемма B.15. *Если для A-модуля M существует регулярный элемент $\theta \in A$, то* $\mathrm{Soc}\, M = \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M) = 0$. *Если же A — нетерова алгебра, а M — конечно порожденный модуль, то верно и обратное: если $\mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M) = 0$, то у модуля M есть регулярный элемент в A.*

Доказательство. Заметим, что равенство $\mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M) \cong \mathrm{Soc}\, M$ выполнено всегда. Действительно, образ $\Bbbk$ при A-гомоморфизме обязан попасть в цоколь, и наоборот, в любой цокольный элемент можно A-гомоморфизмом отобразить $1 \in \Bbbk$. Первое утверждение леммы очевидно: пусть $\theta \in A_+$ — регулярный элемент, и $\mu \in \mathrm{Soc}\, M$. Тогда $\theta\mu = 0$ (по определению цоколя), откуда следует, что $\mu = 0$ (по определению регулярного элемента).

Доказательство второй части утверждения требует более глубокого погружения в коммутативную алгебру, и его мы приводить не будем — см.[14, Prop.1.2.3]. $\square$

Докажем индукцией по j, что если $\theta_1, \ldots, \theta_j$ — M-регулярная последовательность (не обязательно максимальная), то $\operatorname{Ext}^j_A(\Bbbk; M) \cong \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta M)$. База $j = 0$ очевидна.

Последний элемент θ_j является M-регулярным. Рассмотрим короткую точную последовательность $0 \to M \overset{\times\theta_j}{\to} M \to M/\theta_j \to 0$ и рассмотрим индуцированную длинную точную последовательность Ext-модулей. Гомоморфизм $\Bbbk \overset{\times\theta_j}{\to} \Bbbk$ нулевой, поэтому он индуцирует нулевой гомоморфизм $\operatorname{Ext}^s_A(\Bbbk, M) \to \operatorname{Ext}^s_A(\Bbbk, M)$, а вся длинная точная последовательность расщепляется на короткие

$$0 \to \operatorname{Ext}^{j-1}_A(\Bbbk, M) \to \operatorname{Ext}^{j-1}_A(\Bbbk, M/\theta_j M) \to \operatorname{Ext}^j_A(\Bbbk, M) \to 0$$

Пусть $\theta' = (\theta_1, \ldots, \theta_{j-1})$. По индукции имеем $\operatorname{Ext}^{j-1}_A(\Bbbk, M) = \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta' M)$. Последний модуль равен нулю, поскольку элемент θ_j является $M/\theta' M$-регулярным и применима Лемма B.15. Таким образом, из короткой точной последовательности следует изоморфизм $\operatorname{Ext}^{j-1}_A(\Bbbk, M/\theta_j M) \cong \operatorname{Ext}^j_A(\Bbbk, M)$. По индукции имеем $\operatorname{Ext}^{j-1}_A(\Bbbk, M/\theta_j M) \cong \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta M)$. Вспомогательное утверждение доказано.

Теперь доказательство теоремы почти очевидно. Пусть d — длина максимальной M-регулярной последовательности θ. Тогда $\operatorname{Ext}^d_A(\Bbbk, M) \cong \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta M) \neq 0$, поскольку у модуля $M/\theta M$ нет регулярных элементов, и применима Лемма B.15. При $j < d$ имеем $\operatorname{Ext}^j_A(\Bbbk, M) \cong \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta_1 M + \cdots + \theta_j M) = 0$, поскольку θ_{j+1} является регулярным элементом относительно $M/\theta_1 M + \cdots + \theta_j M$, а значит у этого модуля нет цоколя. $\square$

Число $\operatorname{depth}_A M$ называется глубиной модуля M. Поскольку элементы регулярной последовательности алгебраически независимы, глубина не превосходит размерности Крулля:

$$\operatorname{depth}_A M \leqslant \dim M. \tag{B.9}$$

Имеет смысл говорить об A-регулярных последовательностях и глубине алгебры A, поскольку A можно рассматривать как модуль над собой. Приведем еще один фундаментальный результат, связывающий две гомологические характеристики модуля: глубину и проективную размерность.

