

Пространства матриц и выпуклые многогранники

Антон Айзенберг
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
ayzenberga@gmail.com

Содержание

0.1	Обозначения и общие напоминания	2
0.2	Напоминания про выпуклые многогранники	2
0.3	Напоминания про матрицы	3
1	Лекция 1: Пермутоэдр и пространства матриц	8
1.1	Пермутоэдр	8
1.2	Матрицы	9
2	Лекция 2: Трехдиагональные матрицы	14
2.1	Пермутоэдр	14
2.2	Матрицы	16
3	Лекция 3: Периодические трехдиагональные матрицы	22
3.1	Пермутоэдр	22
3.2	Матрицы	26
4	Лекция 4: Некоторые другие пространства матриц	32
4.1	Пермутоэдр	32
4.2	Матрицы	32

Предварительные сведения

0.1 Обозначения и общие напоминания

- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$: конечное множество из n элементов.
- Σ_n : множество (группа) перестановок n элементов. По определению, перестановка $\sigma \in \Sigma_n$ — это биекция $\sigma: [n] \rightarrow [n]$.
- Обратная перестановка σ^{-1} — это биекция, обратная к σ .
- Перестановки можно умножать путем взятием композиции. По определению, произведением $\sigma\tau$ перестановок $\sigma: [n] \rightarrow [n]$ и $\tau: [n] \rightarrow [n]$ называется биекция

$$\sigma\tau: [n] \xrightarrow{\tau} [n] \xrightarrow{\sigma} [n].$$

- Транспозицией (i, j) называется перестановка, меняющая местами элементы $i, j \in [n]$, и сохраняющая все остальные. Любую перестановку можно представить в виде произведения транспозиций (упр.). Такое представление не единственно.
- $(-1)^\sigma$: знак перестановки σ . По определению, знак перестановки равен $+1$, если разложение перестановки в произведение транспозиций содержит четное число транспозиций, и -1 , если нечетное. Определение корректно.
- \mathbb{Z}_2 : группа из двух элементов $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

0.2 Напоминания про выпуклые многогранники

- Подмножество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in A$, весь отрезок $[x_1, x_2]$ лежит в A .
- Подмножество A называется *ограниченным*, если оно лежит внутри некоторого куба (или шара).
- Пусть $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ набор точек (векторов). *Выпуклой комбинацией* этих точек называется точка $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Это можно понимать как центр масс системы точек, если точке x_i приписана масса λ_i .
- Множество всевозможных выпуклых комбинаций набора точек $\{x_1, \dots, x_m\}$ называется его *выпуклой оболочкой*, обозначение $\text{conv}(x_1, \dots, x_m)$. Говоря иначе, выпуклая оболочка — это наименьшее по включению выпуклое множество, которое содержит заданный набор точек.
- Если $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ линейное (или аффинное) отображение, и $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, то имеем

$$L(\text{conv}(x_1, \dots, x_m)) = \text{conv}(L(x_1), \dots, L(x_m)). \quad (0.1)$$

- (Аффинным) полупространством называется подмножество точек вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq c\},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ заданные вектор и число (a называется нормалью, а c опорным параметром полупространства).

Определение 0.1. Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек в \mathbb{R}^n .

Определение 0.2. Выпуклым полиэдром называется пересечение конечного числа полупространств в \mathbb{R}^n . Выпуклым многогранником называется полиэдр, являющийся ограниченным множеством.

- Эти определения выпуклого многогранника эквивалентны, что, впрочем, есть нетривиальное утверждение. Второе определение описывает многогранник с помощью системы аффинных неравенств $\langle a_i, x \rangle \leq c_i$, задающих полупространства.
- Если ни одна из точек x_i не лежит в выпуклой оболочке всех остальных, то все точки x_i являются вершинами многогранника $\text{conv}\{x_i\}$.
- Если отбрасывание любого из неравенств $\langle a_i, x \rangle \leq c_i$ приводит к изменению многогранника, заданного системой неравенств, то полагая $\langle a_i, x \rangle = c_i$ мы получим гипергрань многогранника (т.е. в этом случае число гиперграней совпадает с числом неравенств).

0.3 Напоминания про матрицы

Везде далее \mathbb{k} обозначает либо поле вещественных чисел \mathbb{R} , либо поле комплексных чисел \mathbb{C} . Других полей не будет. Элементы поля называются числами или скалярами.

- Матрицей $m \times n$ над полем \mathbb{k} называется таблица с m строками и n столбцами, заполненная числами из поля \mathbb{k} . Обозначение

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Матрицы одного размера можно складывать, вычитать и умножать на числа из \mathbb{k} естественным образом.
- Если $A = (a_{i,j})$, то транспонированной матрицей называется $A^T = (a_{j,i})$.

- Если A матрица размера $m \times n$, а B матрица размера $n \times k$, то определено произведение $C = AB$. Это матрица размера $m \times k$, элементы которой определяются по правилу

$$c_{i,j} = \sum_{s=1}^n a_{i,s} b_{s,j}.$$

- Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной матрицей. Обычно из контекста понятно, о каком размере единичной матрицы идет речь.

Упражнение 0.3. $A \cdot E = E \cdot A = A$, $A(BC) = (AB)C$, $A(B + C) = AB + AC$.

- Для матрицы $A \in M_n(\mathbb{k})$ *обратной матрицей* называется квадратная матрица $B \in M_n(\mathbb{k})$, такая что $AB = BA = E$. Если обратная матрица существует, то она единственна. Обозначение: A^{-1} .
- Матрицы-столбцы размера $1 \times n$ будем отождествлять с векторами из арифметического векторного пространства \mathbb{k}^n . Когда речь идет про вектор $v \in \mathbb{k}^n$, запись $v = 0$ означает, что все координаты вектора v (т.е. все элементы матрицы-столбца) равны нулю. Соответственно, $v \neq 0$ означает, что хотя бы одна координата не равна нулю.
- Множество всех квадратных матриц размера $n \times n$ над полем \mathbb{k} будем обозначать $M_n(\mathbb{k})$.
- Если $A \in M_n(\mathbb{k})$ квадратная матрица, $v \in \mathbb{k}^n$ вектор, то определен вектор $Av \in \mathbb{k}^n$ (выражение слева — это частный случай произведения матриц). Таким образом матрицы можно понимать как операции, которые принимают на вход вектор из \mathbb{k}^n и дают на выходе вектор из \mathbb{k}^n :

$$A: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$$

Эти операции обладают свойством линейности: $A \cdot (v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$, $A(\lambda v) = \lambda Av$. Такие операции называются *линейными операторами*.

Упражнение 0.4. Произведение матриц соответствует композиции операторов.

Определение 0.5. *Определителем* квадратной матрицы $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{k})$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^\sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \in \mathbb{k}$$

Диагональю называется вектор $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})^\top \in \mathbb{k}^n$. *Следом* квадратной матрицы называется число $\text{tr } A = \sum_{i \in [n]} a_{i,i} \in \mathbb{k}$, т.е. сумма диагональных элементов.

Упражнение 0.6. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Упражнение 0.7. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Упражнение 0.8. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Упражнение 0.9. Для матрицы $A \in M_n(\mathbb{K})$ следующие условия равносильны: (1) существует обратная матрица A^{-1} ; (2) $\det A \neq 0$; (3) не существует такого вектора $v \in \mathbb{K}^n$, что $v \neq 0$, но $Av = 0$; (4) столбцы матрицы A образуют базис векторного пространства \mathbb{K}^n .

Квадратная матрица, удовлетворяющая любому из этих условий, называется *невырожденной* матрицей.

Определение 0.10. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{K})$, вектор $v \in \mathbb{K}^n$ и скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ удовлетворяют соотношению $Av = \lambda v$, и при этом $v \neq 0$. Тогда λ называется *собственным значением* матрицы A , а v — *собственным вектором* матрицы A , соответствующим этому собственному значению λ .

Множество всех возможных собственных векторов, соответствующих заданному собственному значению, (и добавленный нулевой вектор, который мы собственным вектором формально не считаем) образует векторное подпространство в \mathbb{K}^n . Оно называется *собственным подпространством* собственного значения λ .

Упражнение 0.11. Если λ — собственное значение матрицы A , то $\det(\lambda E - A) = 0$.

- Для фиксированной матрицы $A \in M_n(\mathbb{K})$ выражение $P(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ является многочленом степени n . Он называется *характеристическим многочленом* матрицы A . Таким образом, собственные значения матрицы A — это корни характеристического многочлена. Их не более n штук.

Упражнение 0.12. Собственные векторы, соответствующие набору попарно различных собственных значений линейно независимы.

- *Сопряжением* матрицы $A \in M_n(\mathbb{K})$ на обратимую матрицу C называется операция перехода к матрице CAC^{-1} .

Упражнение 0.13. Докажите, что у матриц A и CAC^{-1} одни и те же собственные значения.

- Диагональной матрицей $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ называется матрица, у которой на диагонали стоят числа a_1, \dots, a_n , а вне диагонали нули.
- Собственные значения матрицы $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ — это числа a_1, \dots, a_n .

Утверждение 0.14. Допустим у матрицы $A \in M_n(\mathbb{K})$ есть n попарно различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда матрица A представляется в виде

$$A = CDC^{-1}, \quad (0.2)$$

где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а C — это квадратная матрица, в столбцах которой записаны собственные векторы (какие-нибудь), соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Упражнение 0.15. Докажите это утверждение.

- Матрица C называется диагонализующей матрицей для матрицы A . Задача поиска представления 0.2 называется задачей диагонализации матрицы. Таким образом, эта задача эквивалентна задаче поиска собственных значений и собственных векторов.
- Для заданных чисел λ_i и линейно независимых векторов v_i существует единственная матрица, имеющая собственные числа λ_i и собственные векторы v_i , что легко следует из (0.2).

Упражнение 0.16. $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Далее мы сосредоточимся на вещественных матрицах.

Определение 0.17. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. Матрица A называется *симметричной*, если $A^\top = A$. Матрица A называется *ортогональной*, если $AA^\top = A^\top A = E$.

- Множество симметричных матриц размера n обозначается Sym_n , а множество ортогональных матриц обозначается $O(n)$.
- Для $A \in O(n)$ выполнено $A^{-1} = A^\top$.

Упражнение 0.18. Доказать, что столбцы ортогональной матрицы образуют ортогональный базис. И наоборот. (Ортогональный базис: каждый вектор базиса имеет длину один, и они попарно перпендикулярны, т.е. попарные скалярные произведения равны 0).

