XVI Летняя Школа «Современная математика»

Меры Пальма

(лекторы: Александр Игоревич Буфетов, Дмитрий Игоревич Зубов)

Листок №2

1. Рассмотрим множество $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ бесконечных в обе стороны последовательностей из нулей и единиц. Напомним, что мера $\mathbb{P}$ на Ω называется *детерминантным процессом*, если существует такая функция $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ такая, что для произвольного конечного набора $i_1, ..., i_k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega_{i_1} = ... = \omega_{i_k} = 1\}) = \det\left[K(i_p, i_q)\right]_{p,q=1}^{k}.$$

   Найдите

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega_{i_1} = ... = \omega_{i_k} = 0\}).$$

   Подсказка: попробуйте сначала рассмотреть случаи $n = 2, 3$. Используйте принцип включений-исключений.

2. Для детерминантной меры $\mathbb{P}$ на $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ найдите совместную вероятность $\mathbb{P}(\{\omega_x = 1, \omega_y = 1\})$ событий $\{\omega_x = 1\}$ и $\{\omega_y = 1\}$ для различных $x, y \in \mathbb{Z}$. Сравните с произведением вероятностей этих событий и убедитесь, что

$$\mathbb{P}(\{\omega_x = 1, \omega_y = 1\}) \leq \mathbb{P}(\{\omega_x = 1\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega_y = 1\}).$$

   Сравните результат со случаем меры Бернулли. Напомним, что мера Бернулли — это такая мера на множестве последовательностей, что для любой позиции $x \in \mathbb{Z}$ имеем $\mathbb{P}(\{\omega_x = 1\}) = p$.

3. a) Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением $\langle v, w\rangle$. Докажите, что любую линейно независимую систему векторов (то есть такую, что ни один из векторов не выражается через другие) можно сделать ортогональной.

   b) Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$

   Докажите, что если вместо $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ поставить произвольные линейно независимые многочлены $p_0(x), p_1(x), ..., p_{n-1}(x)$ (со старшим коэффициентом 1), то результат не изменится.

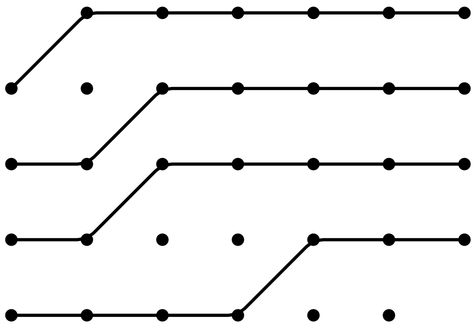

Рис. 1: Пример расположения путей на решётке из задачи 4.

4. **Формула Карлина-МакГрегора (или Гесселя-Вьенно).**

Расставим на решётке $\mathbb{Z}^2$ наборы точек $\{(s, a_i), i = 1, ..., n\}$ и $\{(t, b_j), j = 1, ..., n\}$, $s < t$ и соединим их n ломаными, состоящими из горизонтальных отрезков и отрезков, повёрнутых на угол 45 градусов против часовой стрелки. На рис. 1 изображён один из способов, которым это можно сделать.

Доказать, что число способов $\mathcal{R}_n^{a;b}(s,t)$ провести n путей указанным выше образом так, чтобы они не пересекались (то есть, не имели общих точек), равно

$$\mathcal{R}_n^{a;b}(s,t) = \det \left[\binom{(t-s)}{(b_j - a_i)} \right]_{i,j=1}^{n}. \qquad (*)$$

Подсказки:

a.1) Начните со случая $n = 2$. Сколько пар ломаных (возможно, пересекающихся) можно провести указанным выше образом?

a.2) Пусть два пути $[a_1 \to b_1]$ и $[a_2 \to b_2]$ пересекаются. Пусть p – самая левая точка пересечения. Построим новую пару путей $\mu_1 : a_1 \mapsto b_2$, $\mu_2 : a_2 \mapsto b_1$, поменяв местами части исходных путей, начинающиеся от точки p (см. рис. 2). Всякие такие «неправильные» пути пересекаются. Вывести из этого, что число пересекающихся путей $[a_1 \to b_1]$ и $[a_2 \to b_2]$ равно числу пар путей $\{a_1 \to b_2\}$ и $\{a_2 \to b_1\}$.

a.3) Докажите формулу (*) в случае $n = 2$.

b.1) Соединим точки $\{a_1, ..., a_n\}$ и $\{b_1, ..., b_n\}$ в произвольном порядке. Будем говорить, что набор путей соответствует перестановке σ, действующей на множестве $\{1, ..., n\}$, если всякая ломаная μ_i начинается в a_i и заканчивается в $b_{\sigma(i)}$. Посчитайте число всевозможных наборов путей $R_{a \to \sigma(b)}$, отвечающих перестановке σ.

b.2) Рассмотрим набор путей (вообще говоря, пересекающихся), отвечающий перестановке σ. Пусть теперь p — левая нижняя точка пересечения путей. Тогда вновь рассмотрим отображение, меняющее пути местами в точке p.