Теорема B.16 (Теорема Ауслендера–Буксбаума)**.** *Пусть A-модуль M ненулевой и* $\operatorname{pdim} M < \infty$. *Тогда*

$$\operatorname{pdim} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A.$$

Доказательство. Допустим вначале, что $\operatorname{depth} A = 0$. Рассмотрим минимальную резольвенту M, конечную по условию:

$$0 \to R^{-p} \overset{d_p}{\to} R^{-p+1} \to \cdots \to R^0 \to M \to 0.$$

По Лемме B.15 $\mathrm{Hom}_A(\Bbbk, A) = \mathrm{Ext}^0_A(\Bbbk, A) \neq 0$, а значит существует мономорфизм A-модулей $i\colon \Bbbk \to A$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
R^{-p} \otimes_A \Bbbk \arrow[r, "d_p \otimes_A \Bbbk"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes_A i"'] & R^{-p+1} \otimes_A \Bbbk \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes_A i"'] \\
R^{-p} \arrow[r, "d_p"] & R^{-p+1}
\end{tikzcd}$$

Вертикальные стрелки — мономорфизмы, поскольку R^{-j} — свободны, d_p тоже мономорфно. Значит $d_P \otimes_A \Bbbk$ мономорфно — противоречие с минимальностью резольвенты. Значит $p = \operatorname{pdim} M = 0$. Значит M — свободный A-модуль и следовательно $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A = 0$.

Теперь пусть $\operatorname{depth} A > 0$. Пусть $\operatorname{depth} M = 0$. Рассмотрим $M_1 = \mathrm{Ker}(R^0 \to M)$. Короткая точная последовательность $0 \to M_1 \to R^0 \to M \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность Ext-модулей; из нее и теоремы Риса легко вывести, что $\operatorname{depth} M_1 = 1$. С другой стороны, $\operatorname{pdim} M_1 = \operatorname{pdim} M - 1$ (поскольку резольвента для M без нулевого члена — это и есть резольвента для M_1). Значит из формулы Ауслендера–Буксбаума для M_1 следует она же для M. Поэтому можно считать $\operatorname{depth} M > 0$.

Поскольку $\operatorname{depth} A > 0$ и $\operatorname{depth} M > 0$, существует $\theta \in A$, который и A-регулярен и M-регулярен (без доказательства, см.[14]). По определению глубины имеем $\operatorname{depth}_{A/\theta} A/\theta = \operatorname{depth}_A A - 1$ и $\operatorname{depth}_{A/\theta} M/\theta M = \operatorname{depth}_A M - 1$. С другой стороны, из Леммы B.13 следует, что $\operatorname{pdim}_{A/\theta} M/\theta M = \operatorname{pdim}_A M$. Доказательство завершается индукцией по $\operatorname{depth} A$. □

Если $A = \Bbbk[m]$ — алгебра многочленов, то любой модуль над A имеет конечную резольвенту по теореме Гильберта о сизигиях. Заметив, что $\operatorname{depth} \Bbbk[m] = m$, получаем

Следствие B.17. *Пусть M — ненулевой модуль над алгеброй $\Bbbk[m]$. Тогда* $\operatorname{depth} M = m - \operatorname{pdim} M$.

Модули и алгебры Коэна–Маколея

Определение B.18. A-модуль M называется модулем Коэна–Маколея, если $\operatorname{depth} M = \dim M$. Алгебра A называется алгеброй Коэна–Маколея, если она является A-модулем Коэна–Маколея.

Иными словами, модули Коэна–Маколея — это в точности те модули, для которых в (B.9) достигается равенство.

Предложение B.19. *Пусть M — модуль Коэна–Маколея над A. Тогда $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ является регулярной последовательностью тогда и только тогда, когда $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ является частью однородной системы параметров.*

То, что любую регулярную последовательность можно дополнить до однородной системы параметров, — несложное упражнение. Тот факт, что однородные системы параметров являются максимальными регулярными последовательностями — см.[14, Th.2.1.2(c)].

Из предыдущих рассмотрений следует

Предложение B.20. *Алгебра A является алгеброй Коэна–Маколея в том и только том случае, когда она является свободным конечно порожденным модулем над своей подалгеброй многочленов.*

B.4 Локальные когомологии модулей

На мой взгляд, самым емким и в то же время понятным текстом по локальным когомологиям является [25]. Я привожу краткую выжимку оттуда.

Функтор кручения и его производный Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал алгебры A (например, максимальный градуированный идеал A_+), а M — модуль над A. Подмодуль

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{\mu \in M \mid \exists l > 0, \mathfrak{a}^l \mu = 0\}$$

называется подмодулем $\mathfrak{a}$-кручения. Гомоморфизм $f\colon M \to N$ отображает $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ в $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Значит определено индуцированное отображение модулей кручения и, следовательно, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\cdot)$ является функтором. Он аддитивен и точен слева.

Если $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$, то модуль M называется $\mathfrak{a}$-кручением.