Упражнение 0.19. Если $A, B \in O(n)$, то $AB \in O(n)$ и $A^{-1} \in O(n)$. Ортогональные матрицы образуют группу по умножению.

Утверждение 0.20. Любая симметричная вещественная матрица $A \in \operatorname{Sym}_n$ имеет вещественные собственные значения и диагонализуется посредством ортогональной матрицы, т.е. существует представление

$$A = CDC^{-1} = CDC^\top, \quad (0.3)$$

где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а $C \in O(n)$. Иными словами, собственные подпространства симметричной матрицы попарно ортогональны.

Есть комплексный аналог этого утверждения. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *эрмитовой*, если $A^\top = \bar{A}$. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *унитарной*, если $A^\top \bar{A} = E$. Множество эрмитовых матриц : Her_n , множество унитарных матриц : $U(n)$. Унитарные матрицы образуют группу по умножению. Любая эрмитова матрица имеет вещественные собственные значения, и диагонализуется посредством унитарной матрицы:

$$A = CDC^{-1}, \text{ где } C \in U(n) \Rightarrow C^{-1} = \bar{C}^\top. \quad (0.4)$$

- На диагонали эрмитовой матрицы стоят вещественные числа.
- Множество собственных значений симметричной вещественной или эрмитовой комплексной матрицы называется *спектром*.

Упражнение 0.21. Если матрица A имеет блочный вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & \mathbf{0} & \\ * & * & & \\ \hline \mathbf{0} & & * & * \\ & & * & * \end{array} \right)$$

то спектр A есть объединение спектров ее блоков.

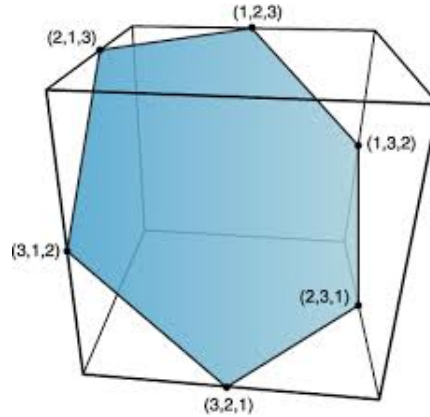


Рис. 1: Пермутоэдр Pe_b при $b = (1, 2, 3)$

1 Лекция 1: Пермутоэдр и пространства матриц

1.1 Пермутоэдр

Конструкция 1.1. Пусть $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ — набор попарно различных вещественных чисел. Мы будем считать, что они упорядочены по возрастанию: $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Рассмотрим в \mathbb{R}^n выпуклый многогранник

$$Pe_b = \text{conv}\{(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in \Sigma_n\}$$

Он называется *перестановочным многогранником*, или *пермутоэдром*.

Упражнение 1.2. • Если $(x_1, \dots, x_n) \in Pe_b$, то $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in Pe_b$

- Пусть $x_1 \leq \dots \leq x_n$. Тогда $(x_1, \dots, x_n) \in Pe_b$ в том и только том случае, когда выполнена система неравенств

$$\begin{aligned} x_n &\leq b_n; \\ x_{n-1} + x_n &\leq b_{n-1} + b_n; \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &\leq b_{n-2} + b_{n-1} + b_n; \\ &\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n; \end{aligned}$$

Это позволяет задать Pe_b при помощи системы неравенств.

Видно, что $\dim Pe_b = n - 1$, поскольку пермутоэдр лежит в гиперплоскости $\sum x_i = \sum b_i = \text{const}$. Комбинаторная структура этого многогранника не зависит от выбора b ; мы обсудим эту структуру во второй лекции. В тех случаях, когда нам будет важна только комбинаторная структура, пермутоэдр будет обозначаться Pe^{n-1} . Замечательные свойства пермутоэдра мы будем раскрывать постепенно, каждый раз прилагая их как исследованию пространств матриц.

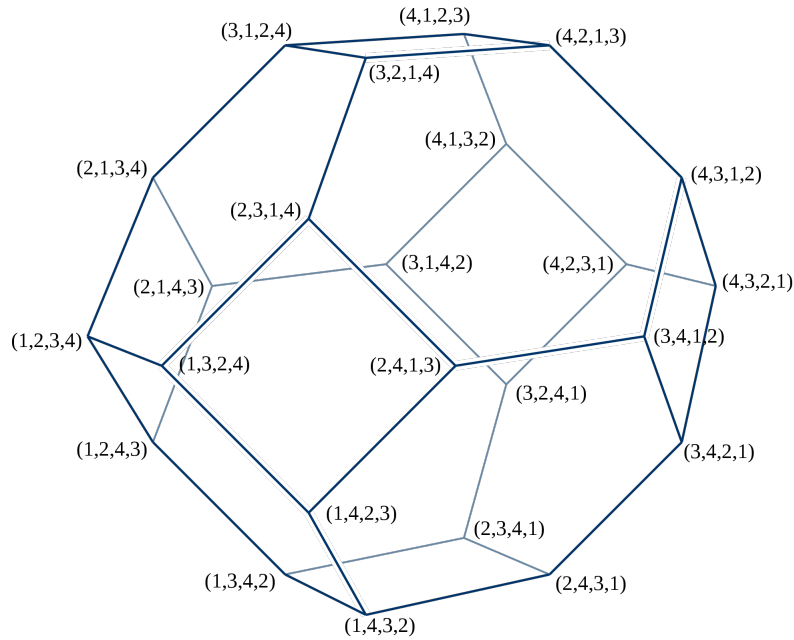


Рис. 2: Пермутоэдр Pe_b при $b = (1, 2, 3, 4)$

1.2 Матрицы

Пусть λ обозначает набор попарно различных вещественных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. В курсе нас будут интересовать вопросы вроде следующих:

- Какую структуру имеет множество всех возможных симметричных матриц, имеющих спектр λ ? Такое множество будем называть множеством изоспектральных матриц и обозначать M_λ .
- Какую структуру имеет множество изоспектральных матриц, имеющих нули на заданных позициях?

Вокруг этих вопросов имеется много разнообразной теории, связанной с разными областями математики, так и множество открытых вопросов. На первый вопрос, однако, можно дать довольно быстрый ответ.

Определение 1.3. *Полным флагом* в \mathbb{R}^n называется множество вложенных векторных подпространств

$$\{0\} = \Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \dots \subset \Pi_n = \mathbb{R}^n,$$

где $\dim \Pi_s = s$.

Утверждение 1.4. *Пространство M_λ гомеоморфно пространству $F_n(\mathbb{R})$ полных флагов в \mathbb{R}^n .*

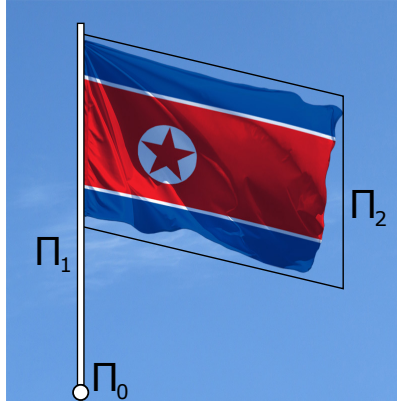


Рис. 3: Северокорейский полный флаг в \mathbb{R}^3

Доказательство. У симметричной матрицы $A \in M_\lambda$ все собственные числа попарно различны. Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ — собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Сопоставим матрице A полный флаг

$$\langle v_1 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle \subset \dots \subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

В обратную сторону: сопоставим полному флагу

$$\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \dots \subset \Pi_n = \mathbb{R}^n$$

набор векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, таких что v_1 порождает Π_1 , v_2 порождает ортогональное дополнение до Π_1 в Π_2 , v_3 порождает ортогональное дополнение до Π_2 в Π_3 , и т.д. Далее построим симметричную матрицу с собственными числами λ_i и собственными векторами v_i . Тут была неоднозначность в выборе порождающих векторов: каждый вектор v_i определен с точностью до умножения на ненулевую константу. Однако та же самая неоднозначность возникает и у собственных векторов матрицы. Значит мы получили биекцию и утверждение доказано. \square

Утверждение есть и в комплексном случае: пространство $M_\lambda(\mathbb{C})$ изоспектральных эрмитовых матриц гомеоморфно пространству $F_n(\mathbb{C})$ полных комплексных флагов в \mathbb{C}^n . Доказательство аналогичное.

Пространства полных флагов — хорошо изученный объект в топологии, например, $F_n(\mathbb{R})$ можно представить в виде *башни расслоений* с известной общей базой и слоями:

$$F_n(\mathbb{R}) = F_{1,2,\dots,n} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} F_{2,3,\dots,n} \xrightarrow{\mathbb{R}P^2} F_{2,3,\dots,n} \rightarrow \dots \xrightarrow{\mathbb{R}P^{n-2}} \mathbb{R}P^{n-1}$$

Здесь F_{i_1,\dots,i_s} — пространство частичных флагов, то есть флагов, состоящих из векторных подпространств размерностей i_1, \dots, i_s . Аналогичная башня расслоений есть и в комплексном случае. Подробнее мы про пространства флагов здесь говорить не будем.

Определение 1.5. Рассмотрим отображение, которое сопоставляет эрмитовой (в частности, симметричной вещественной) матрице ее диагональ:

$$\mu: M_\lambda(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mu(A) = (a_{1,1}, \dots, a_{n,n}).$$

Вопрос 1.6. Описать образ отображения μ , то есть найти все такие наборы чисел (a_1, \dots, a_n) , для которых существует эрмитова матрица с диагональю (a_1, \dots, a_n) и спектром λ .

Заметим, что $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, поскольку и то и другое равно $\text{tr } A$. Полный ответ на вопрос 1.6 дает

Теорема 1.7 (Теорема Хорна–Шура). Множество $\mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$ диагоналей эрмитовых матриц со спектром λ , совпадает с пермутаэдром Per_λ .

Заметим вначале, что диагональные матрицы, у которых на диагонали стоят λ_i в каком-либо порядке, являются эрмитовыми и, очевидно, имеют спектр λ . Поэтому, для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_n$, имеем $(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}) \in \mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$.

