Модулярные формы К. Конрад
Дубна, 2016 г. Листок 2

Текст на диске O: Суммирование по целой решетки.

1. Для $a > 0$ и $b > 0$, пусть $U_{a,b} = \{x + iy : |x| \le a, y \ge b\}$.

   а) Докажите, что существует такое $\delta = \delta_{a,b} \in (0,1)$, что для всех $\tau \in U_{a,b}$, $|m\tau + n| \ge \delta|mi + n|$ для всех $m, n \in \mathbf{Z}$.

   б) Покажите, что ряд Эйзенштейна $\sum_{(m,n)\neq(0,0)} 1/(m\tau + n)^k$ сходится равномерно для всех $\tau \in U_{a,b}$.

2. Используя соотношение $E_4^2 = E_8$, покажите, что

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m).$$

3. Пусть задана хорошая функция $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Для $a > 0$ и $b \in \mathbf{R}$, пусть $h_{a,b}(x) = h(ax + b)$. Докажите, что преобразования Фурье функций h и $h_{a,b}$ удовлетворют следующему соотношению:

$$\widehat{h_{a,b}}(y) = \frac{e^{2\pi i b/a}}{a}\widehat{h}\left(\frac{y}{a}\right).$$

   Что происходит, если $a < 0$?

4. (Для тех, кто знает комплексный анализ) Для $\tau \in H$ и $k \ge 2$ из $\mathbf{Z}$, пусть задана $\varphi_\tau\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ формулой $\varphi_\tau(x) = 1/(\tau + x)^k$ (может быть k нечетное). Докажите, что

$$\widehat{\varphi_\tau}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 0, \\ \dfrac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} y^{k-1} e^{2\pi i y \tau}, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

   используя теорему вычетов и интегрирование по z функции $e^{-2\pi i z y}/(\tau + z)^k$ вдоль отрезка $[-R, R]$ и полукруга на плоскости с диаметром $[-R, R]$, при $R \to \infty$: верхний полукруг, если $y \le 0$ и нижний полукруг, если $y > 0$.