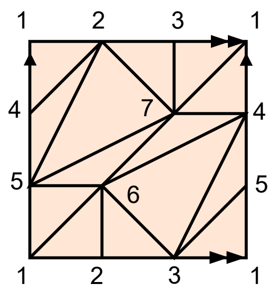
Задачи по комбинаторике триангуляций

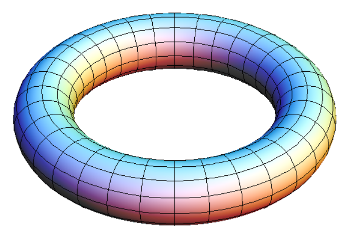
Листок 1

Задача 1. Докажите формулу Эйлера $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ для трехмерного многогранника.

Задача 2. Докажите, что у любого симплициального трехмерного (выпуклого) многогранника существует шеллинг.

Задача 3. (а) Докажите, что у показанной триангуляции двумерного тора





не существует шеллинга. (Hint: посчитайте h-вектор этой триангуляции). (б) Существует ли шеллинг у какой-нибудь другой триангуляции 2-мерного тора?

Задача 4. Докажите, что треугольный алгоритм вычисления h-чисел (в случае произвольной размерности) можно записать следующими формулами

$$h_l = \sum_{j\leqslant l}(-1)^{l-j}\binom{n-j}{n-l}f_{j-1}, \qquad f_{l-1} = \sum_{j\leqslant l}\binom{n-j}{n-l}h_j.$$

Или, если записывать через производящие функции:

$$\sum_{j=0}^{n} h_j t^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} f_{j-1}(t-1)^{n-j}.$$

Задача 5. Вычислите f-вектор и h-вектор n-мерного симплекса

Задача 6. Вычислите f-вектор и h-вектор n-мерного кроссполитопа (аналога октаэдра), то есть симплициального многогранника

$$\mathrm{convhull}\{(\pm1,0,\ldots,0),(0,\pm1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,\pm1)\}.$$

(а) при $n=4$, (б) при $n=5$, (в) для произвольного n.

Задача 7. В любом шеллинге выпуклого симплициального многогранника P^n количество симплексов типа i равно h_i.

Задача 8. Считая известной формулу Эйлера для выпуклого 4-мерного многогранника ($f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$), докажите соотношения Дена–Соммервилля при $n=4$ по аналогии с 3-мерным случаем.

Задача 9.* Докажите, что у любого выпуклого симплициального многогранника существует шеллинг.