Доказательство. (1) Вначале докажем, что $\mu(\text{Herm}_\lambda) \subseteq \text{Per}_\lambda$. Пусть $A \in \text{Herm}_n$. Согласно (0.4), $A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \bar{U}^\top$, где $U = (u_{i,j}) \in U(n)$. Перемножив матрицы, получим, что диагональные элементы матрицы A имеют вид

$$a_{i,i} = \sum_{j=1}^n \lambda_j |u_{i,j}|^2.$$

Введем матрицу $C = (|u_{i,j}|^2)$ (у матрицы U заменили каждый элемент на квадрат его модуля). Имеем

$$\mu(A) = (a_{1,1}, \dots, a_{n,n})^\top = C(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top.$$

Теперь нам потребуется вспомогательное утверждение, которое имеет самостоятельную ценность (возможно даже большую, чем теорема Хорна–Шура).

Определение 1.8. Вещественная матрица называется *дважды стохастической*, если все ее элементы неотрицательны, и суммы элементов в каждой строке и в каждом столбце равны 1.

Упражнение 1.9. Дважды стохастические матрицы образуют выпуклое подмножество в $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Упражнение 1.10. Если в унитарной матрице заменить каждый элемент на квадрат его модуля, то получится дважды стохастическая матрица.

Упражнение 1.11. (*) Верно ли обратное: для любой дважды стохастической матрицы C существует унитарная U , такая что $c_{i,j} = |u_{i,j}|^2$? Аналогичный вопрос для ортогональных матриц вместо унитарных.

Определение 1.12. Пусть $\sigma \in \Sigma_n$. Рассмотрим матрицу $A_\sigma = (a_{i,j})$, у которой $a_{i,\sigma(i)} = 1$, а остальные элементы равны нулю. Такая матрица называется *перестановочной матрицей*.

Очевидно, что любая перестановочная матрица является унитарной, дважды стохастической и обратимой ($A_\sigma^{-1} = A_{\sigma^{-1}}$).

Теорема 1.13 (Теорема Биркгофа). *Множество дважды стохастических матриц является выпуклой оболочкой перестановочных матриц, причем ни одна из перестановочных матриц не лежит в выпуклой оболочке остальных. Иными словами множество DS_n дважды стохастических матриц есть выпуклый многогранник с вершинами A_σ для всевозможных перестановок $\sigma \in \Sigma_n$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [10]. Многогранник DS_n всех дважды стохастических матриц называется многогранником Биркгофа. Легко посчитать его размерность: $\dim DS_n = (n - 1)^2$.

Упражнение 1.14. Докажите, что произведение двух дважды стохастических матриц является дважды стохастической матрицей.

Упражнение 1.15. Докажите теорему Биркгофа при $n = 2, 3$.

Упражнение 1.16. (*) Найдите число вершин, ребер, 2-граней и 3-граней для многогранника Биркгофа DS_3 .

Упражнение 1.17. (**) Теорема Синкхорна, [12]. У матрицы разрешено за ход умножить любую строку или столбец на положительное число. Докажите, что из любой матрицы с положительными элементами, можно такими операциями получить дважды стохастическую.

Вернемся к доказательству теоремы Хорна–Шура. Мы поняли, что $C \in DS_n$, и $\mu(A) = C\lambda$. Рассмотрим линейное отображение

$$L: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad B \mapsto B\lambda$$

Имеем $L(A_\sigma) = A_\sigma\lambda = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})^\top$. По теореме Биркгофа $C \in \text{conv}\{A_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$. Следовательно

$$\mu(A) = C\lambda = L(C) \in \text{conv}\{L(A_\sigma) \mid \sigma \in \Sigma_n\} = \text{conv}\{((\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})^\top \mid \sigma \in \Sigma_n)\} = \text{Re}_\lambda,$$

что и требовалось.

(2) Теперь докажем, что $\text{Re}_\lambda \subseteq \mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$, т.е. для любого $a \in \text{Re}_\lambda$ найдется эрмитова матрица с диагональю a и спектром λ . Поскольку мы уже поняли, что вершины Re_λ лежат в $\mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$, достаточно решить

Упражнение 1.18. Если $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$ и $\tau a = (a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}) \in \mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$ для некоторой транспозиции $\tau = (i, j)$. Тогда весь отрезок $[a, \tau a]$ лежит в $\mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$. □

Упражнение 1.19. (*) [4] Верно ли, что $\mu(M_\lambda(\mathbb{R})) = \text{Re}_\lambda$?

Замечание 1.20. Сопоставление эрмитовой матрице ее диагонали задает отображение из пространства F_n полных комплексных флагов в пространство \mathbb{R}^n , причем образом этого отображения является $(n - 1)$ -мерный пермутоэдр. В случае $n = 3$ имеем отображение из пространства $F_3(\mathbb{C})$ полных комплексных флагов в \mathbb{C}^3 (это многообразие имеет вещественную размерность 6) на шестиугольник. В 1997 году появилась спекуляционная новость: в ней утверждалось, что пчелиные танцы описываются отображением $\mu: F_3 \rightarrow \mathbb{R}e^2$, я что из-за этого пчелиные мозги имеют особую “квантовую” природу (якобы, из-за того, что такое же отображение возникает где-то в физике кварков, про что ни подтверждений ни подробностей я не нашел). Если покопаться в интернетах, то выяснится, что ни одной собственно научной статьи по этой теме опубликовано не было. Зато “квантовые пчелы и многообразие флагов” стали своеобразным мемом.

Замечание 1.21. Теорема Хорна–Шура породила целый ряд замечательных обобщений: теорему Костанта (обобщение с унитарных и эрмитовых матриц на другие типы групп и алгебр Ли) и еще более общую теорему Атьи–Гийемина–Стернберга, известную в симплектической геометрии. В каждой из этих теорем возникает отображение из многообразия в векторное пространство \mathbb{R}^k , так называемое отображение моментов, причем образом этого отображения оказывается выпуклый многогранник. Часто, исследуя свойства этого отображения, можно многое сказать об исходном многообразии. Особенно хорошо это проявляется в торической геометрии, где возникает взаимно однозначное соответствие между гладкими проективными торическими многообразиями и выпуклыми многогранниками, являющимися образами их отображений моментов.

2 Лекция 2: Трехдиагональные матрицы

2.1 Пермутоэдр

Для начала мы дадим комбинаторное описание пермутоэдра. Из упр.1.2 следует, что Re_b задается равенством

$$x_1 + \dots + x_n = b_1 + \dots + b_n \quad (2.1)$$

и набором неравенств:

$$\begin{aligned} x_i &\leq b_n; \\ x_i + x_j &\leq b_{n-1} + b_n; \\ x_i + x_j + x_k &\leq b_{n-2} + b_{n-1} + b_n; \\ &\dots \\ x_1 + \dots + \hat{x}_i + \dots + x_n &\leq b_2 + b_3 + \dots + b_n \end{aligned}$$

где мы по прежнему считаем, что $b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

Первая строчка неравенств высекает на гиперплоскости (2.1) симплекс. Последняя строчка означает, что срезаем у симплекса вершины. Предпоследняя строчка: срезаем те ребра, которые были ребрами исходного симплекса, и т.д. Отсюда следует

Лемма 2.1. *Многогранник Re^{n-1} получается из симплекса Δ^{n-1} последовательной срезкой его граней.*

Можно проверить, что ни одно из неравенств не следует из остальных, поэтому соответствующие равенства задают гиперграни пермутоэдра. Таким образом, все возможные гиперграни пермутоэдра Re^{n-1} кодируются собственными гранями симплекса Δ^{n-1} , или, что то же самое, собственными подмножествами множества $[n]$. Более подробно: пусть $S \subset [n]$, $S \neq \emptyset$, $S \neq [n]$. Полагая

$$\sum_{i \in S} x_i = b_{n+1-|S|} + \dots + b_n$$

мы попадаем на гипергрань пермутоэдра, которая будет обозначаться \mathcal{F}_S . Значит у пермутоэдра Re^{n-1} всего $2^n - 2$ гиперграней (ранее мы выяснили, что у него $n!$ вершин, они соответствуют перестановкам).

Упражнение 2.2. Набор гиперграней $\mathcal{F}_{S_1}, \dots, \mathcal{F}_{S_k}$ имеет непустое пересечение в том и только том случае, когда подмножества $S_1, \dots, S_k \subset [n]$ можно переупорядочить так, чтобы они образовывали цепь

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k. \quad (2.2)$$

Пересечение $\mathcal{F}_{S_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{S_k}$ является гранью Re^{n-1} размерности $n - 1 - k$.

Определение 2.3. k -мерный многогранник называется *простым*, если каждая его вершина содержится ровно в k гипергранях (или, что эквивалентно, из каждой вершины выходит ровно k ребер).

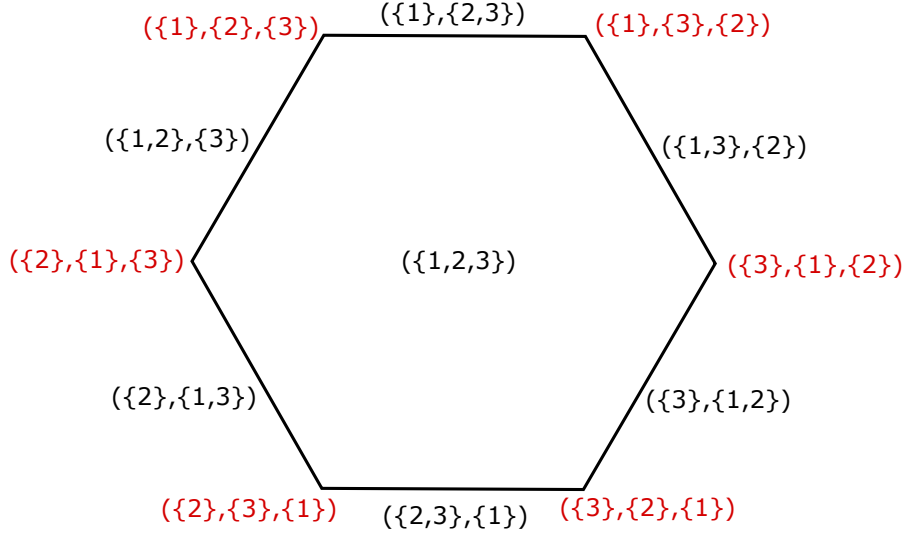


Рис. 4: Грани шестиугольника Re^2 кодируются линейно упорядоченными разбиениями множества $[3] = \{1, 2, 3\}$

Упражнение 2.4. Пермutoэдp — простой многогранник.

Упражнение 2.5. Сопоставим гиперграни \mathcal{F}_S цвет $c(\mathcal{F}_S) = |S| \in [n-1]$. Доказать, что такое сопоставление задает правильную раскраску гиперграней Re^{n-1} в $n-1$ цветов. Иными словами, если две гиперграни пересекаются, то они покрашены в разные цвета.