Пусть $0 \to M \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \mathcal{I}^2 \to \cdots$ — инъективная резольвента модуля M. Применим к обрезанной резольвенте функтор $\Gamma_{\mathfrak{a}}$:

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^0) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^1) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^2) \to \cdots$$

Когомологии полученного комплекса называются локальными когомологиями модуля M (относительно идеала $\mathfrak{a} \subset A$) и обозначаются $H^j_{\mathfrak{a}}(M)$. Если $\mathfrak{a} = A_+$, то будем для простоты писать $H^j(M)$. Заметим, что локальные когомологии — это не просто векторные пространства, а снова модули над A.

Из построения очевидно следует, что если $\mathcal{I}$ — инъективный модуль, то $H^j_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}) = 0$ при $j > 0$ (поскольку $\mathcal{I}$ является своей же собственной инъективной резольвентой).

Основные свойства локальных когомологий таковы:

1. Локальные когомологии не зависят от выбора инъективной резольвенты.

2. $H^0_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

3. $H^j_{\mathfrak{a}}(M)$ является $\mathfrak{a}$-кручением.

4. Короткая точная последовательность A-модулей $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathfrak{a}}(M_1) \to H^0_{\mathfrak{a}}(M_2) \to H^0_{\mathfrak{a}}(M_3) \to& \\ H^1_{\mathfrak{a}}(M_1) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M_2) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M_3) \to \cdots& \\ \cdots \to H^j_{\mathfrak{a}}(M_1) \to H^j_{\mathfrak{a}}(M_2) \to H^j_{\mathfrak{a}}(M_3) \to \cdots .& \end{aligned} \tag{B.10}$$

5. Если $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, то $H^j_{\mathfrak{a}}(M) = H^j_{\mathfrak{b}}(M)$.

Предложение B.21. *Если M, как векторное пространство, имеет конечную размерность, то $H^0(M) = M$.*

Доказательство. Любой элемент модуля M лежит в A_+-кручении, значит $H^0(M) = \Gamma_{A_+}(M) = M$. □

Комплекс Кошуля Пусть A — алгебра, и $x \in A$ — однородный элемент. Дифференциальный комплекс

$$0 \to A \xrightarrow{\times x} A \to 0$$

называется комплексом Кошуля и обозначается $K^*(x; A)$. Мы считаем, что левая A сидит в градуировке -1, а правая в градуировке 0 (т.е. $K^{-1}(x; A) = K^0(x; A) = A$).

Пусть $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ — набор однородных элементов алгебры A. Рассмотрим тензорное произведение дифференциальных комплексов

$$K^*(\underline{x}; A) = K^*(x_1; A) \otimes_A \dots \otimes_A K^*(x_d; A)$$

— этот комплекс называется комплексом Кошуля алгебры A относительно набора $x_1, \dots, x_d$. Для A-модуля M определим $K^*(\underline{x}; M) = K^*(\underline{x}; A) \otimes_A M$. Таким образом, ненулевые модули комплекса $K^*(\underline{x}; M)$ сосредоточены в градуировках от $-d$ до 0, и $K^{-j}(\underline{x}; M) \cong \binom{d}{j} M$ (прямая сумма $\binom{d}{j}$ копий M).

Замечание B.22. Видно, что комплекс Кошуля $K^*(v_1, \dots, v_m; \Bbbk[m])$ совпадает с резольвентой Кошуля, построенной ранее.

Определение B.23. Когомологии комплекса Кошуля называются когомологиями Кошуля и обозначаются $H^j(\underline{x}; M)$.

Комплекс Чеха Пусть A — алгебра и $x \in A$ однородный элемент. Пусть A_x — локализация алгебры A по мультипликативной системе $\{1, x, x^2, \dots\}$, то есть $A_x = A[\frac{1}{x}]$ (A_x есть множество дробей вида $\frac{a}{x^s}$ с естественно определенными операциями сложения, умножения и градуировкой[8]). Имеется канонический гомоморфизм $\imath\colon A \to A_x$, $\imath(a) = \frac{a}{1}$. Дифференциальный комплекс

$$0 \to A \xrightarrow{\imath} A_x \to 0$$

называется комплексом Чеха алгебры A относительно x и обозначается $\check{C}^*(x; A)$ (мы считаем, что ненулевые модули сидят в градуировках 0 и 1). Для набора однородных элементов $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ алгебры A рассмотрим тензорное произведение

$$\check{C}^*(\underline{x}; A) = \check{C}^*(x_1; A) \otimes_A \dots \otimes_A \check{C}^*(x_d; A).$$

[8]Заметим, что локализованные алгебры и модули как правило уже не являются конечно порожденными за счет элементов сколь угодно большой отрицательной градуировки

Для A-модуля M положим $\check{C}^*(\underline{x}; M) = \check{C}^*(\underline{x}; A) \otimes_A M$. Таким образом, ненулевые модули сосредоточенны в градуировках от 0 до d и

$$\check{C}^j(\underline{x}; M) \cong \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant d} M_{x_{i_1} \cdots x_{i_j}}.$$

Определение B.24. A-модуль $\check{H}^j(\underline{x}; M) = H^j(\check{C}^*(\underline{x}; M))$ называется группой j-х когомологий Чеха модуля M относительно последовательности $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in A$.