Такое отображение является биекцией на множестве пересекающихся путей, меняющей чётность перестановки.

b.3) Просуммируйте число путей $R_{a \to \sigma(b)}$ по перестановкам σ с учётом знака, и получите формулу (*).

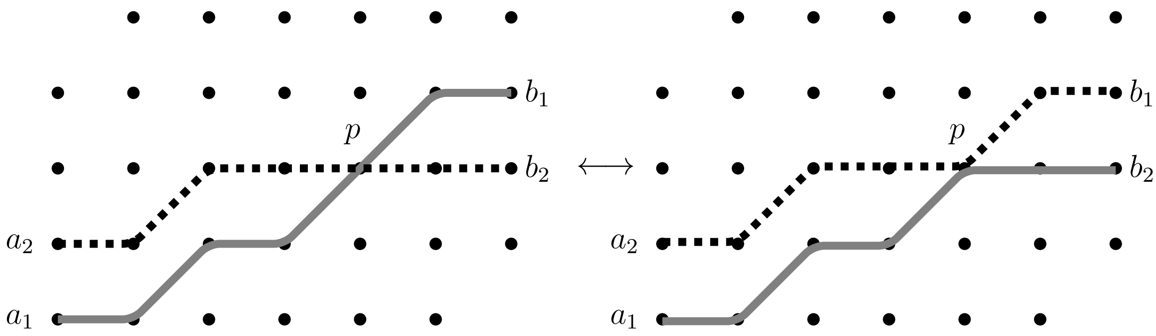

Рис. 2: «Переключение» путей.

5. **Формула Бине-Коши.**

Пусть A – матрица порядка $m \times n$, а B – матрица порядка $n \times m$. Докажите, что

$$\det(AB) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} A^{i_1,\ldots,i_m} B_{i_1,\ldots,i_m},$$

где $A^{i_1,\ldots,i_m}$ – минор матрицы A, составленный из столбцов с номерами $\{i_1, \ldots, i_m\}$, а $B_{i_1,\ldots,i_m}$ – минор матрицы B, составленный из строк с номерами $\{i_1, \ldots, i_m\}$.

Указание: воспользоваться определением определителя:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

XVI Летняя Школа «Современная математика»

Меры Пальма

(*лекторы: Александр Игоревич Буфетов, Дмитрий Игоревич Зубов*)

Листок №1

1. Случайная величина ξ, принимающая значения $0, 1, 2...$ имеет распределение Пуассона с параметром λ, если

$$\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Если ξ, η – две независимые случайные величины, распределённые по Пуассону с параметрами λ и μ, то как распределена их сумма $\xi + \eta$?

2. Рассмотрим многократное бросание монетки. Пусть вероятность выпадения орла равна p.

a) Найти вероятность того, что орёл выпадет в первый раз с k-той попытки.

b) Пусть на k-том броске выпал орёл. Какова вероятность того, что орёл выпадет ещё раз на $k + l$-том ходу?

c) Пусть ξ – случайная величина, принимающая значения $1, 2....$, такая что

$$\mathsf{P}(\xi = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}.$$

Сделаем замену переменных $p = t/n$. Покажите, что в пределе $n \to \infty$

$$F_n(x) = \mathsf{P}(\xi_n \leq x) \to 1 - e^{\lambda x}.$$

Как предел связан с временем ожидания события в процессе Пуассона?

Напоминание. Процесс Пуассона характеризуется тем, что в любом интервале длины t число точек (событий) имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \cdot t$, и что количества точек (событий) в непересекающихся интервалах суть независимые величины.

Число $\lambda > 0$ называется интенсивностью процесса Пуассона.

4. К остановке подъезжают независимо автобусы и троллейбусы. Времена приходов автобусов образуют пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а времена приходов троллейбусов – пуассоновский процесс с интенсивностью μ.

К остановке также в случайное время, равномерно распределённое на (0,1), подходит пассажир.

a) Найти распределение времени ожидания транспорта.

b) С какой вероятностью пассажир уедет на автобусе? (Разумеется, предполагается, что он уедет на том транспорте, который придёт раньше).

5. Для процесса Пуассона с интенсивностью λ посчитать распределение суммы расстояний до ближайших точек слева и справа.