Цепь (2.2) удобно закодировать в виде конечной последовательности

$$(T_1, T_2, \dots, T_{k+1}), \quad (2.3)$$

где $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2 \setminus S_1$, $T_3 = S_3 \setminus (S_1 \sqcup S_2)$, \dots , $T_{k+1} = [n] \setminus S_k$. Очевидно, что каждое подмножество $T_i \subseteq [n]$ непусто, все они дизъюнкты и в объединении дают все $[n]$. Выражения вида (2.3) с таким свойством называются линейно упорядоченными разбиениями множества $[n]$ на $k+1$ подмножество. Таким образом, грани Re^{n-1} размерности s кодируются линейно упорядоченными разбиениями множества $[n]$ на $n-s$ подмножеств.

Пример 2.6. В множестве $[5]$ цепь подмножеств $\{2\} \subset \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 4, 5\}$ соответствует разбиению $(\{2\}, \{1, 4\}, \{5\}, \{3\})$.

Упражнение 2.7. Описать комбинаторно условие на два разбиения, при которых соответствующие грани Re^{n-1} лежат одна в другой.

Упражнение 2.8. Докажите, что реберный граф Re^{n-1} совпадает с графом Кэли группы Σ_n , если в качестве образующих взяты стандартные транспозиции $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.

Упражнение 2.9. Докажите, что каждая грань пермutoэдра комбинаторно эквивалентна произведению пермutoэдров меньших размерностей. А именно, для разбиения $T = (T_1, \dots, T_k)$, грань F_T комбинаторно эквивалентна $\text{Re}^{|T_1|-1} \times \dots \times \text{Re}^{|T_k|-1}$.

2.2 Матрицы

Вещественные матрицы вида

$$A(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

называются *трехдиагональными (симметричными) матрицами*. Нас интересует вопрос:

Вопрос 2.10. *Как устроено пространство $\text{TD}_{n,\lambda}$ всех трехдиагональных $(n \times n)$ -матриц с заданным спектром λ ?*

Рассмотрим следующие подмножества

$$\text{TD}_{n,\lambda}^> = \{A(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{TD}_{n,\lambda} \mid b_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{TD}_{n,\lambda}^{\geq} = \{A(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{TD}_{n,\lambda} \mid b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1\} = \overline{\text{TD}_{n,\lambda}^>}$$

Теорема 2.11 (Мозер'75, [7]). *Пространство $\text{TD}_{n,\lambda}^>$ гомеоморфно \mathbb{R}^{n-1} .*

Набросок доказательства приведен в конце лекции.

Теорема 2.12 (Томей'84, [13]). *Пространство $\text{TD}_{n,\lambda}^{\geq}$ гомеоморфно и комбинаторно эквивалентно пермutoэдру Pe^{n-1} .*

Доказательство. Пространство $\text{TD}_{n,\lambda}^{\geq}$ получается из $\text{TD}_{n,\lambda}^>$ добавлением предельных точек, то есть рассмотрением матриц, у которых какой-то набор b_i оказался равным нулю. Допустим,

$$b_{i_1} = b_{i_2} = \cdots = b_{i_s} = 0, \text{ где } 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_s, s \geq 1, \text{ а остальные } b_i > 0. \quad (2.4)$$

В этом случае трехдиагональная матрица $A(\underline{a}, \underline{b})$ распадается на блоки размеров

$$i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, \dots, i_s - i_{s-1}, n - i_s,$$

причем каждый блок сам по себе является трехдиагональной матрицей.

Пусть X_{i_1, \dots, i_s} обозначает множество всех изоспектральных трехдиагональных матриц $A(\underline{a}, \underline{b})$, для которых выполнено условие (2.4).

Поскольку $A \in X_{i_1, \dots, i_s}$ разваливается на блоки, спектр $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ должен как-то распределиться между этими блоками. Таким образом, множество X_{i_1, \dots, i_s} может иметь несколько компонент связности, в зависимости от того, как распределились по блокам собственные значения. Эти компоненты связности естественно кодируются

упорядоченными разбиениями множества $[n]$: разбиению (T_1, \dots, T_s) мы ставим в соответствие матрицы, у которых собственные числа $\{\lambda_i, i \in T_1\}$ попали в первый блок, собственные числа $\{\lambda_i, i \in T_2\}$ попали во второй блок, и т.д. Заметим, что каждая компонента связности гомеоморфна

$$\mathbb{R}^{i_1-1} \times \mathbb{R}^{i_2-1} \times \dots \times \mathbb{R}^{i_s-1},$$

что следует из теоремы Мозера 2.11, примененной к каждому блоку.

Таким образом, множество $\text{TD}_{n,\lambda}^{\geq}$ оказывается разбитым на куски, причем это разбиение комбинаторно устроено как множество граней пермutoэдра, и каждый из кусков топологически устроен как открытый шар. Значит $\text{TD}_{n,\lambda}^{\geq}$ и есть пермutoэдр (см. подробности в работе [13]). \square

Осталось разобраться, что происходит, когда какие-то из b_i отрицательны. Пусть $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1})$ — набор знаков, то есть $\epsilon_i = \pm 1$. Мы можем рассмотреть множество изоспектральных матриц $\text{TD}_{n,\lambda}^\epsilon$, у которых каждый элемент b_i имеет знак ϵ_i , либо 0.

Заметим, что при сопряжении матрицы $A(\underline{a}, \underline{b})$ с помощью матрицы вида $D_1 = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ (соотв. $D_2 = \text{diag}(-1, -1, \dots, 1)$, $D_3 = \text{diag}(-1, -1, -1, 1, \dots, 1)$, и т.д.) мы меняем знак элемента b_1 (соотв. b_2, b_3, \dots), а остальные элементы не меняются. Поскольку сопряжение не меняет спектр матрицы, оно задает корректное отождествление между всевозможными $\text{TD}_{n,\lambda}^\epsilon$. Поэтому теорема Томеи влечет, что каждое $\text{TD}_{n,\lambda}^\epsilon$ гомеоморфно и комбинаторно эквивалентно пермutoэдру.

Таким образом, все пространство $\text{TD}_{n,\lambda}$ представлено в виде объединения 2^{n-1} копий пермutoэдра. Эти копии, тем не менее, нужно правильно склеить: например, если $b_1 = 0$, то такие матрицы лежат как в куске $\text{TD}_{n,\lambda}^{(+1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1})}$, так и в куске $\text{TD}_{n,\lambda}^{(-1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1})}$.

Предложение 2.13. *Имеем $\text{TD}_{n,\lambda} = \text{Re}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2^{n-1} / \sim$, где точки (x, ϵ) и (x, ϵ') отождествляются, если x лежит на гипергранни Re^{n-1} , покрашенной в цвет i , и $\epsilon'_i \epsilon^{-1} = (+1, \dots, +1, -1, +1, \dots, +1)$.*

На рис.5 разобрана структура многообразия Томеи при $n = 3$.

Упражнение 2.14. Найдите эйлерову характеристику трехмерного многообразия Томеи.

Замечание 2.15. Имеется более общая конструкция. Пусть P — простой n -мерный многогранник, и пусть задано отображение ν из множества его гиперграней в \mathbb{Z}_2^n , такое что, если набор гиперграней F_1, \dots, F_n пересекается в вершине, то $\nu(F_1), \dots, \nu(F_n)$ являются базисом в \mathbb{Z}_2^n . Определим пространство

$$M_{(P,\nu)} = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim$$

где (x, ϵ) отождествляется с (x, ϵ') , если x лежит на некоторой гипергранни F и $\epsilon'_i \epsilon^{-1} = \nu(F)$. Пространство $M_{(P,\nu)}$ является n -мерным многообразием, которое склеено из 2^n копий многогранника P по правилам, задаваемым функций ν . Легко проверить, что

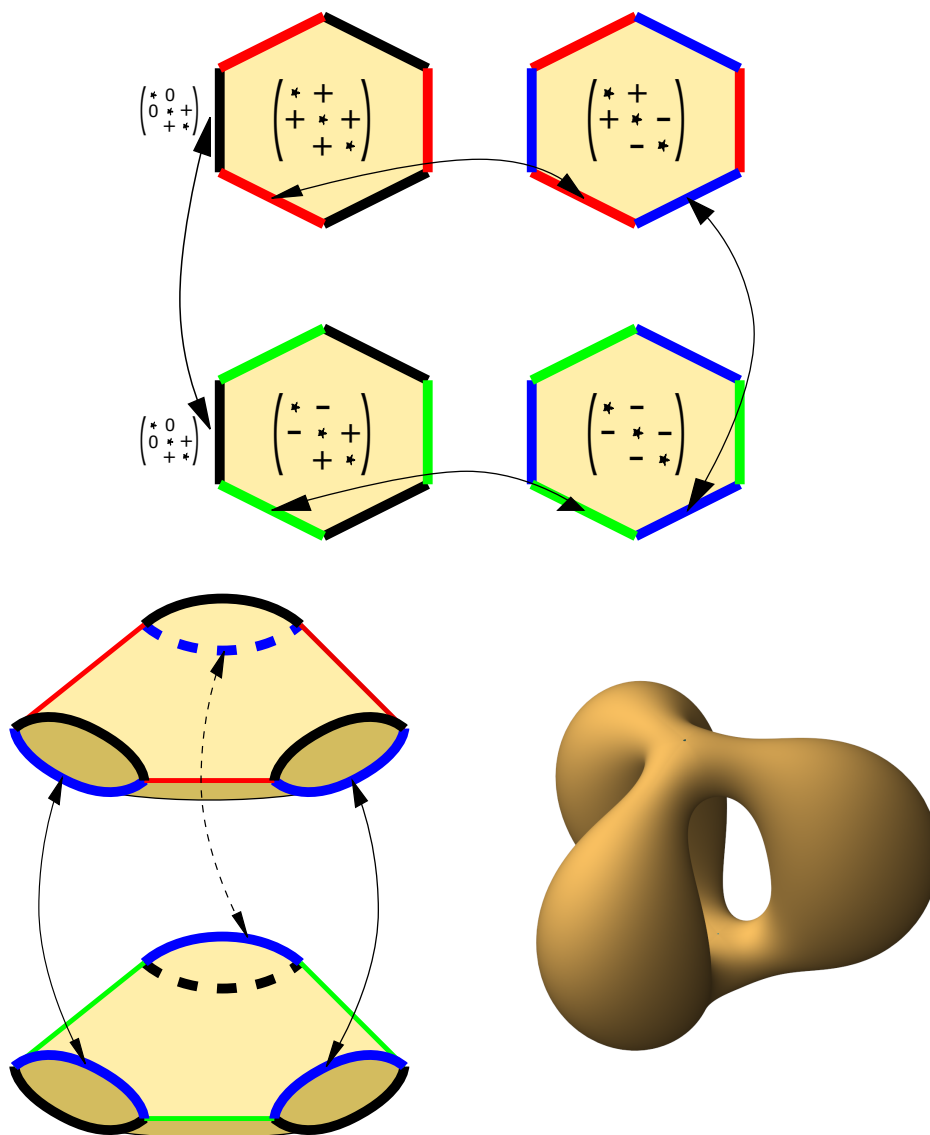


Рис. 5: Многообразие Томеи $TD_{n,\lambda}$ при $n = 3$ склеено из 4 шестиугольников. Это сфера с двумя ручками

меньшим числом копий многогранника обойтись нельзя, так как в каждой вершине многогранника должны стыковаться “как октанты в \mathbb{R}^3 ”.