Свойства локальных когомологий

Теорема B.25. *Для любого A-модуля M имеет место естественный изоморфизм*

$$\varinjlim_t \operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}^t, M) \cong H^j_{\mathfrak{a}}(M), \quad \text{при всех } j \geqslant 0.$$

Доказательство. Заметим, что $\lim_{\to t} \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}^t, M) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}} M$, более-менее по определению. Дальше нужно применить этот изоморфизм к инъективной резольвенте M и воспользоваться тем, что функтор гомологий коммутирует с прямым пределом по направленной системе. □

Пусть $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ — набор однородных элементов алгебры A, а $\underline{x}^t = (x_1^t, \ldots, x_d^t)$ — набор их t-х степеней. Из комплексов Кошуля $K^*(\underline{x}^t; A)$ можно сформировать обратную систему

$$\cdots \to K^*(\underline{x}^t; A) \to \cdots \to K^*(\underline{x}^2; A) \to K^*(\underline{x}^1; A) \to 0,$$

в которой структурные морфизмы задаются диаграммой

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\times x^{t+1}"] \arrow[d, "\times x"] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\times x^t"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(вернее тензорным произведением таких диаграмм по всем $x_1, \ldots, x_d$). Применяя к этой обратной системе функтор $\operatorname{Hom}_A(\cdot, M)$, получим прямую систему $\operatorname{Hom}_A(K^*(\underline{x}^t; A), M) \to \operatorname{Hom}_A(K^*(\underline{x}^{t+1}; A), M)$, $t \to \infty$.

Теорема B.26 ([25, Thm.7.11])**.** *Пусть набор элементов $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ порождает однородный идеал $\mathfrak{a}$ алгебры A. Тогда имеется естественный изоморфизм*

$$H^*_{\mathfrak{a}}(M) \cong \varinjlim_t \operatorname{Hom}_A(K^*(\underline{x}^{t+1}; A), M)$$

Теорема B.27 ([25, Thm.7.13])**.** *Пусть набор элементов $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ порождает однородный идеал $\mathfrak{a}$ алгебры A. Тогда имеется естественный изоморфизм*

$$H^*_{\mathfrak{a}}(M) \cong \check{H}^*(\underline{x}; M).$$

Следующий результат особенно важен для приложений. В частности, с помощью него можно вычислять глубину модулей.

Теорема B.28 (Теорема о занулении [25, Th.9.1], [37, Thm.6.3])**.** *$H^j(M) = 0$ при $j > \dim M$ или $j < \operatorname{depth}_A M$. Кроме того, $H^{\dim M}(M) \neq 0$ и $H^{\operatorname{depth}_A M}(M) \neq 0$.*

Доказательство. Приведем урезанный набросок доказательства. Пусть $0 \to M \to \mathcal{I}^*$ — инъективная резольвента модуля M. Пусть $l = \min\{j \mid H^j(M) \neq 0\}$. Имеем[9]

$$H^j(\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, \Gamma_{A_+}(\mathcal{I}^*))) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } j < l; \\ \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, H^l_{A_+}(M)), & \text{если } j = l. \end{cases}$$

Поскольку A-модуль $H^l_{A_+}(M)$ является A_+-кручением, модуль $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, H^l_{A_+}(M))$ ненулевой в том и только том случае, когда $H^l_{A_+}(M)$ — ненулевой. С другой стороны, имеем

$$\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, \Gamma_{A_+}(\mathcal{I}^*)) = \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, \mathcal{I}^*),$$

поскольку A-модуль $\Bbbk \cong A/A_+$ при гомоморфизме обязан отображаться в A_+-кручение.

По определению $\operatorname{Ext}^j_A(\Bbbk, M) \cong H^j(\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, \mathcal{I}^*))$. Из предыдущих рассмотрений и теоремы Риса получаем $\operatorname{depth} M = \min\{j \mid \operatorname{Ext}^j_A(\Bbbk, M) \neq 0\} = l$.

