Задачи по комбинаторике триангуляций

Листок 3

Для симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ определим $f_K(t) = 1 + f_0t + f_1t^2 + f_3t^2 + \ldots$, где f_j — количество j-мерных симплексов. Видно, что $f_K(-1) = 1 - \chi(K)$.

Задача 1. Докажите, что $\dfrac{d}{dt}f_K(t) = \sum\limits_{i\in[m]} f_{\mathrm{link}_K\{i\}}(t)$.

Задача 2. Докажите, что $\dfrac{d^s}{dt^s}f_K(t) = s! \sum\limits_{I\in K, |I|=s} f_{\mathrm{link}_K I}(t)$.

Задача 3. Записав для многочлена $f_K(t)$ формулу Тейлора в точке $t_0 = -1$, докажите эквивалентную форму обобщенных соотношений Дена–Соммервилля

$$f_K(t) = (-1)^{n-1}f_K(-1-t) + (1 - (-1)^{n-1} - \chi(K)).$$

Задача 4.* Докажите, что соотношение выше действительно эквивалентно соотношению $h_j - h_{n-j} = (-1)^j\binom{n}{j}(\chi(S^{n-1}) - \chi(K))$.

Задача 5. Докажите, что из (неочевидного) неравенства в теореме о верхней границе ($h_j \leqslant \binom{h_1+j-1}{j}$) следует (очевидное) неравенство $f_{j-1} \leqslant \binom{f_0}{j}$.

Задача 6. Вычислите ряд Гильберта алгебры Стенли–Райснера границы n-мерного симплекса.

Задача 7. Опишите алгебру Стенли–Райснера границы кроссполитопа (см. листок 1) и ее ряд Гильберта.

Задача 8. Докажите, что для алгебры Стенли–Райснера произвольного симплициального комплекса K выполнено

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K];t) = \sum_{j=0}^{n} f_{j-1}\frac{t^j}{(1-t)^j} = \frac{h_0 + h_1t + \cdots + h_nt^n}{(1-t)^n}.$$

где $n = \dim K + 1$.

Градуированная $\Bbbk$-алгебра A называется связной, если $A_0 \cong \Bbbk$.

Задача 9. Допустим, связная градуированная алгебра A является свободным конечно порожденным модулем над своей градуированной подалгеброй B. Пусть $B_+ = \bigoplus_{j>0} B_j$, а (B_+) — идеал алгебры A, порожденный подмножеством $B_+ \subset A$. Докажите, что

$$\mathrm{Hilb}(A;t) = \mathrm{Hilb}(B;t) \cdot \mathrm{Hilb}(A/(B_+);t)$$

(см. Предложение 2.8 у Атьи–Макдональда “Введение в коммутативную алгебру”).