Такие многообразия называются *малыми накрытиями* над многогранниками. Помимо $\text{TD}_{n,\lambda}$, примерами таких многообразий являются вещественные части гладких проективных торических многообразий. Например, 4 треугольника можно склеить в $\mathbb{R}P^2$ (вещественную часть $\mathbb{C}P^2$), а четыре квадрата — можно склеить либо в тор T^2 , либо в бутылку Клейна, в зависимости от выбора правил склейки ν .

Замечание 2.16. Приведем набросок доказательства теоремы Мозера. Для этого построим на $\text{TD}_{n,\lambda}^{\geq}$ так называемые канонические координаты. Пусть $A = A(a, b)$ трехдиагональная матрица, а A^{-1} — обратная к ней.

Упражнение 2.17. Левый верхний элемент матрицы A^{-1} задается цепной дробью

$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{a_1 - \frac{b_1^2}{a_2 - \frac{b_2^2}{\ddots - \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} - \frac{b_n^2}{a_n}}}}} \quad (2.5)$$

Рассмотрим рациональную функцию от переменной x :

$$R(x) = ((xE - A)^{-1})_{1,1}.$$

Легко проверить, что в знаменателе этой функции стоит многочлен степени n , а в числителе — степени не больше $n - 1$. Функция $R(x)$ имеет полюса в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, поскольку в точках спектра обратная матрица не определена. Значит в знаменателе $R(x)$ стоит произведение $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. Согласно стандартной теореме из курса алгебры, мы имеем разложение в сумму простейших дробей

$$R(x) = \frac{r_1}{x - \lambda_1} + \dots + \frac{r_n}{x - \lambda_n}. \quad (2.6)$$

Упражнение 2.18. Докажите, что $r_i > 0$ и $\sum_{i=1}^n r_i = 1$.

Упражнение 2.19. Докажите, что конструкцию можно обратить: имея заданный спектр λ_i , и набор чисел $r_i > 0$, $\sum_{i=1}^n r_i = 1$, можно определить рациональную функцию $R(x)$ по формуле (2.6). Доказать, что у такой функции имеется однозначное разложение в цепную дробь вида

$$\frac{1}{(x - a_1) - \frac{b_1^2}{(x - a_2) - \frac{b_2^2}{\ddots - \frac{b_{n-1}^2}{(x - a_{n-1}) - \frac{b_n^2}{x - a_n}}}}} \quad (2.7)$$

Замечание 2.20. Из цепной дроби (2.7) извлекаются числа a_i, b_i — они как раз и дают трехдиагональную матрицу $A(\underline{a}, \underline{b})$, с заданными собственными значениями λ_i и параметрами r_i .

Разложение рациональной функции в цепную дробь — дело нехитрое, это делается так же, как и для рациональных чисел. Важно показать, что числители дробей на каждом шаге разложения отрицательные, ведь в (2.5) они именно таковы.

Таким образом, r_i можно рассматривать как координаты на пространстве $\text{TD}_{n,\lambda}^>$. Согласно упражнениям, они лежат во внутренности стандартного $(n - 1)$ -мерного симплекса, которая гомеоморфна открытому шару \mathbb{R}^{n-1} .

Замечание 2.21. Для искушенных читателей приведем набросок доказательства, почему пространство $\text{TD}_{n,\lambda}$ является гладким многообразием. Заметим, что если спектр не фиксировать, то множество всех трехдиагональных симметричных матриц есть пространство \mathbb{R}^{2n-1} . Условия на спектр задают n уравнений в этом пространстве: такое алгебраическое многообразие не обязано быть гладким. Согласно теореме о неявном отображении, пространство S , заданное набором уравнений $F_i(x) = 0$ в пространстве \mathbb{R}^m есть гладкое подмногообразие, если градиенты $\text{grad } F_i$ линейно независимы в каждой точке $x \in S$. В случае трехдиагональных матриц, явно описать все градиенты и все точки изоспектрального множества оказывается проблематично. Вместо этого используется следующий трюк.

- Гладкость можно доказать в окрестности диагональных матриц из $\text{TD}_{n,\lambda}$ (которых всего $n!$), явно вычислив градиенты.
- Далее мы воспользуемся QR-алгоритмом, который состоит в следующем. Пусть $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$. Существует представление матрицы A в виде $A = QR$, где $Q \in O(n)$ ортогональная, а R верхнетреугольная.
- Рассмотрим матрицу $A' = RQ$.
- Будем итерировать процедуру перехода от A к A' , а именно наведем последовательность матриц A_0, A_1, A_2, \dots , в которой $A_0 = A$, $A_{n+1} = (A_n)'$.

Упражнение 2.22. Спектр A совпадает со спектром A' .

Упражнение 2.23. Если A трехдиагональная симметричная, то A' тоже трехдиагональная симметричная.

Упражнение 2.24. (*) Предельная матрица $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ существует и является диагональной матрицей.

- Предельная матрица обязана иметь тот же спектр, что и допредельные, получаем, что у предельной матрицы на диагонали стоят собственные значения исходной матрицы. Это используется для вычисления спектров матриц на практике (алгоритм, конечно, определен для произвольных матриц, не обязательно трехдиагональных, но для трехдиагональных он особенно хорош в силу своей скорости).

- Заметим, что QR -алгоритм можно применять “в отрицательном направлении”: разложив матрицу B в виде RQ , и взяв $A = QR$, мы получим, что $B = A'$.
- QR -алгоритм задает на пространстве $TD_{n,\lambda}$ дискретную динамику, у которой предельные точки — диагональные матрицы. Если $A \in TD_{n,\lambda}$ произвольная матрица, то мы начнем применять QR -алгоритм, пока не попадем в гладкую окрестность диагональной матрицы. Возьмем гладкие координаты из этой окрестности (которые, как мы уже проверили, существуют) и потянем их обратным ходом QR -алгоритма до матрицы A . Получим гладкие координаты в окрестности A .

В оригинале вместо QR -алгоритма Томеи использовал его непрерывную версию, хорошо известную в математической физике: поток Тоды, см.[13], а также конспект следующей лекции. Суть доказательства от этого не сильно меняется.

3 Лекция 3: Периодические трехдиагональные матрицы

Упражнение 3.1. Какое топологическое пространство получится, если параллельно отождествить противоположные стороны шестиугольника?

Упражнение 3.2. Аналогичный вопрос про пермутоэдр произвольной размерности вместо шестиугольника.

3.1 Пермутоэдр

Еще одно важное свойство пермутоэдра, которое нам понадобится сегодня: существование “пермутоэдрического паркета”. Назовем пермутоэдр Pe_b , $b = (b_1, \dots, b_n)$ *правильным*, если числа $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ образуют арифметическую прогрессию. Оказывается, что параллельными копиями правильного пермутоэдра можно замостить пространство \mathbb{R}^{n-1} . Приведем стандартную конструкцию такого замощения.

Определение 3.3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^k$: дискретное множество точек в евклидовом пространстве. Для каждой точки $x \in M$ определим множество

$$C_x = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \text{dist}(y, x) \leq \text{dist}(y, x') \forall x' \in M, x' \neq x\},$$

называемое *клеткой Вороного*. Все пространство оказывается замощено клетками Вороного

$$\mathbb{R}^k = \bigcup_{x \in M} C_x$$

Такое разбиение называется *разбиением Вороного*.

Упражнение 3.4. Придумать дискретное множество точек в \mathbb{R}^k , для которого хотя бы одна клетка Вороного не является полиэдром.

Каждая клетка Вороного задается системой аффинных неравенств. Как правило, клетки являются полиэдрами (т.е. для каждой клетки все неравенства кроме конечного числа можно отбросить). В частности это так в случае, когда в качестве M берется решетка.

Определение 3.5. *Решеткой* в \mathbb{R}^k называется подмножество вида

$$M = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\},$$

где $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^k$: фиксированный набор линейно независимых векторов в евклидовом пространстве, называемый порождающими решетки. Если $s = k$, то решетка называется *кокомпактной*.

Таким образом, решетка — это подгруппа \mathbb{R}^k по сложению, изоморфная \mathbb{Z}^s .

Заметим, что фактор пространства по кокомпактной решетке есть компактный тор $\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k = T^k$.

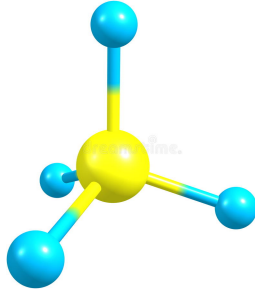


Рис. 6: Молекула метана: правильный набор в \mathbb{R}^3

Упражнение 3.6. Докажите, что каждая клетка Вороного кокомпактной решетки является выпуклым многогранником.

Такой многогранник называется многогранником Дирихле–Вороного заданной решетки. В физике твердого тела этот же объект называется ячейкой Вигнера–Зейтца.

Определение разбиения Вороного инвариантно относительно сдвига на любой вектор из решетки. Значит все клетки Вороного решетки являются параллельными копиями друг друга.

Определение 3.7. Будем называть набор векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ правильным, если все они имеют равные длины, и все углы между парами различных векторов равны.

В качестве правильного набора можно взять единичные нормальные векторы к правильному симплексу. В координатах их можно задать так:

$$(-(n-1), 1, 1, \dots, 1), (1, -(n-1), 1, \dots, 1), \dots, (1, 1, \dots, -(n-1)) \in \mathbb{R}^n$$

(все эти векторы лежат в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости вида $\sum x_i = 0$).