Теперь докажем, что $H^j(M) = 0$ при $j > \dim M$. Это практически напрямую следует из Теоремы B.27, поскольку (1) локальные когомологии совпадают для идеала и его радикала, (2) максимальный идеал алгебры $A/\operatorname{Ann} M$ является радикалом параметрического идеала алгебры $A/\operatorname{Ann} M$ (т.е. идеала, порожденного однородной системой параметров $\theta_1, \ldots, \theta_d$, где $d = \dim M = \dim(A/\operatorname{Ann} M)$), (3) комплекс Чеха относительно элементов $\theta_1, \ldots, \theta_d$ зануляется в размерностях больших d по построению. □

Следствие B.29. *Если M — модуль Коэна–Маколея, то $H^j(M) = 0$ для всех j кроме $j = \operatorname{depth}_A M = \dim M$.*

B.5 Локальная двойственность Гротендика и горенштейновы модули

Двойственность Матлиса Пусть M — модуль над $A = \Bbbk[m] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$, а $E(\Bbbk) = \Bbbk[v_1^{-1}, \ldots, v_m^{-1}]$ — инъективная оболочка A-модуля $\Bbbk$, определенная ранее. Модуль $M^\vee = \operatorname{Hom}_A(M, E(\Bbbk))$ называется двойственным по Матлису к модулю M. Известно, что

[9] На лекции возник резонный вопрос, почему это так. Придумалось такое объяснение. Рассмотрим два функтора: $F = \Gamma_{A_+}(\cdot)$ и $G = \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, \cdot)$. Оба точны слева. Спектральная последовательность Гротендика имеет вид $E_2^{pq} = (R^pG \circ R^qF)(M) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(M)$ (спектралка Гротендика стартует с композиций производных функторов и сходится к производным композиции). Заметим, что $R^j(G \circ F)(M)$ есть по определению $H^j(\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, \Gamma_{A_+}(\mathcal{I}^*)))$. С другой стороны, мы имеем $R^jF(M) = 0$ при $j < l$. Таким образом, спектралка сосредоточена в первой четверти и ее нижние l строчек нулевые. Отсюда следует, что $R^j(G \circ F)(M) = 0$, и, кроме того, $R^l(G \circ F)(M) = (R^0G \circ R^lF)(M) = \operatorname{Hom}_A(\Bbbk, H^l_{A_+}(M))$, поскольку остальные члены в диагонали $p + q = l$ зануляются. Надо еще, конечно, проверить, что спектралка Гротендика применима, т.е. что F переводит инъективные модули в инъективные. Это следует из Prop.7.3.3 и Example 7.6 в [25].

1. $\mathrm{Hilb}(M^\vee;t) = \mathrm{Hilb}(M;t^{-1})$;

2. $M^{\vee\vee} = \hat{M}$ — A_+-адическое пополнение модуля M.

Локальная двойственность

Теорема B.30 (Теорема Гротендика о локальной двойственности)**.**

$$\mathrm{Ext}^j_A(M,A)^\vee \cong H^{m-j}(M).$$

Этот изоморфизм сдвигает градуировку на $-2m = -\sum \deg v_i$, т.е. $\mathrm{Ext}^j_A(M,A)^\vee_s \cong H^{m-j}(M)_{s-2m}$ (см. [14, Ex.3.6.15 и Th.3.6.19]).

Тип модуля Коэна–Маколея Пусть M — модуль Коэна–Маколея над $A = \Bbbk[m]$, имеющий размерность n. Поскольку $H^l(M) = 0$ при $l \neq n$, имеем $\mathrm{Ext}^j_A(M,A) = 0$ при $j \neq m-n$. По теореме Ауслендера–Буксбаума, $r := \operatorname{pdim} M = m-n$. Рассмотрим минимальную свободную резольвенту

$$0 \to R^{-r} \xrightarrow{\phi_r} \cdots \xrightarrow{\phi_2} R^{-1} \xrightarrow{\phi_1} R^0 \to M \to 0.$$

Применим к ее хвосту функтор $\mathrm{Hom}_A(\cdot,A)$ и обозначим $\Omega(M) = \mathrm{Hom}_A(R^{-r},A)/\operatorname{Im}\phi_r^* = \mathrm{Ext}^r_A(M,A)$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(R^0,A) \to \mathrm{Hom}_A(R^{-1},A) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_A(R^{-r},A) \to \Omega(M) \to 0. \qquad \text{(B.11)}$$

Точность в последней позиции получается по построению, а точность во всех прочих позициях получается, поскольку соответствующие Ext-модули, которые есть модули когомологий этого комплекса, зануляются.

Модуль $\Omega(M)$ называется каноническим (или дуализирующим) модулем модуля M. Нетрудно проверить, что (B.11) является минимальной свободной резольвентой для модуля $\Omega(M)$.

