Модулярные формы К. Конрад

Дубна, 2016 г. Листок 4

Текст на диске O: Nonvanishing of a Theta function

1. Используйте то, что у $h(x) = e^{-\pi a x^2}$ есть преобразование Фурье $\widehat{h}(y) = (1/\sqrt{a})e^{-\pi y^2/a}$ чтобы доказать, что $\widetilde{\theta}(\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{\pi i n^2\tau} = 1 + \sum_{n\geq 1} 2e^{\pi i n^2\tau}$ удовлетворяет $\widetilde{\theta}(-1/\tau)^4 = -\tau^2\widetilde{\theta}(\tau)^4$. (Это почти условие модулярности для $\widetilde{\theta}(\tau)^4$ в весе 2, но возникает знак минус справа.)

2. Предположим, что $f\colon H \to \mathbf{C}$ удовлетвояет соотношениям $f(\tau+1) = f(\tau)$ и $f(-1/\tau) = \tau^2 f(\tau) + (6/\pi i)\tau$ для всех $\tau \in H$. Пример такой функции — $E_2(\tau)$.

   а) Докажите, что функция $f^*(\tau) = f(\tau) - 3/(\pi\,\mathrm{Im}(\tau))$ удовлетворяет соотношениям $f^*(\tau+1) = f^*(\tau)$ и $f^*(-1/\tau) = \tau^2 f^*(\tau)$.

   б) Используйте пункт (а) чтобы доказать, что для всех $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$,

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 f(\tau) + \frac{6}{\pi i}c(c\tau+d).$$

3. а) Продифференцируйте соотношение

$$E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 f(\tau) + \frac{6}{\pi i}c(c\tau+d)$$

   для всех $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ чтобы доказать, что $E_2'(\tau) - (1/12)E_2(\tau)^2 \in M_4$. Потом учтите, что эта разность равна $-(1/12)E_4$, поэтому $E_2' = (E_2^2 - E_4)/12$.

   б) Если $f \in M_k$, то докажите для всех $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, что

$$f'\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{k+2} f'(\tau) + \frac{k}{2\pi i}c(c\tau+d)^{k+1} f(\tau).$$

   в) Докажите, что если $f \in M_k$, то $f' - (k/12)E_2 f \in M_{k+2}$. Потом учтите, что $E_4' = (E_2E_4 - E_6)/3$ и $E_6' = (E_2E_6 - E_4^2)/2$. Это показывает, что лжемодулярная форма E_2 веса 2 возникает, когда мы пытаемся продифференцировать обыкновенные модулярные формы. (Кольцо $\mathbf{C}[E_4, E_6]$ всех модулярных форм на $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ не сохраняется дифференцированием, а кольцо $\mathbf{C}[E_2, E_4, E_6]$ сохраняется.)