Упражнение 3.8. Сумма векторов правильного набора равна 0.

Определение 3.9. Правильной симплициальной решеткой $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ будем называть кокомпактную решетку, порожденную векторами v_1, \dots, v_{n-1} , такими что

$$v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} v_i$$

— правильный набор.

При $n = 3$ (т.е. на плоскости) получается правильная треугольная решетка, см.рис.8.

Упражнение 3.10. Клетка Вороного правильной симплициальной решетки в \mathbb{R}^{n-1} — это правильный пермutoэдр Pe^{n-1} .

Таким образом, мы получили замощение пространства параллельными копиями правильного пермutoэдра.

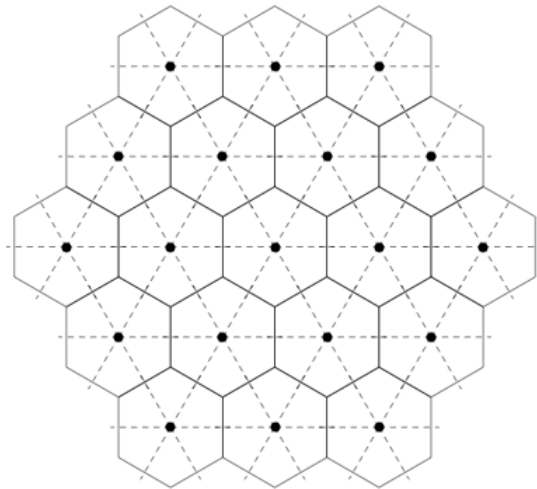


Рис. 7: Правильная треугольная решетка и ее разбиение Вороного

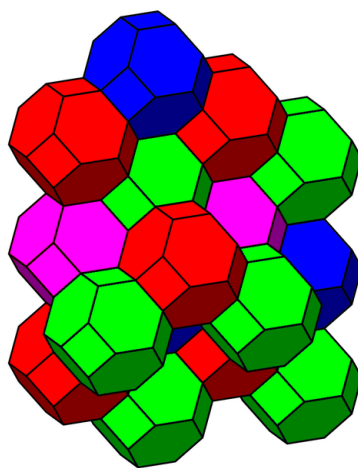


Рис. 8: Замощение пространства \mathbb{R}^3 пермутоэдрами

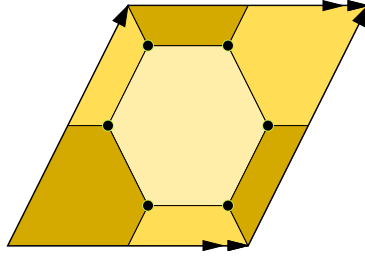


Рис. 9: Замечательное разбиение \mathcal{WT}_2 , $n = 3$

Упражнение 3.11. (*) Докажите, что если пермutoэдр не является правильным, то его параллельными копиями невозможно замостить пространство.

Конструкция 3.12. Рассмотрим внутри правильной симплициальной решетки $N \subset \mathbb{R}^k$ кокомпактную подрешетку $\tilde{N} \subset N$, то есть подрешетку, порожденную линейно независимым набором $w_1, \dots, w_k \in N$.

С одной стороны \mathbb{R}^k/\tilde{N} есть компактный тор T^k . С другой стороны, мы получаем каноническое клеточное разбиение на этом торе, которое происходит из клеток Вороного решетки N . Итого на торе T^k возникает клеточное разбиение, имеющее $|N/\tilde{N}|$ максимальных клеток.

Пример 3.13. Если взять $\tilde{N} = N$, то возникает клеточное разбиение тора с одной максимальной клеткой. Оно получается из пермutoэдра при помощи параллельной склейки противоположных граней. Таким образом, ответ на упр.3.1,3.2 — тор размерности 2 и n соответственно. Частично упорядоченное множество клеток этого разбиения называется *циклопермutoэдром*: оно было введено и изучено Гаянэ Паниной [11].

Пример 3.14. Пусть $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} v_i$ — правильный набор векторов, порождающий правильную симплициальную решетку $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим набор

$$\{w_i = v_i - v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

Упражнение 3.15. Докажите, что $\{w_i\}$ порождают кокомпактную подрешетку $\hat{N} \subset N$ индекса $|N/\hat{N}| = n$. Более того, $N/\hat{N} \cong \mathbb{Z}_n$.

Таким образом тор \mathbb{R}^{n-1}/\hat{N} разбит на n пермutoэдров Pe^{n-1} . Это разбиение будет называться *замечательным разбиением тора* и обозначаться \mathcal{WT}_{n-1} .

Упражнение 3.16. Докажите, что каждая клетка коразмерности s в \mathcal{WT}_{n-1} содержится в точности в $s+1$ различных максимальных клетках. (*) Докажите, что разбиение \mathcal{WT}_{n-1} является регулярным. Докажите, что \mathcal{WT}_{n-1} — минимальное по числу максимальных клеток разбиение с этими свойствами.

У разбиения \mathcal{WT}_{n-1}^* двойственного к \mathcal{WT}_{n-1} все клетки являются симплексами. Разбиение \mathcal{WT}_{n-1}^* является минимальным по числу вершин симплициально-клеточным разбиением тора.



Рис. 10: Замечательное разбиение \mathcal{WT}_3 , $n = 4$

3.2 Матрицы

Периодической трехдиагональной (симметричной) матрицей мы называем матрицу вида

$$L = L(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Будет полезно продолжить обозначения циклически, положив $b_{n+i} = b_i$, $a_{n+i} = a_i$. Вoids = нули.

Замечание 3.17. Заметим, что сопряжение матрицы $L(\underline{a}, \underline{b})$ матрицей циклического сдвига

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

циклически смещает как элементы a_i так и элементы b_i .

Пространство всех матриц вида (3.1), имеющих фиксированный спектр

$$\lambda = (\lambda_1 < \cdots < \lambda_n),$$

будем обозначать $\text{PTD}_{n,\lambda}$ (а аналогичное множество эрмитовых матрицы $\text{PTD}_{n,\lambda}(\mathbb{C})$). Как и раньше, мы хотим разобраться, как устроена топология этого пространства.

Для этого разобьем $\text{PTD}_{n,\lambda}$ на замкнутые куски, в зависимости от знаков внедиагональных элементов b_i . Пусть $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, $\epsilon_i = \pm 1$, вектор знаков. Рассмотрим подмножество

$$\text{PTD}_{n,\lambda}^\epsilon = \{L(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{PTD}_{n,\lambda} \mid \text{sgn}(b_i) \in \{\epsilon_i, 0\}\}.$$

(то есть мы допускаем нестрогие неравенства на элементы b_i).

Замечание 3.18. В отличие от случая трехдиагональных матриц, сопрягая матрицу $L(\underline{a}, \underline{b})$ матрицами вида $\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$, нельзя сделать все b_i неотрицательными. Действительно, сопряжение матрицей $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$ меняет знак двух элементов b_i соседних в циклическом порядке.

Приходим к детской задаче: по кругу стоят n стаканов, и разрешается за ход перевернуть любые два соседних. Какие комбинации стаканов можно получить из начальной комбинации? Очевидно, что любую комбинацию стаканов можно получить либо из начального положения, когда все стоят доньшком вниз, т.е. вектора $(+1, +1, \dots, +1)$, либо из положения, когда ровно один стакан стоит доньшком вверх, т.е. из вектора $(-1, +1, \dots, +1)$.

Ввиду замечания, нам достаточно описать два множества:

$$\text{PTD}_{n,\lambda}^+ = \text{PTD}_{n,\lambda}^{(+1,+1,\dots,+1)} \quad \text{и} \quad \text{PTD}_{n,\lambda}^- = \text{PTD}_{n,\lambda}^{(-1,+1,\dots,+1)}$$

а все остальные $\text{PTD}_{n,\lambda}^\epsilon$, идентичны одному из них, в зависимости от четности числа минусов в векторе ϵ .

Для периодической трехдиагональной матрицы $L(\underline{a}, \underline{b})$ рассмотрим число $B = \prod_{i=1}^n b_i \in \mathbb{R}$. Такое сопоставление задает непрерывное отображение $p: \text{PTD}_{n,\lambda}^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$. Легко проверить, что сопряжение на $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ не меняет произведение B . Таким образом, достаточно рассмотреть отображения

$$p_+: \text{PTD}_{n,\lambda}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \text{и} \quad p_-: \text{PTD}_{n,\lambda}^- \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

Теорема 3.19 (Ван Мёрбеке '76, [8]). *Образ отображения $p_+: \text{PTD}_{n,\lambda}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ является отрезком $[0, \frac{m}{4}]$. Для любого $t \in (0, \frac{m}{4})$ множество $p_+^{-1}(t)$ есть $(n-1)$ -мерный тор, а $p_+^{-1}(\frac{m}{4})$ есть тор размерности $n-1-n_-$.*

Аналогично, образом отображения $p_-: \text{PTD}_{n,\lambda}^- \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ является отрезок $[-\frac{M}{4}, 0]$. Для любого $t \in (-\frac{M}{4}, 0)$ множество $p_-^{-1}(t)$ есть $(n-1)$ -мерный тор, а $p_-^{-1}(-\frac{M}{4})$ есть тор размерности $n-1-n_+$.

Вещественные числа $m, M > 0$ и натуральные числа n_+, n_- определяются следующим образом.

Конструкция 3.20. Для заданного набора вещественных чисел $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ рассмотрим характеристический многочлен $F(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. Поскольку у него n вещественных корней, получаем последовательность вещественных чисел

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1},$$

Где $x_{n-1}, x_{n-3}, x_{n-5}, \dots$ точки локальных минимумов, а x_{n-2}, x_{n-4}, \dots точки локальных максимумов функции $F(x)$. Положим

$$M = \min_{i \text{ четное}} F(x_{n-i}), \quad m = \min_{i \text{ нечетное}} -F(x_{n-i}). \quad (3.2)$$

Очевидно, $m, M > 0$.