Предложение B.31. *Пусть M — модуль Коэна–Маколея над $\Bbbk[m]$ размерности n. Тогда следующие числа равны:*

1. *ранг свободного модуля R^{-r} (последнего в свободной резольвенте модуля M);*

2. *минимальное число образующих модуля $\Omega(M)$;*

3. $\dim_\Bbbk \operatorname{Soc} H^n(M)$*;*

4. $\dim_\Bbbk \operatorname{Soc} M/\theta M$ *для любой однородной системы параметров $\theta = \{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$.*

Доказательство. (1)=(2). Ранг R^{-r} совпадает с рангом $\mathrm{Hom}_A(R^{-r}, A)$. Поскольку $\mathrm{Hom}_A(R^{-r}, A)$ есть нулевой член минимальной резольвенты (B.11) модуля $\Omega(M)$, его ранг равен минимальному числу образующих модуля $\Omega(M)$.

(2)=(3). Для произвольного модуля N верен следующий факт: минимальное число образующих N (то есть число $\dim_{\Bbbk}(N \otimes_A \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} N/A_+N$) равно $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Soc}\, N^\vee$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to A_+N \to N \to N/A_+N \to 0.$$

Применяя к ней точный слева функтор $\mathrm{Hom}_A(\cdot, E(\Bbbk))$, получаем $(N/A_+N)^\vee = \ker(F\colon N^\vee \to A_+N^\vee)$, где F отправляет гомоморфизм $\phi \in N^\vee = \mathrm{Hom}_A(N, E(\Bbbk))$ в его ограничение на A_+N. Таким образом, $\phi \in (N/A_+N)^\vee$ в том и только том случае, когда $\phi \in N^\vee$ и $A_+\phi(N) = \phi(A_+N) = 0$, что эквивалентно условию $\phi \in \mathrm{Soc}\, N^\vee$. Заметим, что N/A_+N — векторное пространство, поэтому $(N/A_+N)^\vee \cong N/A_+N$ (при A-гомоморфизме в $E(\Bbbk)$ векторное пространство обязано отображаться в $\Bbbk \subset E(\Bbbk)$, поэтому $(N/A_+N)^\vee = (N/A_+N)^*$). В итоге

$$\dim_{\Bbbk} N/A_+N = \dim_{\Bbbk}(N/A_+N)^\vee = \dim_{\Bbbk} \mathrm{Soc}\, N^\vee.$$

Осталось применить этот факт к модулю $N = H^n(M)^\vee$ и воспользоваться локальной двойственностью Гротендика.

(3)=(4) Однородная система параметров θ является регулярной последовательностью. θ_1 — регулярный элемент относительно M, значит имеем короткую точную последовательность $0 \to M \overset{\times\theta_1}{\to} M \to M/\theta_1 M \to 0$. Эта последовательность индуцирует длинную точную последовательнось в локальных когомологиях, имеющую в позиции n вид

$$0 \to H^{n-1}(M/\theta_1 M) \to H^n(M) \overset{\times\theta_1}{\to} H^n(M) \to 0$$

(слева и справа стоят нули по теореме о занулении: поскольку $\operatorname{depth} M = n$, имеем $H^{n-1}(M) = 0$, а поскольку $\dim M/\theta_1 M = n-1$, имеем $H^n(M/\theta_1 M) = 0$). Из этой последовательности получаем $\mathrm{Soc}\, H^{n-1}(M/\theta_1 M) \cong \mathrm{Soc}\, H^n(M)$. Аналогичными рассуждениями получаем изоморфизмы

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}\, H^0(M/(\theta_1 M + \cdots + \theta_n M)) \cong \mathrm{Soc}\, H^1(M/(\theta_1 M + \cdots + \theta_{n-1} M)) \cong \cdots \\ \cong \mathrm{Soc}\, H^{n-1}(M/\theta_1 M) \cong \mathrm{Soc}\, H^n(M)\end{aligned}$$

Осталось заметить, что $H^0(M/\theta M) = \Gamma_{A_+}(M/\theta M) = M/\theta M$, поскольку $M/\theta M$ нульмерен. Значит $\mathrm{Soc}\, M/\theta M \cong \mathrm{Soc}\, H^n(M)$. □

Замечание B.32. Заметим, что все доказанные изоморфизмы “уважают” градуировку (упражнение: разобраться, что именно происходит с градуировкой при каждом изоморфизме).

Число, определенное в Предложении B.31 называется типом модуля Коэна–Маколея M.

Алгебры Горенштейна и алгебры Пуанкаре

Определение B.33. Модуль Коэна–Маколея M над $\Bbbk[m]$ называется модулем Горенштейна, если его тип равен 1.

