

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1

1.1. Изучите дискретную динамическую систему, порождённую отображением $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Найдите (единственную) неподвижную точку этого отображения. Кажется ли она вам устойчивой, притягивающей? Вычислите по три десятичных знака чисел $\sin^{2018^\circ}(1)$, $\sin^{2018^\circ}(1000000)$. Поставьте аналогичные вопросы для косинуса и тангенса и ответьте на них.

1.2. (Вычисление $\sqrt{2}$ методом Ньютона). Рассмотрите последовательность рациональных чисел, определённую соотношением $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ с начальным условием $x_0 = 2018$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$. Сколько правильных знаков $\sqrt{2}$ даст x_{20} ? **Указание.** С помощью соотношения $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$ установите (при некоторых условиях) неравенство $\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_n - \sqrt{2}} < \frac{1}{2}$ и воспользуйтесь им.

1.3. Сопоставим каждому многоугольнику новый, вершины которого будут совпадать с серединами сторон исходного. Изучите для небольших n неподвижные точки и циклы соответствующих отображений $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ (ответы зависят от выбора понятия конгруэнтности). Есть ли у этих отображений притягивающие неподвижные точки?

1.4. (Преобразование Наполеона). Построим на каждой стороне исходного треугольника правильный треугольник, внутренность которого не пересекается с исходным. Центры этих правильных треугольников будем считать вершинами нового треугольника, сопоставляемого исходному. Каковы циклы и неподвижные точки построенного отображения $\mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$? (Ответ зависит от выбора понятия конгруэнтности). Изучите аналог этой конструкции для четырёхугольников, заменив правильные треугольники на квадраты.

1.5. Рассматривая треугольники с точностью до подобия, замените каждый угол на полусумму других углов. Докажите, что правильный треугольник – притягивающая точка этого отображения. За сколько итераций треугольник с углами $1^\circ, 1^\circ, 178^\circ$ в треугольник, углы которого отличаются от 60° не более чем на 1° ?

1.6. Пусть $a_0 = 81, b_0 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ для всех $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Докажите, что существуют и равны пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Сколько одинаковых десятичных знаков у a_{2018} и b_{2018} ?

1.7. С помощью подходящих компьютерных средств проверьте, что последовательность преобразований Рихело произвольного вписанного шестиугольника стремится к описанному треугольнику.