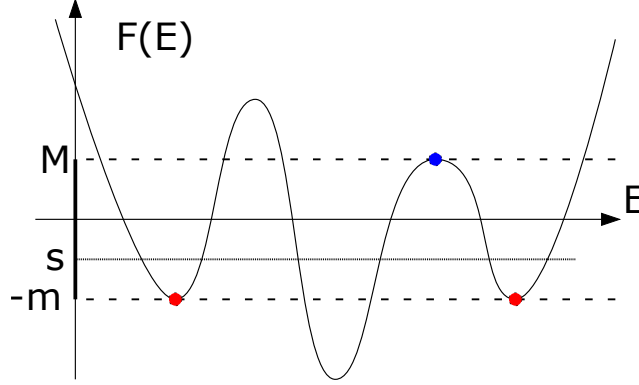


Рис. 11: Значения M и $-m$ на графике характеристического многочлена

n_+ обозначает число точек локального максимума в которых достигается значение M , а n_- точек локального минимума, в которых достигается значение $-m$.

На рис.11 изображен случай $n_+ = 1, n_- = 2$. Если λ выбран в общем положении, то $n_+ = n_- = 1$.

Теорема ван Мёрбеке гласит, что отображение p_+ расслаивает $\text{PTD}_{n,\lambda}^+$ на семейство торов T^{n-1} над отрезком $[0, M]$, причем над крайней правой точкой у тора схлопывается n_- координатных окружностей. Осталось разобраться, что происходит над левым концом отрезка. Вспомним, что p_+ сопоставляет периодической трехдиагональной матрице произведение ее внедиагональных элементов. Значит

$$p_+^{-1}(0) = \{L(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{PTD}_{n,\lambda}^+ \mid \prod_{i=1}^n b_i = 0\}.$$

Положим

$$Q_i = \{L(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{PTD}_{n,\lambda}^+ \mid b_i = 0\}$$

Значит $p_+^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^n Q_i$. Заметим, что Q_n есть просто множество изоспектральных трехдиагональных матриц, с неотрицательными числами вне диагонали. Теорема Томеи 2.12 утверждает, что Q_n гомеоморфно пермутоэдру Pe^{n-1} . С другой стороны, любое другое Q_i можно превратить в Q_n циклическим сдвигом. Поэтому все Q_i являются пермутоэдрами.

Теорема 3.21 (ван Мёрбеке ($n = 3$), Айзенберг ($n \geq 3$)). *Множество $p_+^{-1}(0)$ гомеоморфно тору T^{n-1} , причем его разбиение на подмножества Q_i совпадает с замечательным разбиением тора, определенным в начале лекции.*

Пусть спектр λ выбран так, чтобы параметры n_+ и n_- оба были равны 1 (случай общего положения). Тогда, согласно теореме ван Мёрбеке, пространство $\text{PTD}_{n,\lambda}^+$ есть замкнутое “полноторие” $D^2 \times T^{n-2}$. Действительно, можно отделить ту координатную окружность, которая схлопывается над точкой M . Семейство окружностей, которое схлопывается на конце — представляет из себя диск D^2 . С остальными окружностями, которых $n - 2$ штуки, ничего не происходит, поэтому имеем

$$\text{PTD}_{n,\lambda}^+ \cong D^2 \times T^{n-2}.$$

Заметим, однако, что на границе этого полнотория сидит не просто тор, а тор, разбитый на n пермutoэдров Q_i при помощи замечательного разбиения. Аналогично получаем

$$\text{PTD}_{n,\lambda}^- \cong D^2 \times T^{n-2}.$$

Тут, однако, в семействе торов схлопывается уже другая окружность, так что это полноторие нельзя канонически отождествить с $\text{PTD}_{n,\lambda}^+$.

Собирая все воедино, получаем, что пространство $\text{PTD}_{n,\lambda}$ распадается на 2^n кусков $\text{PTD}_{n,\lambda}^\epsilon$, $\epsilon \in \mathbb{Z}_2^n$, из которых половина является идентичными копиями $\text{PTD}_{n,\lambda}^+$, а другая половина — копиями $\text{PTD}_{n,\lambda}^-$. Более строго, пусть $\phi: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ обозначает гомоморфизм групп, берущий произведение знаков, и пусть $(\mathbb{Z}_2^n)_+ = \phi^{-1}(+1)$ — множество строчек знаков, имеющих четное число минусов, а $(\mathbb{Z}_2^n)_- = \phi^{-1}(-1)$ — множество строчек знаков, имеющих нечетное число минусов.

Теорема 3.22. *Допустим, $n_+ = n_- = 1$. Пространство $\text{PTD}_{n,\lambda}$ является топологическим многообразием и представимо в виде*

$$(\text{PTD}_{n,\lambda}^+ \times (\mathbb{Z}_2^n)_+ \sqcup \text{PTD}_{n,\lambda}^- \times (\mathbb{Z}_2^n)_-) / \sim$$

где гипергрань Q_i полнотория $\text{PTD}_{n,\lambda}^+ \times \{\epsilon\}$ отождествляется с аналогичной гипергранью Q_i полнотория $\text{PTD}_{n,\lambda}^- \times \{\epsilon'\}$, если ϵ отличается от ϵ' только в позиции i .

Отождествление именно такое, поскольку гипергрань Q_i и в том и в другом полнотории состоит из всех изоспектральных матриц, у которых $b_i = 0$, а остальные b_j имеют одни и те же знаки.

Важный частный случай: $n = 3$. В этом случае периодические трехдиагональные матрицы — это просто все симметричные матрицы. Это пространство совпадает с пространством $F_3(\mathbb{R})$ полных флагов в \mathbb{R}^3 , см. первую лекцию. Теорема 3.22 в этом случае дает разбиение пространства $F_3(\mathbb{R})$ на 8 бубликов.

Напоследок несколько упражнений. Заметим, что группу \mathbb{Z}_2^3 можно рассматривать как подгруппу $O(3)$, состоящую из диагональных матриц с ± 1 на диагонали. Такая подгруппа действует на $O(3)$ как умножениями слева, так и умножениями справа.

Упражнение 3.23. $F_3(\mathbb{R}) = O(3)/\mathbb{Z}_2^3$.

Упражнение 3.24. $F_3(\mathbb{R}) = S^3/Q_8$, где S^3 есть сфера единичных кватернионов, $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ — группа кватернионов, и Q_8 действует на S^3 умножениями слева. В частности, $\pi_1(F_3(\mathbb{R})) = Q_8$.

Предыдущие два упражнения к результатам ван Мёрбеке отношения не имеют. А вот следующие имеют.

Упражнение 3.25. $\mathbb{Z}_2^3 \backslash O(3) / \mathbb{Z}_2^3 \cong S^3$. Обратите внимание, что одновременное действие слева и справа не является свободным. Это вообще весьма удивительно, что пространство орбит оказалось многообразием.

Упражнение 3.26. Допустим, что $n_+ = n_- = 1$. Докажите, что пространство орбит $\text{PTD}_{n,\lambda} / \mathbb{Z}_2^n$ гомеоморфно $S^3 \times T^{n-3}$.

Упражнение 3.27. Докажите, что если хотя бы одно из чисел n_+, n_- не равно 1, то $\text{PTD}_{n,\lambda}$ не является многообразием.

Замечание 3.28. За теоремой ван Мёрбеке стоит довольно большая наука: теория интегрируемых динамических систем и алгебро-геометрический метод математической физики, см.[6, 5, 8].

На множестве симметричных трехдиагональных периодических матриц можно рассмотреть специальную динамическую систему: периодический поток Тоды. Пусть

$$L = L(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad P = P(L) = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & & & b_n \\ b_1 & 0 & -b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -b_{n-1} \\ -b_n & & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 3.29. Матрица $[L, P] = LP - PL$ симметричная и периодическая трехдиагональная.

Теперь предположим, что каждый элемент a_i, b_i является функцией от времени t :

$$a_i = a_i(t), b_i = b_i(t), L = L(t), P = P(t)$$

Рассмотрим динамическую систему (систему дифференциальных уравнений первого порядка)

$$\dot{L} = [L, P] \tag{3.3}$$

Эта система корректно определена на множестве симметричных периодических трехдиагональных матриц. Она называется *периодическим потоком Тоды*.

Упражнение 3.30. (*) Пусть $\hat{L}(t)$ — решение уравнения (3.3). Докажите, что спектр матрицы $\hat{L}(t)$ не зависит от t .

Упражнение 3.31. Величина $B(t) = \prod_{i=1}^n b_i(t)$, вычисленная для решения $\hat{L}(t)$, не зависит от t .

Таким образом, все траектории лежат, во-первых, внутри множества $\text{PTD}_{n,\lambda}$, во-вторых, внутри гиперповерхности $B = \text{const}$.

Если мы положим $b_n = 0$, то траектория остается внутри пространства обычных трехдиагональных матриц: в этом случае она называется открытым (или непериодическим) потоком Тоды. Открытый поток Тоды является (в некотором смысле, см.

[9]) непрерывным аналогом QR-алгоритма: любая его траектория стремится к диагональной матрице. Однако периодический поток Тоды при $B \neq 0$ качественно устроен по-другому.

В теории динамических систем известна теорема Лиувилля–Арнольда, согласно которой, при некоторых условиях на динамическую систему (полная интегрируемость по Лиувиллю и компактность поверхностей уровня), любая траектория представляет из себя всюду плотную обмотку некоторого тора. При этом аппарат математической физики часто позволяет найти “канонические координаты”, т.е. такую замену переменных в дифференциальном уравнении, при которой решения — попросту прямые на торе.

Оказывается, что при $B \neq 0$ периодический поток Тоды удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля–Арнольда. Торы, которые возникают в теореме ван Мёрбеке — это в точности замыкания траекторий периодического потока Тоды. Ван Мёрбеке сделал больше: он явно построил канонические координаты для периодического потока Тоды.

4 Лекция 4: Некоторые другие пространства матриц

4.1 Пермутоэдр

Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ — заданный набор вещественных чисел, а I_1, \dots, I_{n-1} — отрезки между ними

$$I_j = [\lambda_j; \lambda_{j+1}]$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{R}_{n-1} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_{n-1}} I_{\sigma(1)} \times \dots \times I_{\sigma(n-1)} \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

объединение $(n-1)!$ кубов размерности $n-1$. Рассмотрим также множество

$$\acute{\mathcal{R}}_{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}_{n-1}, \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i\}$$

Видно, что $\acute{\mathcal{R}}_{n-1}$ аффинно эквивалентно \mathcal{R}_{n-1} , однако $\acute{\mathcal{R}}_{n-1}$ лежит в наклонной гиперплоскости $\sum x_i = \text{const}$.

Упражнение 4.1. Выпуклой оболочкой множества $\acute{\mathcal{R}}_{n-1}$ является пермутоэдр Pe_λ .