Напомним классическое определение

Определение B.34. Пусть $A = \bigoplus_{j=0}^{d} A_j$ — нульмерная коммутативная (или градуированно коммутативная) алгебра. Тогда A называется алгеброй Пуанкаре формальной размерности d, если $A_d \cong \Bbbk$ и билинейная форма спаривания $\times\colon A_j \times A_{d-j} \to A_d \cong \Bbbk$ невырожденна при всех $j = 0, \ldots, d$.

Замечание B.35. Основной пример алгебр Пуанкаре — алгебры когомологий многообразий, согласно теореме о двойственности Пуанкаре. В связи с чем и термин. См. Приложение A.

Предложение B.36. *Пусть $A = \Bbbk[m]$ и $B = A/\mathcal{I}$ — фактор-алгебра алгебры A, снабженная естественной структурой A-модуля. Пусть B — горенштейнов модуль размерности n, а $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — однородная система параметров. Тогда $B/\theta B$ является алгеброй Пуанкаре.*

Доказательство. Алгебра $L = B/\theta B$ нульмерна, поскольку θ — система параметров. Пусть L_{2d} — ее ненулевая компонента максимальной степени. Из определения горенштейновости получаем, что цоколь модуля L одномерен. Из размерностных соображений очевидно, что $L_{2d} \subset \operatorname{Soc} L$, значит $\dim L_{2d} = 1$, и в других градуировках цокольных элементов нет. Это означает, что для любого $j < d$ и $l \in L_{2j}$ существует такой линейный элемент $v \in A_2$, что $vl \neq 0$. Итерируя это соображение $d - j$ раз, получаем, что существует такой $a \in A_{2d-2j}$, что $al \neq 0$. Рассмотрев класс элемента a в фактор-алгебре: $l' = [a] \in L_{2d-2j}$, получаем, что для любого элемента $l \in L_{2j}$ найдется такой элемент l', что $l \cdot l' \neq 0$. Это и означает, что спаривание $A_{2j} \times A_{2d-2j} \to A_{2d}$ невырожденно. $\square$

Замечание B.37. Пусть x — степень образующей последнего модуля R^{-r} свободной резольвенты модуля B (или, что то же самое, $-x$ — степень образующей канонического модуля $\Omega(B)$). Если внимательно проследить, что происходит с градуировками по ходу доказательства Предложения B.31, можно показать, что формальная размерность $2d$ алгебры L вычисляется по формуле

$$2d = x - \sum_{i=1}^{m} \deg v_i + \sum_{j=1}^{n} \deg \theta_j = x - 2m + \sum_{j=1}^{n} \deg \theta_j.$$

Число $x - \sum_{i=1}^{m} \deg v_i$ называется a-инвариантом горенштейновой алгебры B, см.[14, Def.3.6.13].

Пример B.38. Пусть $R = A = \Bbbk[n]$. Горенштейновость алгебры R очевидна. Рассмотрим набор $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in R$, где σ_j — элементарный симметрический многочлен степени j от образующих $v_1, \ldots, v_n$ кольца R. Нетрудно проверить, что $R/\sigma R$ — конечномерное векторное пространство, а значит σ есть однородная система параметров. Из Предложения B.36 следует, что $R/\sigma R$ является алгеброй Пуанкаре. На самом деле эта алгебра Пуанкаре является алгеброй когомологий многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^n$ (т.е. однородного пространства $U(n)/T^n$).

Пример B.39. Алгебры Пуанкаре, являющиеся факторами естественных горенштейновых алгебр по параметрическим идеалам возникают как когомологии многообразий поразительно часто. Помимо многообразия полных флагов из предыдущего примера можно к этой категории отнести многообразия произвольных флагов (в том числе грассманианы), гладкие торические и квазиторические многообразия (в этих случаях в качестве горенштейновых алгебр как раз возникают алгебры Стенли–Райснера, рассматриваемые в курсе).

Список литературы

[1] L.Avramov, *Infinite free resolutions*, Six Lectures on Commutative Algebra, Progress in Math., p.1–118.

[2] Л. Л. Аврамов, Е. С. Голод, *Об алгебре гомологий комплекса Козюля локального кольца Горенштейна*, Матем. заметки, Т.9, вып.1 (1971), с.53–58.

[3] I.Anderson, *Combinatorics of finite sets.*

[4] А. А. Айзенберг, *Топологические приложения свойств колец Стенли–Райснера симплициальных комплексов*, Тр. ММО, 73 (2012), с.47–85.

[5] A. Ayzenberg, *Homology cycles in manifolds with locally standard torus actions*, to appear in Homology, Homotopy Appl. (preprint arXiv:1502.01130v2).

[6] A. Ayzenberg, M. Masuda, *Volume polynomials and duality algebras of multi-fans*, preprint arXiv:1509.03008.