Таким образом, мы получаем интересный способ вписать в пермутоэдр Pe^{n-1} $(n-1)!$ параллелепипедов.

Упражнение 4.2. (*) Пусть Sq_k обозначает объединение всех граней пермутоэдра Pe^k , комбинаторно эквивалентных кубу некоторой размерности (в частности, это множество содержит реберный остов пермутоэдра, а значит связно). Докажите, что множество $\mathcal{C}R_{n-1}$ гомотопически эквивалентно множеству Sq_{n-2} .

Упражнение 4.3. (**) Описать гомотопическую топологию (например, посчитать числа Бетти) множества $\mathcal{C}R_{n-1}$.

4.2 Матрицы

Симметричной матрицей-стрелкой будем называть матрицу вида

$$S(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ b_1 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Как и раньше, мы задаемся вопросом, как устроено пространство $\text{Agr}_{n,\lambda}$ всех матриц-стрелок, имеющих заданный спектр λ .

Рассмотрим отображение $\mu: \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ из первой лекции, которое сопоставляет симметричной (или, более общо, эрмитовой) матрице ее диагональ.

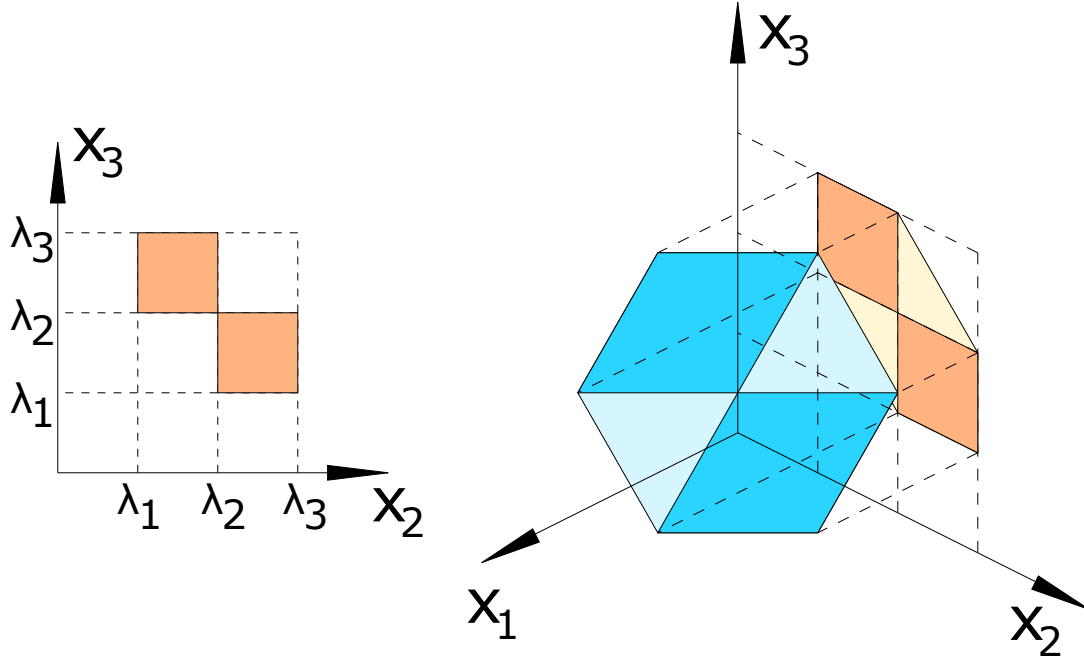


Рис. 12: Множество \mathcal{CR}_2 слева, и аффинно эквивалентное ему множество $\hat{\mathcal{R}}_2$ справа

Упражнение 4.4. (*) $\mu(\text{Agr}_{n,\lambda}) = \hat{\mathcal{R}}_{n-1}$.

Как и раньше, разобьем $\text{Agr}_{n,\lambda}$ на 2^{n-1} замкнутых кусков, в зависимости от знаков элементов b_i :

$$\text{Agr}_{n,\lambda} = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Z}_2^{n-1}} \text{Agr}_{n,\lambda}^\epsilon, \quad \epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}), \epsilon = \pm 1$$

$$\text{Agr}_{n,\lambda}^\epsilon = \{S(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{Agr}_{n,\lambda} \mid \text{sgn } b_i \in \{\epsilon_i, 0\}\}$$

Упражнение 4.5. Докажите, что сопряжение матрицы диагональными матрицами с ± 1 на диагонали позволяет отождествить все куски $\text{Agr}_{n,\lambda}^\epsilon$. Более того, отображение μ инвариантно относительно такого сопряжения.

Таким образом, достаточно исследовать кусок $\text{Agr}_{n,\lambda}^{\geq} = \text{Agr}_{n,\lambda}^{(+1, \dots, +1)}$. Рассмотрим отображение $\mu^+ : \text{Agr}_{n,\lambda}^{\geq} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_{n-1}$, $\mu^+ = \mu|_{\text{Agr}_{n,\lambda}^{\geq}}$

Упражнение 4.6. (*) Для любой точки $x \in \hat{\mathcal{R}}_{n-1}$, пространство $(\mu^+)^{-1}(x)$ стягиваемо.

Как следствие, пространство $\text{Agr}_{n,\lambda}^{\geq}$ гомотопно $\hat{\mathcal{R}}_{n-1}$, то есть, согласно упр.4.2, кубическому комплексу Sq_{n-2} .

Как и в случае трехдиагональных матриц, все пространство $\text{Agr}_{n,\lambda}$ распадается в объединение 2^{n-1} копий некоторого множества $\text{Agr}_{n,\lambda}^{\geq}$, однако на этот раз элементарный кусок уже не является многогранником: оно имеет крайне запутанную топологию.

Задача 4.7. Вычислить гомологии $\text{Agr}_{n,\lambda}$ с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 .

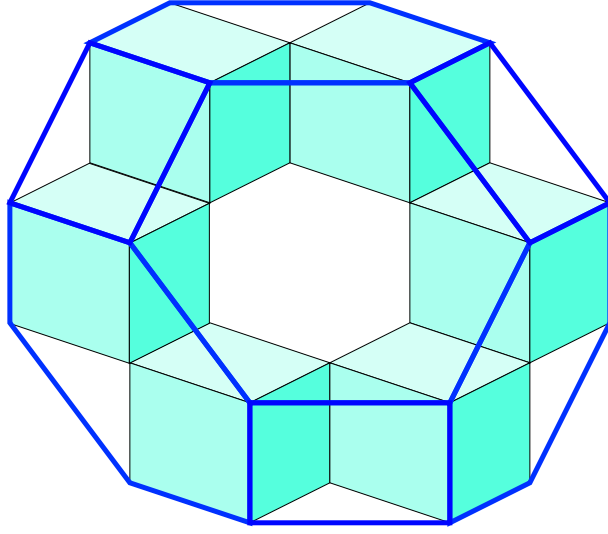


Рис. 13: Ожерелье из 6 кубов внутри \mathbb{R}^3

Конструкция 4.8. Есть более общая естественная конструкция. Пусть Γ — граф на множестве вершин $[n]$, имеющий множество ребер $E(\Gamma)$. Рассмотрим пространство

$$M_{\Gamma,\lambda} = M_{\Gamma,\lambda}(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in M_\lambda(\mathbb{R}) \mid a_{i,j} = 0, \text{ если } (i,j) \notin E(\Gamma)\},$$

$$M_{\Gamma,\lambda}(\mathbb{C}) = \{A = (a_{i,j}) \in M_\lambda(\mathbb{C}) \mid a_{i,j} = 0, \text{ если } (i,j) \notin E(\Gamma)\},$$

то есть пространство (симметричных/эрмитовых) матриц, имеющих заданный простой спектр λ и нули на заданных позициях, которые кодируются ребрами графа Γ . Легко видеть, что пространство всех изоспектральных матриц соответствует полному графу, пространство трехдиагональных — простому пути на n вершинах, пространство периодических трехдиагональных — простому циклу на n вершинах, а пространство матриц-стрелок — графу-звезде.

Задача 4.9. *Описать все графы Γ , для которых топологический тип пространства $M_{\Gamma,\lambda}$ не зависит от выбора простого спектра λ .*

Разобранные на лекциях примеры показывают, что тип пространства не зависит от спектра в случае полного графа, графа-пути, и графа-звезды. А в случае графа-цикла, топологический тип зависит от спектра (происходит это благодаря параметрам n_+, n_-). Также известно, что топологический тип не зависит от спектра, если граф — индифферентный граф: таким графам соответствуют ступенчатые матрицы [3]. Помимо этих примеров ответ на задачу 4.9 неизвестен. Также очень мало известно про топологию соответствующих изоспектральных пространств.

Список литературы

- [1] A. Ayzenberg, *Space of isospectral periodic tridiagonal matrices*, arXiv:1803.11433).
- [2] A. A. Ayzenberg and V. M. Buchstaber, *Manifolds of isospectral arrow matrices*, 2018, preprint: arXiv:1803.10449
- [3] A. A. Ayzenberg, V. M. Buchstaber, *Manifolds of isospectral matrices and Hessenberg varieties*, preprint: arXiv:1803.01132
- [4] A. Horn, *Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix*, American Journal of Mathematics 76 (1954), 620–630.
- [5] И. М. Кричевер, *Нелинейные уравнения и эллиптические кривые*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 23, 1983, 79–136.
- [6] I. Krichever, K. L. Vaninsky, *The periodic and open Toda lattice*, Mirror Symmetry IV, AMS/IP. vol 33, 139–158 (2002), (preprint: arXiv:hep-th/0010184).
- [7] J. Moser, *Finitely many points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system*, in Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics, 38, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 467–497.
- [8] P. van Moerbeke, *The Spectrum of Jacobi Matrices*, Inventiones math. 37 (1976), 45–81.
- [9] T. Nanda, *Differential equations and the QR algorithm*, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 22:2 (1985), 310–321.
- [10] В. В. Прасолов, *Задачи и теоремы линейной алгебры*, Москва 2008.
- [11] G. Panina, *Cyclopermutohedron*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 288 (2015), 132–144 (preprint: arXiv:1401.7476).
- [12] R. Sinkhorn, *A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices*. Ann. Math. Statist. 35 (1964), 876–879.
- [13] C. Tomei, *The topology of isospectral manifolds of tridiagonal matrices* Duke Math. Journal, Vol. 51:4 (1984).
- [14] C. Tomei, *The Toda lattice, old and new* The Journal of Geometric Mechanics 5(4) (preprint arXiv:1508.03229).