[7] И. В. Баскаков, *Когомологии K-степеней пространств и комбинаторика симплициальных разбиений*, УМН, 57:5(347) (2002), с. 147–148.

[8] D. Barnette, *The triangulations of the 3-sphere with up to 8 vertices*, J. Combinatorial Theory, Ser.A, V.14, (1973), p.37–52.

[9] M.Bayer, L.Billera, *Generalized Dehn-Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets*, Invent. math. 79 (1985), 143–157.

[10] M.Bayer, A.Klapper, *A new index for polytopes*, Discrete and Computational Geometry, V.6, 1 (1991), p. 33–47.

[11] L. Billera, C.Lee, *Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), p.181–185.

[12] A. Björner, A. Paffenholz, J. Sjöstrand, G.M. Ziegler, *Bier spheres and posets*, Discrete Comput. Geom. 34 (2005), p.71–86.

[13] M. Brion, *Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry*, Banach Center Publications 36:1 (1996), p.25–44.

[14] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings, revised edition*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, V39 (1993).

[15] В. М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения,* Тр.МИАН, Том 263 (2008), с.18–43.

[16] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, *Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия*, Труды Матем. Инст. им. В.А.Стеклова, т.247 (2004), с.41–58.

[17] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, 2004.

[18] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, Math. Surveys Monogr., 204, AMS 2015.

[19] R.Charney, M.Davis, *The Euler characteristic of a nonpositively curved, piecewise Euclidean manifold*, Pacific J. Math. V.171, N.1 (1995), p.117–137.

[20] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы*, УМН, 29:5(179) (1974), с. 71–168.

[21] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., 62:2 (1991), p. 417–451.

[22] B.Grunbaum, *Convex polytopes*, Grad. Texts in Math. 221.

[23] О.Зарисский, П.Самюэль, *Коммутативная алгебра*, 1963.

[24] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in Ring theory, II (Proc. Second Conf.,Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1975), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., V. 26 (1977), p.171–223.

[25] S.Iyengar,G.Leuschke, A.Leykin, C.Miller, E.Miller, A.Singh, U.Walther, *Twenty-four hours of local cohomology*, Grad. Studies in Math. 87.

[26] M. Juhnke-Kubitzke, S. Murai, *Balanced generalized lower bound inequality for simplicial polytopes*, arXiv:1503.06430.

[27] М. Йосвиг, *Группа проективностей и раскраска фасет простого многогранника*, УМН. Т.56, 3(339) (2001), с.171–172.

[28] F. S. Macaulay, *Some properties of enumeration on the theory of modular systems*, Proc. London Math. Soc. vol.26 (1927), p.531–555.

[29] С. Маклейн, *Гомология*, 1966.

[30] Ю.В.Матиясевич, *Алгоритм Тарского*, Компьютерные инструменты в образовании, 6 (2008).

[31] James R. Munkres, *Topological results in combinatorics*, Michigan Math. J., V. 31, 1 (1984), p.113–128.

[32] I. Novik, E. Swartz, *Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets*, Adv. Math., 222 (2009), p.2059–2084.

[33] I. Novik, E. Swartz, *Gorenstein rings through face rings of manifolds*, Composit. Math. 145 (2009), p.993–1000.

[34] G. Reisner, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Math. V.21, 1 (1976), p.30–49.

[35] P. Schenzel, *On the Number of Faces of Simplicial Complexes and the Purity of Frobenius*, Math. Zeitschrift 178 (1981), p.125–142.

[36] Р.Стэнли, *Перечислительная комбинаторика.*

[37] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics 41.Inc., 1996.

[38] R. Stanley, *Cohen-Macaulay complexes*, in Higher Combinatorics (M. Aigner, ed.), NATO Advanced Study Institute Series (1977), p.51–62.

[39] R. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. Math. 35 (1980), p.236–238.

[40] R. Stanley, *Hilbert Functions of Graded Algebras*, Adv. Math. 28 (1978), p.57–83.

[41] R. Stanley, *Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results*, Adv.Studies in Pure Math. 11, Commutative Algebra and Combinatorics (1987).

[42] R. Stanley, *Flag f-vectors and the cd-index*, Math. Z. 216, 3 (1994), p.483–499.

[43] J.Stückrad, W.Vogel, *Buchsbaum rings: an interaction between algebra, geometry and topology.*

[44] В. А. Тиморин, *Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников*, УМН 54:2(326) (1999), с.113–162.

[45] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии*, 1989.

[46] А.Хатчер, *Алгебраическая топология*, 2011.

[47] Г.Циглер, *Теория многогранников*, 2014.